## PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

---

## ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

**A151.** Bir $ABC$ üçgeninin kenarortayları $AA_0$ , $BB_0$ , $CC_0$ ve yükseklikleri de $AA_1$ , $BB_1$ , $CC_1$ dir. Bu durumda, $A_0B_1C_0A_1B_0C_1A_0-$ kapalı çokgeninin (poligonunun) çevre uzunluğunun $ABC$ üçgeninin çevresinin uzunluğuna eşit olduğunu ispat ediniz.

**A152.** $\frac{2499}{10000} < \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ eşitsizliğini gerçekleyen en küçük $n$ doğal sayısı nedir?

**A153.** Bir dörtyüzlünün (tetrahedron) ayrıtlarından, her ayrıt bir kez kullanılarak, iki tane üçgen yapılabileceğini kanıtlayınız.

**A154.** $m$ bir doğal sayı olmak üzere

$$\int \frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+m)}$$

integralini hesaplayınız.

**A155.** $z = \sum_{k=0}^{999} \frac{(1+i)^{2k}}{2^k} = \frac{(1+i)^2}{2} + \frac{(1+i)^4}{2^2} + \frac{(1+i)^6}{2^3} + \cdots + \frac{(1+i)^{1998}}{2^{999}}$ karmaşık sayısının esas argümentini bulunuz.

## YARIŞMA PROBLEMLERİ

**Y151.** Bir $ABCD$ dikdörtgeninin içinde rasgele bir $P$ noktası alınıyor. $P$ noktasından dikdörtgenin kenarlarına paralel doğrular çizilerek dikdörtgen 4 küçük dikdörtgene ayrılıyor. $A$ ve $C$' yi köşe kabul eden küçük dörtgenlerden en az birinin alanının $ABCD$ nin alanının $\frac{1}{4}$ ünden daha büyük olamayacağını gösteriniz.

**Y152.** Tüm terimleri $[0,1]$ aralığında bulunan öyle bir ıraksak $\{a_n\}$ reel sayı dizisi tanımlayınız ki, $\lim_{n\to\infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$ olsun.

**Y153.** $0 < a < 1$ olsun. Her $x$ gerçel sayısı için

$$f(x) + f(ax) = x$$

denklemini sağlayan $f$ sürekli fonksiyonunu bulunuz.

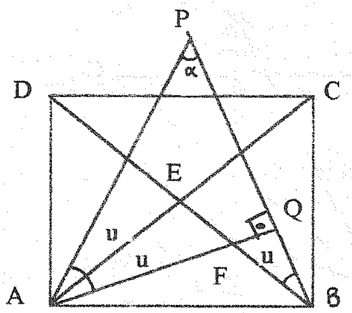
**Y154.** Öyle bir üçgen bulunuz ki, tam 1997 tane eşit üçgene bölünebilsin.

**Y155.** $x^2 + y$ ve $y^2 + x$ her ikisi de tam kare olacak biçimde $x$ ve $y$ pozitif tamsayıları var mıdır?

## ÇÖZÜMLER

**A141.** Bir $ABCD$ karesinin $A$ ve $B$ köşeleri merkez alınarak $|AC|$ yarıçaplı iki çember çiziliyor. Çemberlerin $AB$ doğrusuna göre $D$ ve $C$ ile aynı tarafta bulunan kesişme noktası $P$ olmak üzere, $A$ 'dan $BP$ doğrusuna $AQ$ dikmesi çiziliyor. $P\hat{A}C = Q\hat{A}C$ olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm 1.** Karenin köşegenleri $E$ noktasında kesişsin. Bu durumda,




$$m(P\hat{A}E) = m(P\hat{B}E) = u$$

ve

$$m(A\hat{P}B) = \alpha$$

olmak üzere, $2u + \alpha = m(A\hat{E}B) = 90°$ dir. $AQ$ doğrusu $DB$ doğrusunu $F$ 'de kesmişse, $m(A\hat{F}E) = 90° - u$ olur. Buradan

$m(E\hat{A}F) = u$ bulunur ve $P\hat{A}C = Q\hat{A}C$ elde edilir.

