

BİNOM KATSAYILARININ BAZI ÖZELLİKLERİ

Emre Alkan

Boğaziçi Üniversitesi,
Matematik Bölümü, İstanbul

$0 \leq k \leq n$ olmak üzere $\binom{n}{k}$ şeklinde, n elemanlı bir kümenin, k elemanlı altkümelerinin sayısını veren ifadeler binom katsayıları diyeceğiz. Bunun nedeni $\binom{n}{k}$ sayılarının $(x+y)^n$ açılımında katsayılar olarak görünmesi. Şimdi bu katsayıların bazı özelliklerini gösterelim.

$$1. \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

$\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$ kümesinin k elemanlı altkümelerinin sayısı $\binom{n+1}{k}$ dir. Her k elemanlı altkümeye a_{n+1} bulunur veya bulunmaz.

a_{n+1} 'in bulunmadığı bu tür kümeler $\binom{n}{k}$ tanedir. a_{n+1} bulunuyorsa geriye $k-1$ eleman kalır ki bunların sayısı $\binom{n}{k-1}$ 'dir. Böylece istenen elde edilir.

$$2. \binom{M+N}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{M}{i} \binom{N}{k-i}.$$

Katsayıların biçimi sayma hakkında bir fikir veriyor. Sol taraf $M+N$ elemanlı bir kümenin k elemanlı altkümelerinin sayısıdır. Şimdi $M+N$ elemanı M ve N elemanlı iki ayrı kümeyle bölelim. k eleman seçmek için M elemanlı kümeden hiç almaz, N elemanlı kümeden k tane alırız. Bu $\binom{M}{0} \binom{N}{k}$ sayısıdır. M elemanlı kümeden bir eleman alır, N elemanlı kümeden $k-1$ tane alırız. Bu $\binom{M}{1} \binom{N}{k-1}$ sayısıdır. Böylece devam edildiğinde sağdaki ifadenin elde edildiği görülebilir. Bir başka yaklaşım şöyle yapılabilir. $\binom{M+N}{k}$ sayısı $(x+y)^{M+N}$ açılımında $x^k y^{M+N-k}$ 'nin katsayısıdır. $(x+y)^{M+N} = (x+y)^M (x+y)^N$ yazalım. x^k elde edebilmek için $(x+y)^M$ 'den x^0 , $(x+y)^N$ 'den x^k , $(x+y)^M$ 'den x^1 , $(x+y)^N$ 'den x^{k-1} ve diğerleri gözönüne alınırsa sağdaki toplam elde edilebilir.

$$3. \binom{n}{r} + \binom{n+1}{r} + \dots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Bu eşitlik de (1) 'in ardışık uygulanmasıyla elde edilir. Şöyle ki:

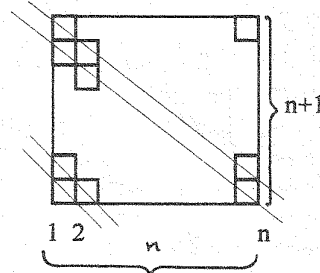
$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r}, \text{ sonra}$$

$$\binom{n}{r+1} = \binom{n-1}{r+1} + \binom{n-1}{r} \text{ v.s.}$$

$$4. 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bunun için $1 = \binom{1}{1}$, $2 = \binom{2}{1}$, \dots , $n = \binom{n}{1}$ ve (3) kullanılırsa $1 + 2 + \dots + n = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ elde edilir.

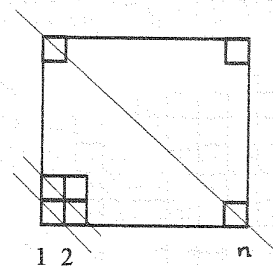
Bu eşitliği daha zarif bir şekilde şöyle gösterebiliriz. $n \times (n+1)$ lik bir satranç tahtası ele alalım. Toplam $n(n+1)$ tane kare var.



