KONİNİN KESİTLERİ (II)

H. Turgay Kaptanoğlu *

Ç. Dışmerkezlilik ve Doğrultmanlar

Dışmerkezlilik kavramı, incelediğimiz dört eğriyi aynı bakış açısı etrafında toplamamızı sağlayacak. Dışmerkezlilik hakkında bir fikir elde edebilmek için önce parabolün tanımını hatırlayalım: doğrultmana ve odağa eşit uzaklıktaki noktaların kümesi. Doğrultmanı D ile gösterirsek, bu $|NO| = |ND|$ demek olur; yani

$$\frac{|NO|}{|ND|} = e$$

oranı 1'e eşittir. Bu orana *dışmerkezlilik* denir. Bu kavram şimdilik sadece parabol için var. Diğer üç eğri için ya dışmerkezliliği başka türlü tanımlayıp buradan eğrilerin doğrultmanlarına geçebiliriz, ya da bu eğrilerin önce doğrultmanlarını tanımlayıp sonra dışmerkezliliklerini hesaplayabiliriz; hatta dört eğrinin hepsini en baştan yukarıdaki denklemle tanımlayabilirdik. Biz birinci yolu seçeceğiz.

Elips ve hiperbolün dışmerkezliliği

$$e = \frac{c}{a}$$

ile tanımlanır; yani bu eğriler için dışmerkezlilik, odaklar arası uzaklığın, tepe noktaları arasındaki uzaklığa oranıdır. c uzunluğunu a ve b cinsinden yazarsak, elipsin dışmerkezliliği

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

hiperbolün dışmerkezliliği ise

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

olur. Buradan görürüz ki elipsin dışmerkezliliği 1'den küçük, hiperbolünkü 1'den büyüktür. Parabol ise 1 olan dışmerkezliliği ile elips ile hiperbol arasında bir geçiş eğrisidir.

Elips yassılaştıkça b, a'ya oranla azalır ve dışmerkezlilik 1'e yaklaşır; elips yuvarlaklaştıkça, b ile a birbirine yakındır ve dışmerkezlilik sıfıra yaklaşır. Yani dışmerkezlilik, en azından elipste, basıklığın bir ölçüsüdür. Çembere gelince, bu eğrinin odakları çakışan bir özel elips olduğunu belirtmiştik. Yani $c = 0$'dır ve a da yarıçaptır; dolayısıyla çemberin dışmerkezliliği $e = 0$'dır. Bu da şaşırtmamalı; bu derece simetri özellikleri gösteren bir eğrinin basık hiç bir tarafı yok tabii.

Şimdi artık elips ve hiperbol için de doğrultmanlar bulabiliriz. Bunun için parabolün dışmerkezlilik tanımından yararlanacağız. e verilen eğrinin dışmerkezliliği, O odaklarından biri ve N eğri üzerinde bir nokta ise, bu odağa karşılık gelen *doğrultman* D,

$$\frac{|NO|}{|ND|} = e$$

eşitliğini sağlayan ve eğrinin eksenine dik olan doğrudur. Elipsin ve hiperbolün ikişer odağı ve dolayısıyla ikişer doğrultmanı vardır. Bir tek odağı ve doğrultmanı olan parabol bir bakıma yarım bir elipsten yarım bir hiperbole geçiştir.

Doğrultmanın tanımından onun bir-iki özelliğini hemen çıkartabiliriz. Önce denklemi $|NO| = e|ND|$ diye yazalım. Çember dışındaki üç eğride $e > 0$ ve $|NO| > 0$ sağlanır. O zaman $|ND| > 0$ olmak zorundadır; yani eğri üzerindeki bir noktanın doğrultmana uzaklığı sıfır olamaz. Diğer bir deyişle doğrultmanlar eğriyi kesmez. Bunu parabol için tanımı gereği zaten biliyorduk. Odakları sabit kalıp dışmerkezliliği azalan elipsler düşünürsek, $|NO|$ uzunluğu bir süre sonra fazla değişmez. e'deki azalmayı karşılamak için $|ND|$ artmak zorundadır; yani doğrultmanlar elipsten gittikçe uzaklaşır. $e = 0$ sınır haline karşılık gelen çemberi, doğrultmanları sonsuza kaçmış bir elips olarak düşünebiliriz.

Başlarda incelediğimiz birer elips ve hiperbolün doğrultmanlarını bulalım. $N(x, y)$ noktası

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

elipsinin üzerinde ve $a > b$ olsun. $O_2(c, 0)$ odağını kullanalım. Elipsin ekseni $y = 0$ olduğundan, buna dik olan ve O_2'ye karşılık gelen D_2 doğrultmanı $x = d_2$ şeklindedir. d_2'yi bulacağız. Elimizdeki bilgileri doğrultmanın tanım denkleminde kullanırsak,

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{|d_2 - x|} = \frac{c}{a}$$

eşitliğini elde ederiz. y^2 yerine elipsin denkleminden elde ettiğimiz denkliği kullanalım; $b^2 = c^2 - a^2$ yazalım; sonra iki tarafın karesini alalım ve elde ettiğimiz ifadeyi d_2 için çözelim. Bir takım hesaplardan sonra