**Çözüm 2.** Şekilde, $\overset{\triangle}{PAB}$ ikizkenar üçgen, $[PR]$ onun $AB$ kenarına ait yüksekliğidir. $[PR]$ aynı zamanda açıortay olduğundan

$$A\hat{P}R = B\hat{P}R \qquad (1)$$

dir. Kolları birbirine dik açılar olarak

$$B\hat{P}R = B\hat{A}Q \qquad (2)$$

dur. Diğer yandan,

$$A\hat{P}R = D\hat{A}P \qquad (3)$$

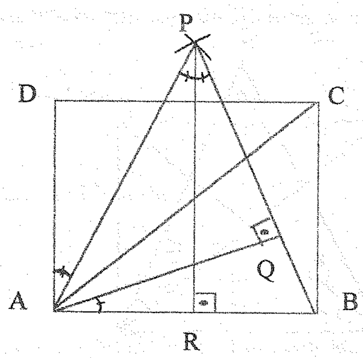
dir(içters açılar). (1), (2) ve (3) ten

$$D\hat{A}P = B\hat{A}Q$$

ve buradan

$$P\hat{A}C = Q\hat{A}C$$

olduğu görülür.




(**Çözenler:** *Ali Akın, Alper Çay, Atasagun Baykal, Cemal Özboğa, Erol Ünal, Mustafa Dönmez* )

**A142.** Bir $ABC$ üçgeninde $[BC]$ ve $[CA]$ üzerinde sırasıyla alınan noktalar $D$, $E$ ve $DE//AB$ olmak üzere $BE$ doğrusunun $AD$ doğrusunu kestiği nokta $F$ ise, $CF$ doğrusunun $[AB]$ 'nın orta noktasından geçtiğini kanıtlayınız.

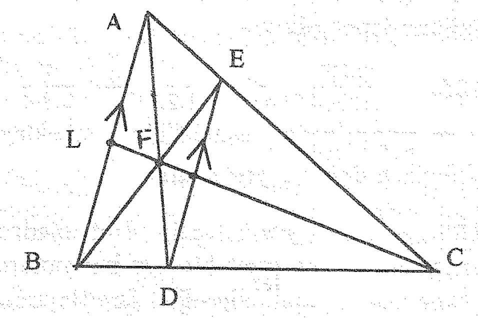
**Çözüm.** $CF$ nin $AB$ yi kestiği nokta $L$ olsun. Ceva Teoreminden,

$$\frac{|AL|}{|LB|}\cdot\frac{|BD|}{|DC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|} = 1$$

ve $DE//AB$ koşulundan

$$\frac{|AL|}{|LB|}\cdot\frac{|AE|}{|EC|}\cdot\frac{|CE|}{|EA|} = 1$$

bulunur. Buradan $|AL| = |LB|$ elde edilir.




(**Çözenler:** *Ali Akın, Alper Çay, Atasagun Baykal, Cemal Özboğa, Erol Ünal, Mustafa Dönmez*)

**A143.** Bir $ABC$ üçgeninde $B$ ve $C$ açılarının iç ve dış açıortayları çizilerek $A$ noktasından bu açıortaylara dikmeler indiriliyor. Bu dört dikme ayağının aynı doğru üzerinde olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm.** $ABC$ üçgeninin $\hat{B}$ açısının iç ve dış açıortaylarına $A$ noktasından indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla $E, D$ ve $\hat{C}$ açısı için de bu dikme ayakları $F, G$ olsun. $BE$ ile $BD$ ve $CF$ ile $CG$ birbirlerine dik olduğundan, $ADBE$ ve $AFCG$ birer dikdörtgendir. Dikdörtgende köşegenler birbirini ortaladığından $DE$, $[AB]$ 'nin ve $FG$, $[AC]$ 'nin orta noktasından geçer ve ikisi de $BC$ doğrusuna paralel olur, dolayısıyla çakışırlar.