1 doğrusu üzerinde 1 kare, 2 doğrusu üzerinde 2 kare, n doğrusu üzerinde n kare var. Fakat aynı sayma karşı köşeden başlayarak yapılabileceğinden, $2(1 + 2 + \dots + n) = n(n+1)$ elde ederiz.

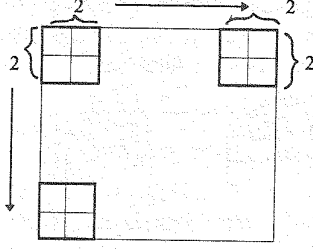
$$5. 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$n \times n$ lik bir satranç tahtasını ele alalım. Bu tahta üzerinde kenar uzunlukları 1 birimden, n birime kadar değişen karelerin sayısını bulalım. Kenar uzunluğu 1 birim olan n^2 tane kare var. Kenar uzunluğu 2 birim olan karelere bakalım. Şekil 2 'de görüldüğü gibi köşedeki 4 birimlik kare sağa doğru $n-1$ ve aşağıya $n-1$ tane 4 birimlik kare verir. Böylece $(n-1)^2$ tane 4 birimlik kare oluşturur. Böylece devam edilerek kenar uzunlukları 1 birimden n birime kadar değişen karelerin sayısı $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ olur.



Şekil 1

Şekil 1'e bakalım. 1. köşegen üzerinde 2 siyah nokta var. Böylece n . köşegen üzerinde $n+1$ siyah nokta var. Aynı bir köşegen üzerinde herhangi iki siyah nokta seçmek bir kare oluşturmak demektir.



Şekil 2

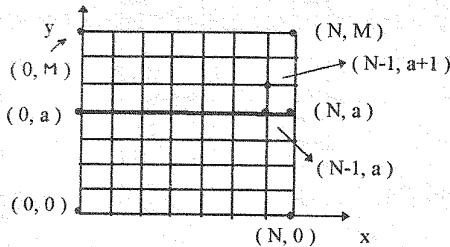
Böylece 1 birimden n birime kadar karelerin sayısı, n . köşegen bir defa sayılarak

$$2 \left\{ \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n+1}{2} \right\} - \binom{n+1}{2}$$

olur. (3) kullanılırsa bu sayı $2 \binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{2}$ olur. Bu sayının $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ olduğu görülebilir.

6. M ve N pozitif tamsayılar olsun. $a + 1 \leq M$ olacak şekilde bir a pozitif tamsayısı için $\sum_{k=0}^N \binom{N+a-k}{a} \binom{M-a-1+k}{k}$ ifadesi a 'dan bağımsızdır. İfadenin $\binom{M+N}{N}$ 'e eşit olduğunu görelim. Şekil 3'de $(0,0)$ noktasından (N,M) 'ye giden, her defasında koordinatlardan yalnızca birini bir arttıran yolların sayısı $\binom{M+N}{N}$ dir. Şimdi bu yolları farklı şekilde sayalım.

$$S = \{(N, a), (N-1, a), \dots, (0, a)\}$$



Şekil 3

kümesini ele alalım. $(0,0)$ 'dan (N,M) 'ye giden her yol S 'den geçer. (N,a) 'dan geçen yolların sayısı $\binom{N+a}{a} \cdot \binom{M-a-1}{0}$ olur. $(N-1,a)$ 'dan geçen yolları sayarken (N,a) 'dan geçemeyiz, çünkü oradan geçen yolları saydık, böylece $(N-1, a+1)$ 'e geliriz. Böylece bu sayı $\binom{N+a-1}{a} \binom{M-a}{1}$ olur. Aynı sayımı $(N-2, a), \dots, (0, a)$ için yaparız. Bunların toplamı ise tüm yolları, yani $\binom{M+N}{N}$ 'yi verecektir.