$$d_2 = 2x - \frac{a^2}{c} \qquad \text{veya} \qquad d_2 = \frac{a^2}{c}$$

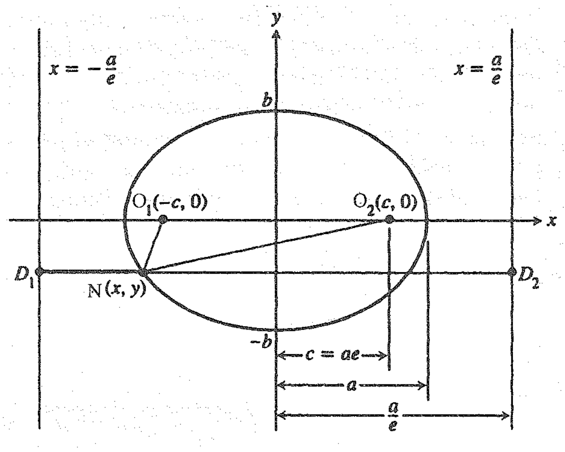
buluruz. Doğrultmanın denkleminin N'den bağımsız olması gerektiğinden ilk çözüm gerçek bir çözüm değildir ve D_2 doğrultmanı

$$x = d_2 = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$$

doğrusu olur. $O_1(-c, 0)$ odağını kullansaydık, denklemi

$$x = d_1 = -\frac{a^2}{c} = -\frac{a}{e}$$

olan D_1 doğrultmanını bulacaktık. Elipsimizde x'in aldığı en büyük ve en küçük değer ($y = 0$ aldığımızda) $x = a$ ve $x = -a$'dır. $0 < e < 1$ bilgisi de bize $d_2 > a > c > 0$ ve $d_1 < -a < -c < 0$ verir. Bu ise her odak-doğrultman çiftinin merkezin aynı tarafında bulunduğunu ve elipsin de her odak-doğrultman çiftinin arasından geçtiğini söyler.



Benzer bir hesabı $N(x, y)$ noktasını içeren ve ekseni $y = 0$ olan

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

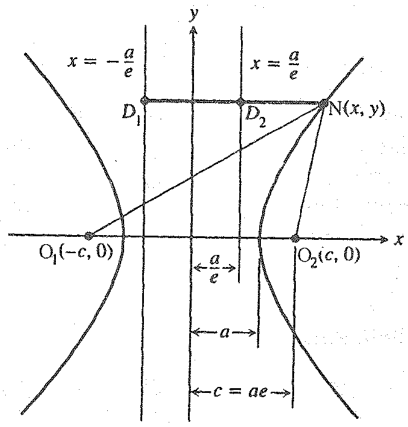
hiperbolü için de yapalım. Değişiklik olsun diye $O_1(-c, 0)$ odağını kullanalım. Doğrultmana $x = d_1$ deriz ve tanımda yerine koyarak

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{|x - d_1|} = \frac{c}{a}$$

yazarız. Yukarıda izlediğimiz yolla d_1'i buluruz. D_1 ve D_2 doğrultmanları sırayla

$$x = d_1 = -\frac{a}{e} \qquad \text{ve} \qquad x = d_2 = \frac{a}{e}$$

doğruları çıkar. Denklemler elipstekilerin aynısıdır, yalnız doğrular farklıdır, çünkü şimdi $e > 1$'dir; o zaman $d_1 > a$ ve $d_2 > a$ gerçeklenir. Hiperbolümüzün denkleminde $y = 0$ alarak x^2'nin aldığı en küçük değeri, dolayısıyla da x'in sıfıra en yakın değerlerini buluruz; bunlar $x = -a$ ve $x = a$'dır. O zaman $-c < -a < d_1 < 0$ ve $0 < d_2 < a < c$ eşitsizlikleri geçerlidir. Elipste olduğu gibi her odak-doğrultman çifti merkezin aynı tarafındadır ve hiperbol her odak-doğrultman çiftinin arasından geçer. Farklı olan taraf, burada doğrultmanların merkeze hiperbolden daha yakın olmasıdır. Hiperbol, odaklarının merkeze kendisinden daha uzak olmasıyla zaten elipsten ayrılıyordu.



Özetle, $|NO| = e|ND|$ eşitliği çember dışındaki diğer üç eğrinin ortak denklemidir; hangisi olduğu e'nin değerinden anlaşılır. Yalnız bu denklemi doğrudan kullanmak zor. Doğrultman ve odak verildiğinde bu denklemle başlayarak eğrinin denklemine geçebiliriz. Bir örnekle görelim. Merkezi başnoktada, odaklarından biri $(-4, 0)$ ve buna karşılık gelen doğrultmanı $x = -16$ olan eğrinin denklemini yazalım. Hemen $c = 4$'tür ve dışmerkezlilik tanımından $e = c/a = 4/a$ olur. Doğrultman eşitliğinden ise $-16 = -a/e$ buluruz. Bu iki eşitlikten e'yi hesaplarız: $e = 1/2$. O halde eğri bir elipstir. $N(x,y)$ elipsin bir noktasıysa, $|NO| = e|ND|$ denklemi

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-(-4))^2+(y-0)^2} &= \frac{1}{2}|x-(-16)| \\ (x+4)^2+y^2 &= \frac{1}{4}(x+16)^2 \\ 4x^2+32x+64+4y^2 &= x^2+32x+256 \\ 3x^2+4y^2 &= 192 \\ \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48} &= 1\end{aligned}$$

verir. Aslında e'yi bulduğumuz anda a'yı da bulabilirdik: $a = 8$. Oradan $b = \sqrt{a^2-c^2} = \sqrt{64-16} = \sqrt{48}$ çıkardı ve elipsin denklemini hemen yazabilirdik.

D. Kutupsal Koordinatlar

Kutupsal koordinatları kısaca hatırlayalım önce. Yukarıda düzlemdeki bir N noktasını göstermek için *Kartezyen koordinatlar* dediğimiz (x,y) gerçel sayı ikililerini kullandık. Bunlar noktanın sırayla y ve x eksenlerinden olan uzaklıkları. *Kutupsal koordinatlar*, düzlemdeki bir noktayı (r,θ) diye başka bir ikili sistemi ile gösterir. θ, pozitif x ekseninden, N'yi başnoktaya birleştiren doğru parçasına kadar olan açıdır. Saat yönünün aksi yönde gidilirse θ pozitif, saat yönünde gidilirse θ negatif olur. r ise N'nin başnoktadan uzaklığıdır; yani

$$r = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Bu tanımda r pozitiftir. Ama bazan negatif r değerleri de kullanılır; o zaman başnoktadan N yerine $-N$ yönüne gideriz. Her iki durumu içeren

$$r^2 = x^2+y^2$$

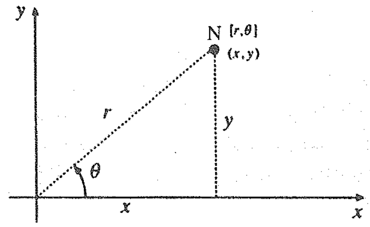
yazmak daha doğrudur. N'den x eksenine çizilen dikmenin ayağına M der, başnokta, M ve N'nin oluşturduğu dik üçgene bakarsak,

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

eşitliğini görürüz. Yukarıdaki eşitlikler, N noktasının Kartezyen koordinatlarından kutupsal koordinatlarını nasıl bulacağımızı gösterir. Aynı üçgende gene hemen göreleğimiz

$$\begin{aligned}x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta\end{aligned}$$

eşitlikleri ise N'nin kutupsal koordinatlarından Kartezyen koordinatlarına geçmek içindir. Kartezyen koordinatların başnoktası $(0,0)$, kutupsal koordinatlarda, θ ne olursa olsun, $r = 0$'a karşılık gelir. Kutupsal koordinatlarda fonksiyonları genellikle $r = f(\theta)$ şeklinde yazarız.



Şimdi çember, parabol, elips ve hiperbolün kutupsal koordinatlardaki denklemlerini bulacağız ve dördünün de bir tek denklemle ifade edilebileceğini göreceğiz. Dört eğriyi ayırdeden özellik dışmerkezlilik olacak. Dışmerkezliliğe daha önce özel önem vermemizin bir nedeni de buydu.

Önce daire dışındaki üç eğriyle ilgilenelim; çemberi sonra elipsin özel hali olarak ele alacağız. Eğrimizin dışmerkezliliğine e, başnoktada yerleşmiş odaklarından birine (parabolün tek odağına) O, buna karşılık gelen doğrultmana $x = -d$ $(d > 0)$ ve eğrinin üzerindeki bir noktaya $N(r,\theta)$ diyelim. O zaman $|NO| = r$ ve $|ND| = d + r\cos\theta$ olur. Bunları $|NO| = e|ND|$ denkleminde yerine koyarsak, önce $r = e(d + r\cos\theta)$ ve sonra bunu r için çözersek,

$$r = \frac{de}{1-e\cos\theta}$$

kutupsal koordinat denklemini elde ederiz. Eğer doğrultman $x = d$, $y = -d$ veya $y = -d$ doğrularından biri olsaydı, sırayla

$$\begin{aligned}r &= \frac{de}{1+e\cos\theta}, \\ r &= \frac{de}{1-e\sin\theta}, \\ r &= \frac{de}{1+e\sin\theta}\end{aligned}$$

denklemlerinden birini elde edecektik. Bütün bu denklemlerde eğrileri ayırdeden özellik dışmerkezliliğin $0 < e < 1$, $e = 1$ veya $e > 1$ olması.

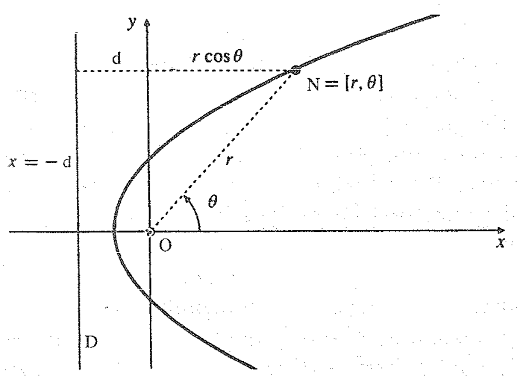
Elipste ve hiperbolde doğrultmanların ve odakların merkeze sırayla e/a ve ae uzaklıklarında olduğunu görmüştük. Şimdi merkezin değil de odağın başnoktada bulunduğunu göz önüne alırsak,

$$d = \pm\left(\frac{a}{e} - ae\right)$$

eşitliği ortaya çıkar; burada $+$ elipsi, $-$ hiperbolü verir. Bunu eğrilerin kutupsal koordinat denkleminde yerine koyduğumuzda,

$$r = \pm\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}$$

elde ederiz. $+$ işaretiyle $e = 0$ özel hali bize $r = a$ verir ki bu başnoktadan sabit a uzaklığında olmak demektir; yani başnokta merkezli ve a yarıçaplı çemberden başka bir şey değildir.



Çıkarttığımız denklemlerden, elips ve çemberi parabol ve hiperbolden ayıran bir sonuca varabiliriz. $e = 0$ iken r sabit olduğundan açıkça çember sınırlıdır. Elipste $0 < e < 1$ sağlanır ve paydadaki $1 - e\cos\theta$ (veya diğerleri) hep sıfırdan uzak durur. Dolayısıyla r sınırsız büyüyemez; yani elips de sınırlıdır. Parabol için denklem

$$r = \frac{d}{1-\cos\theta}$$

şeklindedir. θ sıfıra yaklaştıkça, $1 - \cos\theta$ da sıfıra yaklaşır ve r sınırsız büyür. $\theta = 0$ ise pozitif x eksenine karşılık gelir ve bu aynı zamanda parabolün de ekseninin bir kısmıdır. Hiperbolde $e > 1$'dir ve $\cos\theta = 1/e = a/c$ eşitliğini sağlayan

$$\theta = \pm\cos^{-1}\left(\frac{1}{e}\right) = \pm\cos^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)$$

açılarına yaklaşdıkca r gene sınırsız büyür. Bu açılar bize bir şey hatırlatmalı. Önce bir kenarı a, hipotenüsü c ve aralarındaki açı θ olan bir dik üçgen düşünelim; üçüncü kenar $\sqrt{a^2-c^2} = \pm b$ ve

$$\tan\theta = \pm\frac{b}{a}$$

olur. $\tan\theta$'nın aynı zamanda başnoktadan geçen bir doğrunun eğimi olabileceğini hatırlarsak, tekrar hiperbolün asimptotlarını bulmuş oluruz. Hiperbolün asimptotlarına yaklaşması ile merkezinden sınırsız uzaklaşması birlikte meydana gelmektedir.