Çok benzer bir fikrin kullanıldığı bir diğer sonucu göstermeye çalışalım:

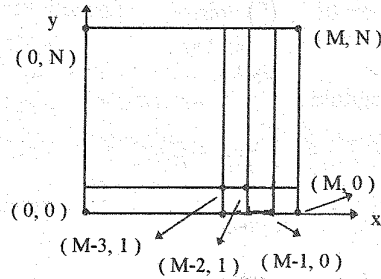
7. M, N pozitif tamsayılar olsun.

$$\binom{M+N}{N} = \sum_{0 \leq a \leq \frac{M-1}{2}} \binom{M-a-1}{a} \binom{N+a}{2a+1} + \sum_{0 \leq a \leq \frac{M}{2}} \binom{M-a}{a} \binom{N+a}{2a}$$

Bir önceki sonuçtan farklı olarak

$$S = \{(M, 0), (M-1, 0), (M-2, 1), \dots, (M-2a, a), (M-2a-1, a), \dots\}$$

kümesini ele alalım. $(0,0)$ 'dan (M,N) 'ye giden her yol S 'den geçecektir. $(M-2a, a)$ 'dan geçen yolların sayısı $\binom{M-a}{a} \binom{N+a}{2a}$ olur. $(M-2a-1, a)$ 'dan geçen yolların sayısını bulurken $(M-2a, a)$ 'yı kullanamayız. $(M-2a-1, a+1)$ 'e geliriz. Böylece yolların sayısı $\binom{M-a-1}{a} \binom{N+a}{2a+1}$ olacaktır. Sonuçta sağ taraftaki toplam elde edilecektir.



Şekil 4

8. $\sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n \binom{n}{i} \binom{i}{j}$ sadece n 'ye bağlı bir ifade olarak yazılabilir. İfade

$$\binom{n}{0} \binom{0}{0} + \binom{n}{1} \left\{ \binom{1}{0} + \binom{1}{1} \right\} + \binom{n}{2} \left\{ \binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \right\} + \dots + \binom{n}{n} \left\{ \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n} \right\}$$

olarak yazılabilir. Bu ise $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = (1+2)^n = 3^n$ demektir.

9. $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$ ifadesini bulalım. $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$ olduğu görülebilir. Böylece ifade $n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n 2^{n-1}$ olur.

Aynı düşüncüyü kullanarak,

10. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$ elde edilir.

Binom katsayılarının sayılar teorisinde de önemli kullanışları vardır.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}$$

doğal olarak bir tamsayı olduğundan buradan şu önemli sonucu çıkarabiliriz. Ardışık k tamsayının çarpımı $k!$ ile bölünebilir.

11. $\binom{2n}{n}$ sayısı $n+1$ 'e bölünebilir.

a, b aralarında asal pozitif sayılar olsun. Bir p sayısı için ap ve bp tamsayı oluyorsa p tamsayı olmalıdır. Bunu görmek için $ap = x$, $bp = y$ alalım. Böylece $ay = bx$, a ve b aralarında asal olduğundan $a|x$ ve $b|y$, ve p bir tamsayı olmalıdır. Şimdi a, b aralarında asal olmak üzere ve $a+b = n+1$ için $p = \frac{n!}{a!b!}$ ifadesine bakalım. $ap = \binom{n}{b}$ ve $bp = \binom{n}{a}$ olmak üzere tamsayılardır. Böylece $p = \frac{n!}{a!b!}$ bir tamsayı olmalıdır. Şimdi özel olarak $a = n$ ve $b = n+1$ alalım. Şu halde,

$$\frac{(2n!)}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

bir tamsayıdır. Böylece $(n+1) | \binom{2n}{n}$ elde ederiz.