İncelediğimiz eğri denkleminde doğrultman(lar) dikeydi; bu ve bir odağın başnoktada olması bilgisi eğrinin ekseninin x ekseniyle çakıştığı sonucunu doğurur. Tepe noktaları da eksen üzerindedir. Kutupsal koordinatlarda pozitif ve negatif x ekseni $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ eşitlikleriyle verilir. Eğri denkleminde bu θ değerlerini kullanarak, tepe noktalarını

$$\theta = 0, \qquad r = \frac{de}{1-e}$$
$$\theta = \pi, \qquad r = \frac{de}{1+e}$$

olarak buluruz. Parabolde yalnız ikincisi geçerlidir. Çemberde ise zaten eksen, doğrultman veya tepe noktaları tanımlamamıştık. Aslında çemberin her noktası tepe noktası olarak da görülebilir.

E. İkinci Dereceden Eğriler ve Düzlemde Döndürme

Kartezyen koordinatlara geri dönüp, iki değişkenli genel ikinci dereceden denklem dediğimiz

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

şeklindeki denklemlerin düzlemdeki grafiklerini inceleyeceğiz. Karşımıza hep tanıdık eğriler çıkacak. A, B, C'nin en az birinin sıfırdan farklı olduğunu kabul edeceğiz; aksi halde hem denklem ikinci dereceden olmaz, hem de grafik yalnızca bir doğrudan ibaret olurdu. Bu denklemde ikinci dereceden kasıt x'in ve y'nin derecelerinin toplamıdır.

Şimdiye kadar inceledeğimiz dört eğri bu tip bir denklemle ifade ediliyor dikkat edilirse. Şimdilik $B = 0$ alalım. Çemberin denklemi $A = C$ veriyor hep. Parabolün denklemi ya $A = 0$ ya da $C = 0$ ve de $D \neq 0$ veya $E \neq 0$ demek oluyor. Elipsin denklemi $A \neq C$ ve A

ile C'nin işaretlerinin farklı olmasını gerektiriyor. Merkezi olan üç eğride merkezin başnoktada olması $D = E = 0$ olmasını, başka bir noktada olması $D \neq 0$ ve/veya $E \neq 0$ olmasını sağlıyor.

Diğer özel durumlara da kısaca değinelim. $A = 1$ ve diğer katsayılar sıfırsa, $x^2 = 0$ yani $x = 0$ doğrusunu elde ederiz. $A = C = 0$, $B = D = 1$ ve $E = F = -1$ halinde elde ettiğimiz $xy + x - y - 1 = 0$ denklemini çarpanlara ayırırsak $(x-1)(y+1) = 0$ buluruz ki bunun grafiği kesişen $x = 1$ ve $y = -1$ doğrularıdır. $B = C = E = 0$, $A = 1$, $D = -3$ ve $F = 2$ durumunda çıkan $x^2 - 3x + 2 = 0$ denklemi de çarpanlara ayrılır; çıkan $(x-1)(x-2) = 0$'ın grafiği paralel $x = 1$ ve $x = 2$ doğrularıdır. $B = D = E = F = 0$ ve $A = C = 1$ ise, denklem $x^2 + y^2 = 0$'dır ve grafiği tek bir noktadır: $(0,0)$. Denklemi sağlayan hiç bir nokta olmayabilir de; örneğin $A = F = 1$ ve diğer katsayılar sıfır iken bulduğumuz $x^2 + 1 = 0$ denklemi.

Şimdi en önemli soruna gelelim. $B \neq 0$ ise (ve grafik az önceki kesişen iki doğru özel hali değilse) ne yapacağız ve grafik ne çıkacak? Cevap basit. Gene özel hallerden birini ya da çember dışındaki üç eğriden birini elde ederiz, yalnız eğrilerin ekseni hep incelediklerimizin aksine x ya da y eksenine paralel olmaz. Tersine, ekseni x ya da y eksenine paralel olmayan elips, parabol ve hiperbol, ya da ikisi birden eksenlere paralel olmayan kesişen doğrular, $B \neq 0$ olan bir denklemle ifade edilirler. Küçük bir örnek verelim. Odakları $O_1(-2,2)$ ile $O_2(2,2)$ ve a uzunluğu 2 olan hiperbolün denklemini yazalım. Merkez tabii ki başnoktadır. (x,y) hiperbol üzerinde bir nokta ise, tanımdan

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = \pm 4$$

yazarız. Bunu iki kere kareleyerek sadeleştirirsek, denklemimiz

$$xy = 2$$

haline gelir. Bu denklemi $y = 2/x$ şeklinde yazıp limit alarak

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to -\infty} y = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^+} y = +\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to 0^-} y = -\infty$$

buluruz. Bunlar bize hiperbolün asimptotlarının x exseni ($y = 0$ doğrusu) ve y ekseni ($x = 0$ doğrusu) olduğunu söyler. Hiperbolün ekseni, odakları birleştiren doğru, yani $y = x$ doğrusudur; bu doğru x ekseni ile $\pi/4$ radyanlık bir açı yapar. Ayrıca $a = 2$, $c = 2\sqrt{2}$ ve $b = 2$'dir. Bu örnek aynı zamanda bazı hiperbollerin bir fonksiyonun grafiği alabileceğini de gösteriyor.

Amacımız verilen bir ikinci derece denkleminde xy terimini ortadan kaldırıp, denklemin ne tür bir eğri verdiğini anlayabilmek. Bunun için xy koordinat sistemini $M(0,0)$ etrafında döndürmemiz gerekecek. Dönme açısının pozitif (saat yönünün aksi) yönde α olduğunu kabul edelim ve yeni koordinatlara X ve Y diyelim. α'yı dar açı almak yeter; daha büyük açılar negatif yönde dar açı almaktan farksızdır. O zaman düzlemdeki bir N noktasının iki çeşit Kartezyen koordinatı olur: $N(x,y)$ ve $N(X,Y)$. $[MN]$'nin X ekseniyle yaptığı açıya θ, N'nin x ve X eksenleri üzerindeki izdüşümlerine sırayla I_1 ve I_2 diyelim. MNI_1 ve MNI_2 üçgenlerinde biraz trigonometri yaparsak,

$$\begin{aligned} x &= |MI_1| = |MN|\cos(\theta+\alpha) \\ &= |MN|\cos\theta\cos\alpha - |MN|\sin\theta\sin\alpha \\ y &= |I_1N| = |MN|\sin(\theta+\alpha) \\ &= |MN|\sin\theta\cos\alpha + |MN|\cos\theta\sin\alpha \end{aligned}$$

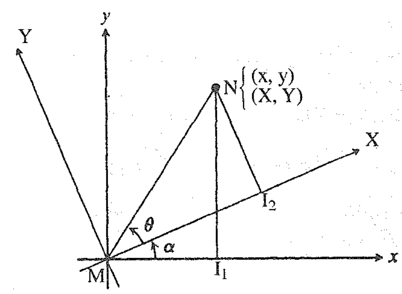
elde ederiz.

$$\begin{aligned} |MN|\cos\theta &= |MI_2| = X \\ |MN|\sin\theta &= |I_2N| = Y \end{aligned}$$

olduğuna dikkat ederek, yukarıdaki denklemler

$$\begin{aligned} x &= X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y &= X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{aligned}$$

haline gelir. Bunlar XY ve xy koordinatları arasındaki ilişkidir. Döndürmeden sonra yalnız başnoktanın koordinatları değişmez.



Şimdi genel ikinci derece denkleminde x ve y yerine yukarıdaki ifadeleri kullanarak

$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

buluruz. Yeni katsayılarla eskileri arasında aşağıdaki ilişkiler vardır:

$$\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha,\\
B' &= B\cos 2\alpha + (C-A)\sin 2\alpha,\\
C' &= A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha,\\
D' &= D\cos\alpha + E\sin\alpha,\\
E' &= -D\sin\alpha + E\cos\alpha,\\
F' &= F.
\end{aligned}$$

Eğer başladığımız x ve y cinsinden denklemde $B \neq 0$ terimi varsa, sonraki X ve Y cinsinden denklemde biz $B' = 0$ olsun istiyoruz. Bunun için α dar açısını

$$\cot 2\alpha = \frac{A-C}{B} \qquad \text{veya} \qquad \tan 2\alpha = \frac{B}{A-C}$$

olacak şekilde seçmeliyiz.

Bundan sonra kareye tamamlayarak D' ve E' terimlerini de yok edebiliriz. Hem A' hem C' sıfırdan farklıysa,

$$\begin{aligned}
&A'X^2 + D'X + C'Y^2 + E'Y = -F',\\
&A'\left(X^2 + \frac{D'}{A'}X + \frac{D'^2}{4A'^2}\right) +\\
&\qquad C'\left(Y^2 + \frac{E'}{C'}Y + \frac{E'^2}{4C'^2}\right) = \frac{D'^2}{4A'} + \frac{E'^2}{4C'} - F',\\
&\quad A'(X-h)^2 + C'(Y-k)^2 = F''
\end{aligned}$$

buluruz. Burada

$$h = -\frac{D'}{2A} \qquad \text{ve} \qquad k = -\frac{E'}{2C'}$$

demektir. $A' = 0$ veya $C' = 0$ ise sadece bir değişkende kareye tamamlarız. Sonunda elde ettiğimiz denklem yazının başından beri incelediğimiz dört eğriden birinin denklemi oldu. Hangisi olduğunu katsayılarından rahatlıkla tanırız. Sonuç olarak, iki değişkenli ikinci dereceden bir denklemin grafiği, ya bu yazının konusu olan dört eğriden biri, ya da özel durumlardan biridir.

Birkaç örnek yapalım.

$$x^2 + 4xy + y^2 - 2\sqrt{2}(x-y) = 2$$

denkleminde $A = 1$, $B = 4$, $C = 1$, $D = -2\sqrt{2}$, $E = 2\sqrt{2}$ ve $F = -2$'dir.

$$\cot 2\alpha = \frac{A-C}{B} = \frac{1-1}{4} = 0$$

formülünden

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ve} \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