Binom katsayılarını içeren çok güzel bir sonuçla devam edelim:

12. p bir asal sayı olsun. $0 \leq a_j \leq p-1$ ve

$0 \leq b_j \leq p-1$ olmak üzere

$$m = \sum_{j=0}^r a_j p^j, \quad n = \sum_{j=0}^r b_j p^j$$

ise

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{j=0}^r \binom{a_j}{b_j} \pmod{p}$$

a_j ve b_j katsayıları m ve n 'nin p tabanına göre yazılışında ortaya çıkan sayılardır. m ve n 'nin p tabanında tek türlü ifade edilebildiğini biliyoruz. $r = 2$ için bir kanıt yapacağız. Genel hal benzer biçimde yapılabilir. $m = a_0 + a_1 p$, $n = b_0 + b_1 p$, $\binom{m}{n}$ sayısı $(1+x)^m$ açılımında x^n 'in katsayısıdır. $(1+x)^m \equiv (1+x)^{a_0} ((1+x)^p)^{a_1} \pmod{p}$ yazılabilir. Şimdi $1 \leq k \leq p-1$ için $\binom{p}{k}$ sayısının p ile bölündüğünü görelim.

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1) \dots (p-k+1)}{k!}$$

ifadesinde $p, k!$ sayıları aralarında asal olduğundan $p | \binom{p}{k}$ elde ederiz. Böylece,

$$(1+x)^p \equiv 1 + x^p \pmod{p}$$

olur:

$$(1+x)^m \equiv (1+x)^{a_0} (1+x^p)^{a_1} \pmod{p}.$$

İki polinomun $(\text{mod } p)$ 'de özdeş olması, katsayılarının $(\text{mod } p)$ 'de denk olmasıdır. Şimdi x^n nin her iki tarafta katsayılarına bakalım. Sol tarafta, x^n nin katsayısı $\binom{m}{n}$ dir. Sağ tarafta x^n nin katsayısı $(1+x)^{a_0}$ in açılımındaki x^{b_0} in katsayısı ve $(1+x^p)^{a_1}$ in açılımındaki $x^{p b_1}$ in katsayısının çarpımı, yani $\binom{a_0}{b_0} \binom{a_1}{b_1}$ dir. Sonuçta,

$$\binom{m}{n} \equiv \binom{a_0}{b_0} \binom{a_1}{b_1} \pmod{p}$$

elde ederiz.

13. $\binom{n-1}{1}, \binom{n-2}{2}, \binom{n-3}{3}, \dots$ sayılarının en büyük ortak böleni bir olacak şekilde sonsuz sayıda n tek sayısı vardır. Örneğin, $n = 5$ için $\binom{4}{1}, \binom{3}{2}$ aralarında asal, $n = 11$ için $\binom{10}{1}, \binom{9}{2}, \binom{8}{3}, \binom{7}{4}, \binom{6}{5}$ sayılarının en büyük ortak böleni birdir. $n = 2m-1$ alalım. $3|m$ olduğunda,

$$\binom{2m-2}{1} - \binom{2m-3}{2} + \binom{2m-4}{3} - \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1}$$

toplamını bulalım. Bu sayı,

$$-\{x^{2m-4}(1-x)^{2m-2} + x^{2m-5}(1-x)^{2m-3} + \dots + x^{m-2}(1-x)^m + \dots + x(1-x)^3 + (1-x)^2\}$$

ifadesinde x^{2m-3} 'ün katsayısıdır. Bir an için ifadenin başındaki negatifliği unutalım ve parantez içindeki polinoma $P(x)$ diyelim. Bu polinomu dönüştürerek,

$$P(x) = \frac{1+x}{1+x^3}(1-x)^2$$

$$-\frac{1+x}{1+x^3}(1-x)^2 x^{2m-3}(1-x)^{2m-3}$$

ve

$$\frac{1+x}{1+x^3} = (1+x)(1-x^3+x^6-x^9+\dots)$$

olduğunu kullanarak,

$$P(x) = (1+x)(1-x)^2(1-x^3+x^6-x^9+\dots) -$$

$$(1+x)(1-x)^2 x^{2m-3}(1-x)^{2m-3} \text{ olur.}$$

$3|m$ olduğunda 1. ifadede x^{2m-3} 'ün katsayısı 0 'dir. 2. ifadede ise -1 olur. Böylece x^{2m-3} 'ün $P(x)$ 'te katsayısı -1 'dir. Şu halde x^{2m-3} 'ün $-P(x)$ 'te katsayısı 1 'dir. Böylece $n = 6k - 1$ şeklinde bir sayı için $\binom{n-1}{1}$, $\binom{n-2}{2}$, ... sayılarının en büyük ortak böleni 1 'dir.

14. $n \geq k$ olmak üzere,

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \dots, \binom{n+k}{k}$$

sayılarının en büyük ortak böleni 1 'dir. d bu sayıların bir ortak böleni olsun. (1) kullanılarak,

$$d \mid \binom{n}{k-1}, d \mid \binom{n+1}{k-1}, \dots, d \mid \binom{n+k-1}{k-1},$$

yine (1) kullanılarak,

$$d \mid \binom{n}{k-2}, d \mid \binom{n+1}{k-2}, \dots, d \mid \binom{n+k-2}{k-2}$$

ve böylece devam edilerek (sayıların sayısı azalıyor) $d \mid \binom{n}{0} = 1$ elde ederiz.

$$15. \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i}{k} = (-1)^k$$

Eşitliği tümevarımla göstereyim. $n = 0$ için,

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{i}{k} = (-1)^k \binom{k}{k} \binom{k}{k} = (-1)^k$$

olur. Tümevarımı tamamlamak için,

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i}{k} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i+1}{k}$$

olduğunu görmeliyiz. Bu ise,

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i}{k-1} = 0$$

eşitliğine denktir. Bunu tümevarımla görmek için $n = 0$ halinin doğru olduğunu görebiliriz. Ayrıca,

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i}{k-1} = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i+1}{k-1}$$

olduğunu görmeliyiz. Bu ise,

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i}{k-2} = 0$$

eşitliğine denktir. Bu $n = 0$ için doğrudur. Kolayca görüleceği gibi bir tümevarımlar dizisi elde ettik. Bu dizide bir tümevarımın doğruluğu ondan bir sonra gelen tümevarıma bağlıdır. Böylece en baştaki tümevarımı tamamlamak için şunları göstermeliyiz. $j = 1, 2, \dots, k$ için

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{i}{k-j} = 0 \text{ (tümevarımda } n = 0 \text{ hal-}$$

lerinin kontrolü) ve

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i}{0} = 0 \text{ (son tümevarım için); ikinci}$$

eşitlik $\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} = (1-1)^k = 0$ olarak hemen görülüyor. Birinci eşitlik için

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \binom{i}{k-j} = \frac{k}{k-j} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k-1}{i-1} \binom{i-1}{k-j-1}$$

$$= \frac{k(k-1)}{(k-j)(k-j-1)} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k-2}{i-2} \binom{i-2}{k-j-2} = \dots,$$

en sonunda $\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k-i}{0} \binom{0}{k-i-j} = 0$ elde edilir.

Böylece birinci eşitlik de doğrudur; tümevarım tamamlanır. Bu sonucun (14) 'e bir diğer çözüm teşkil ettiği de görülebilir.

Binom katsayılarının, Fibonacci sayılarıyla ilgisine değinelim:

16. F_n , n . Fibonacci sayısı ise, $n \geq 2$ için,

$$F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-4}{3} + \dots +$$

$+\binom{n-j}{j-1}$ olur. (j , $2x \leq n+1$ eşitsizliğini sağlayan en büyük tamsayıdır.)

Okuyucu bunu $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ olduğunu kullanarak tümevarımla gösterebilir.

17. Bir n tamsayısı için, $f(n)$, $1, 2, \dots, n$ sayılarının en küçük ortak katını, $g(n)$ ise, $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n}$ sayılarının en küçük ortak katını gösteriyorsa, $g(n) \leq f(n)$ dir.