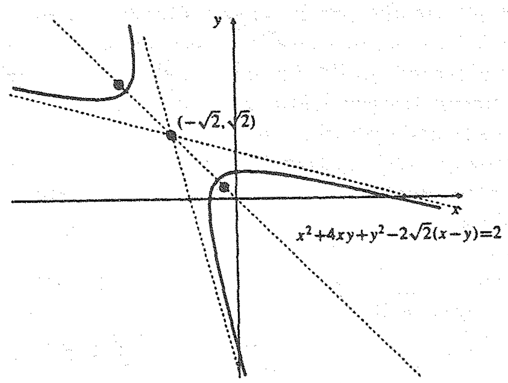
buluruz. (Aslında $2\alpha = -\pi/2$ ve $\alpha = -\pi/4$ de seçebilirdik.) O zaman $A' = 3$, $B' = 0$, $C' = -1$, $D' = 0$, $E' = 4$ ve $F' = -2$ olur ve denklemimiz XY koordinatlarında önce

$$3X^2 - Y^2 + 4Y - 2 = 0,$$

Y'de kareye tamamladıktan sonra da

$$\frac{(Y-2)^2}{2} - \frac{X^2}{2/3} = 1$$

haline gelir. Artık grafiğin, XY koordinatlarında merkezi $(0,2)$'de, tepe noktaları $(0, 2 \pm \sqrt{2})$'de, odakları $(0, 2 \pm 2\sqrt{2}/\sqrt{3})$'te, asimptotları $\sqrt{3}X \pm (Y-2) = 0$ doğruları olan ve $\pm Y$ yönünde, yani xy düzleminde sağ aşağıya ve sol yukarıya açılan bir hiperbol olduğu açıktır. xy koordinatlarında ise, örneğin, tepe noktası $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$'dedir; diğer bilgilerin de x, y değerleri x, y ve X, Y arasındaki dönüşümlerden hesaplanabilir. Dikkat edilirse x ve y içeren denklemde hem x^2'nin hem de y^2'nin işaretleri aynıydı.



$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + y = 0$$

denkleminde α'yı

$$\tan 2\alpha = \frac{B}{A-C} = \frac{-4}{1-4} = \frac{4}{3}$$

olacak şekilde seçmemiz gerekir, ama α buradan π'nin bir rasyonel katı çıkmaz. Gene de

$$\sec 2\alpha = \sqrt{1+\tan^2 2\alpha} = \frac{5}{3} \quad \text{ve} \quad \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$$

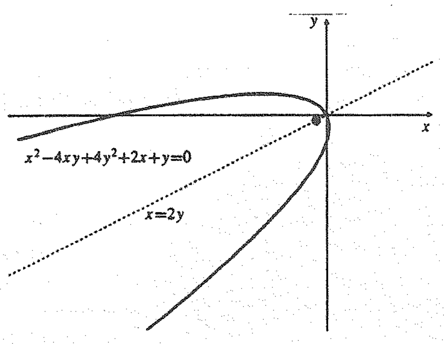
yazıp

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$
$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

değerlerini bulabiliriz. (Karekök alırken hep pozitif kökü kullandık, çünkü en baştan beri α'yı pozitif alıyoruz.) O zaman $A' = 0$, $B' = 0$, $C' = 5$, $D' = \sqrt{5}$, $E' = 0$ ve $F' = 0$ olur ve XY koordinatlarında denklem

$$\sqrt{5}X + 5Y^2 = 0 \qquad \text{veya} \qquad X = -\sqrt{5}Y^2$$

şekline girer. Bu ise XY koordinatlarında tepe noktası başnoktada, odağı $(-1/4\sqrt{5}, 0)$'da ve doğrultmanı $X = 1/4\sqrt{5}$ olan ve negatif X yönünde, yani xy düzleminde sol aşağıya doğru açılan bir paraboldür. xy koordinatlarında, örneğin, eksen $x = 2y$ doğrusudur. Halbuki xy koordinatlarındaki denklemden tepe noktasını bulmak şöyle dursun, grafiğin parabol olduğunu tahmin etmek bile güçtü.



Şimdi genel ikinci dereceden denklemin katsayılarına biraz daha yakından göz atacağız ve döndürme altında değişmeyen bazı büyüklükler bulacağız. Bu sayede verilen bir denklemin grafiğinin hangi eğri olduğunu, döndürülmüş koordinatlardaki denklemini bulma hesabını yapmadan belirleyebileceğiz. Gene çemberi elipsin bir özel durumu olarak alacağız; diğer özel durumlar da zaten diğer iki eğrinin bazı büyüklüklerinin sıfıra gitmesine ya da sınırsız büyümesine karşılık gelir.

$B = 0$ iken değişik tipte eğrilerin farklı karakterde A ve C değerleri verdiğini görmüştük. Tersine $B \neq 0$ olarak başlarsak, eksenleri döndürdükten sonra eğrimizi tanımanın yolu A' ve C' değerlerine bakmaktı. Biraz değişik biçimde özetlersek, grafik, $A'C' = 0$ ise parabol, $A'C' > 0$ ise elips, $A'C' < 0$ ise hiperboldür. Hesabı biraz uzun tutsa da eksenleri döndürme altında $B^2 - 4AC$ ifadesinin değişmezliğini kolayca görürüz; yani $B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$ olur. Biz döndürme açımızı genellikle $B' = 0$ olacak şekilde seçiyoruz. O zaman $B^2 - 4AC = -4A'C'$ olur. Az önceki $A'C'$'nün işaretiyle sınıflama yöntemimizi son eşitliğin sol tarafına uygularsak, ikinci dereceden bir denklemin grafiğinin,

(a) $B^2 - 4AC = 0$ ise bir parabol,

(b) $B^2 - 4AC < 0$ ise bir elips,

(c) $B^2 - 4AC > 0$ ise bir hiperbol

olduğu ortaya çıkar. Daha az önemli iki değişmez ifade daha vardır, $A + C$ ile $D^2 + E^2$; yani $A + C = A' + C'$ ile $D'^2 + E'^2 = D^2 + E^2$ sağlanır.

Örneğin

$$x^2 - 3xy + 3y^2 + 6y - 7 = 0$$

denkleminin grafiği bir elipstir, çünkü

$$B^2 - 4AC = (-3)^2 - 4(1)(3) = 9 - 12 = -3 < 0.$$

Uygun açıyı bulup eksenleri döndürerek grafiğini çizmeyi okuyuculara bırakıyoruz.

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 11x - 2y + 12 = 0$$

denkleminin grafiği bir hiperboldür, çünkü

$$B^2 - 4AC = (3)^2 - (4)(2)(-2) = 9 + 16 = 25 > 0.$$

Acaba? Biraz denemeden sonra verilen denklemin

$$(2x - y - 3)(x + 2y - 4) = 0$$

şeklinde çarpanlara ayrılabildiğini görürüz. Dolayısıyla grafik $y = 2x - 3$ ve $y = -x/2 + 2$ kesişen doğrularıdır. Bu doğruları, asimptotlarına indirgemniş bir hiperbol gibi düşünebiliriz. $B^2 - 4AC$ ifadesini kullanırken bunun gibi özel durumları göz ardı etmemeliyiz. Benzer biçimde

$$x^2 + y^2 + 6x + 8y + 25 = 0$$

denklemi, xy terimi eksik, $B^2 - 4AC = -4 < 0$ ve $A = C = 1$ olduğu için bir çember verir gibi görünse de,

$$(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 0$$

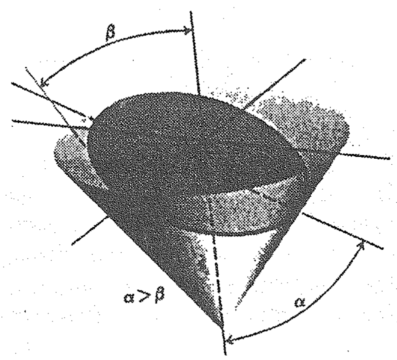
şeklinde yazılabildiğinden sadece $(-3, -4)$ noktası tarafından sağlanır; yani grafiği bir tek noktadan ibarettir; diğer bir bakış açısıyla yarıçapı sıfıra inmiş bir çemberdir.

F. Koninin Kesitleri

Geometrik açıdan en ilginç kısma geldik. Yazının başlığı da burada anlam kazanacak. Başlangıçta eğrilerimizi uzaklık formülünü kullanarak cebirsel olarak tanımladık. Daha sonra odak-doğrultman denklemini sağlayan geometrik eğrilerin cebirsel olarak tanımladığımız eğrilerle aynı şeyler olduklarına gösterdik. Şimdi geometrik yönde bir adım daha atıp bir koninin bir düzlemle kesitinin odak-doğrultman denklemini sağladığını göstereceğiz.

Çember için bir odak-doğrultman denklemimiz yok, çünkü çemberin doğrultmanı yok. Gene de eğer bir koniyi eksenine dik bir düzlemle tepe noktası dışında bir yerden kesersek bu düzlemde bir çember elde edeceğimiz kesin.

Diğer eğrilere geçmeden önce koni tanımına da açıklık getirelim. *Koni*, bir düzlemdeki bir eğriyle bu düzlem dışındaki bir noktayı birleştiren doğruların kümesi diye tanımlanır. Bildiğimiz dik koniyi elde etmek için eğriyi çember olarak ve noktayı da tam çemberin merkezinin üzerinde seçmemiz gerekir. Gene de daha fazlasını elde ederiz. Her şeyden önce koni, noktanın ve düzlemin öte tarafında da devam eder, yani uç uca dokunan iki parçadan meydana gelir. Ayrıca doğrular (doğru parçaları değil) kullandığımıza göre sınırsızdır; tabanı yoktur. Seçtiğimiz nokta koninin *tepe*si adını alır.



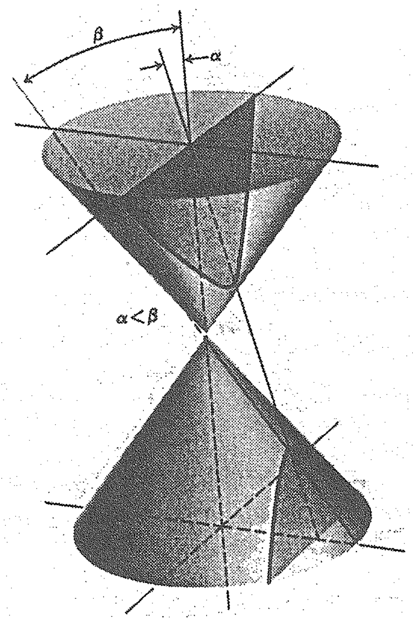
Dik koninin ekseni ile yan yüzü arasındaki dar açıyı β ile göstereceğiz. Kesit düzleminin koninin ekseni ile yaptığı dar açıya da α diyelim. O zaman kesit

(a) $\alpha = 90°$ ise bir çember,

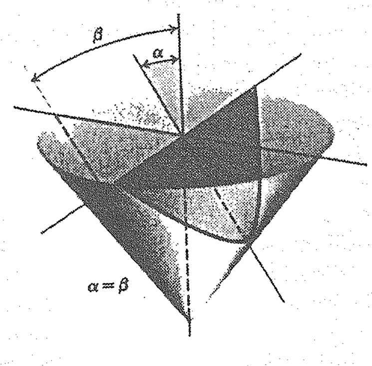
(b) $\beta < \alpha < 90°$ ise bir elips,

(c) $\alpha = \beta$ ise bir parabol,

(ç) $0 \leq \alpha < \beta$ ise bir hiperbol



olur. Kesit düzlemi koninin tepesinden geçtiğinde, iki değişkenli genel ikinci dereceden denklemlerde olduğu gibi, bu dört eğri yerine daha basit şekiller çıkar: Çember ve elips yerine bir nokta, parabol yerine bir doğru, hiperbol yerine kesişen iki doğru. Çember hakkında söylenecek yeni bir söz yok. Az sonra anlatacaklarımız $\beta < \alpha < 90°$ olduğunu kabul ediyor [1]. Fakat yöntem kalan iki durumda da aynen geçerli; sadece bazı noktaların yeri değişiyor. Bu durumları incelemeyi okuyuculara bırakıyoruz. İlk üç durumda düzlemin koninin yalnız bir parçasını, son durumda ise iki parçasını birden kestiğine dikkat edelim. Dört eğriden yalnız hiperbolün iki parçalı olmasıyla bu çok güzel uyuşuyor.