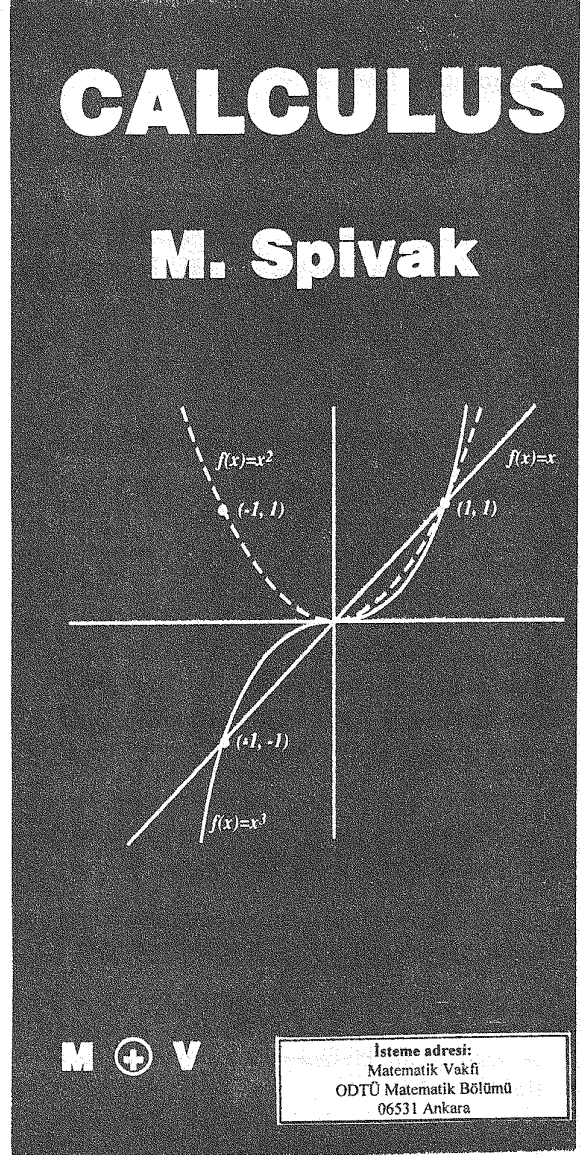
$$2 \binom{n+1}{2} = (n+1) \binom{n}{1}$$

$$3 \binom{n+1}{3} = (n+1) \binom{n}{2}$$

\vdots

$$(n+1) \binom{n+1}{n+1} = (n+1) \binom{n}{n}$$

eşitliklerinden hemen $f(n+1)|(n+1)g(n)$ elde ederiz. $(n+1)g(n)|f(n+1)$ olduğunu görelim. Bunun için bir $1 \leq k \leq n$ sayısı alıp $(n+1) \binom{n}{k}|f(n+1)$ ya da $(n+1)n(n-1)\dots(n-k+1)|k!f(n+1)$ olduğunu göstermeliyiz. Üst taraftaki sayıların her biri ayrı ayrı $f(n+1)$ 'i böler. Bu sayıların herhangi ikisinin en büyük ortak böleni en fazla k olabilir. Bir $p \leq k$ sayısı alalım. p ile bölünen sayılar bir aritmetik dizi oluşturacaktır. Böyle her p için $p|k!$ olduğundan ortak bölenlerin çarpımı $k!$ 'i böler. $(n+1), n, \dots, (n-k+1)$ sayıları herhangi ikisi aralarında asal a_{k+1}, a_k, \dots, a_1 sayıları haline gelirler. $a_{k+1} \cdot a_k \cdot \dots \cdot a_1 | f(n+1)$ olduğu açıktır. Sonuç olarak $f(n+1) = (n+1)g(n)$ buluruz. $f(n+1) \leq (n+1)f(n)$ olduğundan $g(n) \leq f(n)$ elde edilir.



CALCULUS