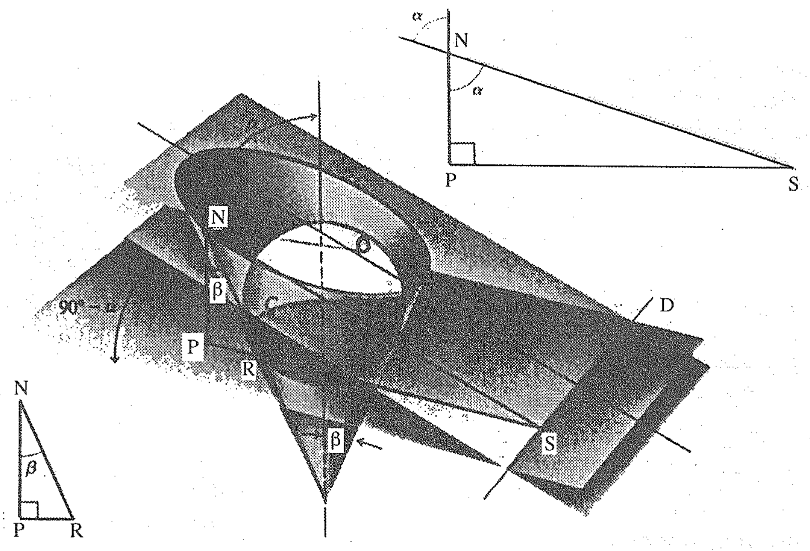


Koninin iç tarafına, koniye bir çember boyunca ve kesit düzlemine bir noktada teğet olan bir küre yerleştirelim. Aslında bu tip iki küre var; biri kesit düzlemiyle koninin tepesi arasında, diğeri kesit düzleminin öbür tarafında ama gene de koninin aynı parçasına dokunan. (Kürenin koniye bir çember boyunca değmesini istediğimizden, $\alpha = \beta$ iken yalnız bir küre vardır, $0 \leq \alpha < \beta$ iken ise iki kürenin her biri koninin birer parçasına dokunur.) Teğet çemberlerinden herhangi birine Ç, kürenin düzleme teğet olduğu noktaya O, Ç'nin düzleminin kesit düzlemini kestiği doğruya D diyelim. (Ç'nin düzlemi koninin eksenine diktir; o yüzden $\alpha = 90°$ ise D oluşmaz.) Koninin kesiti olan eğrinin bir odağının O ve buna karşılık gelen doğrultmanının D olduğunu göstereceğiz.

Kesit eğrisi üzerindeki bir nokta N olsun. N'den Ç'nin düzlemine indirilen (koninin eksenine paralel) dikmenin ayağına P diyelim. N'yi koninin tepesine birleştiren (koni üzerindeki) doğrunun Ç'yi kestiği noktaya R diyelim. N'den D'ye çizilen dikmenin ayağına da S diyelim. O zaman $[NR]$ ve $[NO]$ doğru parçaları, dışındaki aynı noktadan küreye çizilen teğetlerdir ve dolayısıyla uzunlukları aynıdır: $|NR| = |NO|$. NPR dik üçgeninden $|NP| = |NR| \cos\beta$, NPS dik üçgeninden de $|NP| = |NS| \cos\alpha$ yazabiliriz. $|NS|$ ise N'nin D'ye olan uzaklığıdır. $|NP|$'leri birbirine eşitleyerek

$$
\begin{aligned}
|NR| \cos\beta &= |NS| \cos\alpha \\
|NO| \cos\beta &= |ND| \cos\alpha \\
|NO| &= \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} |ND| \\
|NO| &= e|ND|
\end{aligned}
$$

buluruz. Başta $\beta < \alpha < 90°$ kabul ettiğimizden, $0 < \cos\alpha < \cos\beta$ ve böylece $0 < e < 1$ sağlanır. Dolayısıyla kesit eğrisi, O odaklı ve D doğrultmanlı bir elipstir. $\alpha = \beta$ olsaydı $e = 1$, $0 \leq \alpha < \beta$ olsaydı $e > 1$ çıkacaktı ve eğriler sırayla parabol ve hiperbol olacaklardı.



Bu yazıda anlatılan konuların pek çoğu Antalya'nın çok yakınındaki Perge'de doğmuş olan Apoloniyus (İ.Ö. 262–190) tarafından geliştirilmiştir. Apoloniyus gençliğinde o zamanların en büyük bilim merkezi olan İskenderiye'ye gitmiş ve orada kalmıştır. Yazdığı eserlerden en önemlisi olan *Koninin Kesitleri*, bu konudaki o zamana dek bilinen ve kendisinin bulduğu sonuçları içerir. Türkiye'deki en iyi korunmuş birkaç antik şehirden biri olan Perge'yi ziyaret etmek için bir neden daha işte.

KAYNAKÇA

[1] G. B. Thomas & R. L. Finney, *Calculus and Analytic Geometry*, 1. cilt, 8. baskı, Literatür, İstanbul, 1994.