(**Çözenler:** *Atasagun Baykal, Erol Ünal, Mustafa Dönmez* )

**A144.** $x, y, a, b > 0$ için

$$\left(\frac{ax+by}{y}\right)^2 + \left(\frac{ay+bx}{x}\right)^2 \geq 2(a+b)^2$$

eşitsizliğini gösteriniz.

**Çözüm.** $I = \left(\frac{ax+by}{y}\right)^2 + \left(\frac{ay+bx}{x}\right)^2 = (a^2+b^2)(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2})+2ab(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})$ tir. Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğinden her $t > 0$ için $t + \frac{1}{t} \geq 2$ olduğundan ($t = \frac{x^2}{y^2}$ ve $t = \frac{x}{y}$ alarak)

$$I \geq 2(a^2 + b^2 + 2ab) = 2(a+b)^2$$

bulunur. Eşitlik ancak $t = 1$, yani $x = y$ iken vardır.

(**Çözenler:** *Ali Akın, Alper Çay, Atasagun Baykal, Cemal Özboğa, Mustafa Dönmez* )

**A145.** (Soru dergide yanlış basılmış; doğrusu) $n$ pozitif bir tamsayı olsun.

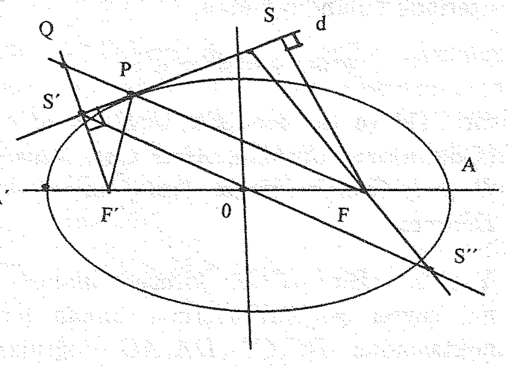
$$n! < p < n! + n + 1$$

koşulunu sağlayan kaç $p$ asal sayısı olabilir?

**Çözüm.** $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ için $p = n! + k$ şeklindedir, yani $k$ ile bölünür. O halde $k \geq 2$ iken $n! + k$ sayıları asal değildir; istenen koşulu sağlayan en çok bir ($p = n! + 1$) asal sayısı olabilir. ($n! + 1$ sayısı $n$ ye göre asal olabilir veya olmayabilir; örneğin $7 = 3! + 1$ ve $25 = 4! + 1$).

**Y141.** Odakları $F, F'$ olan $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$ elipsinin herhangi bir teğeti $d$ doğrusu olmak üzere $F$ ve $F'$ noktalarının $d$ üzerindeki dik izdüşümleri sırasıyla $S$ ve $S'$ ise $|FS|.|F'S'| = b^2$ olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm 1.** Büyük eksen uzunluğu $2a$, küçük eksen uzunluğu $2b$ dir. $d$ teğetinin değme noktası $P$ olmak üzere, $F\hat{P}S = F'\hat{P}S'$ dir. $FP$ doğrusu $F'S'$ doğrusunu $Q$ noktasında kesmişse $|QS'| = |S'F'|$, $Q\hat{P}S' = F'\hat{P}S'$ olur. Buradan, $|F'P| = |PQ|$, $|FP| + |PQ| = |FP| + |PF'| = 2a$ ve $|OS'| = a$ bulunur. Yani $S'$ ve $S$ noktaları elipsin asal çemberi üzerindedir. $S'$ noktasının $O$ noktasına göre simetriği olan $S''$ bu çember üzerindedir; $|S'F'| = |FS''|$ dür.



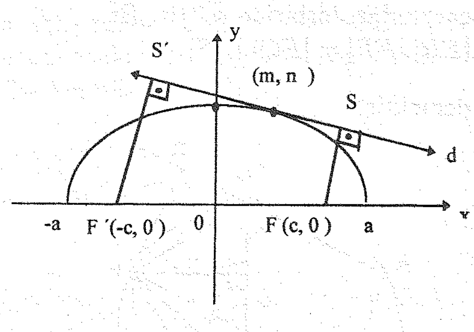

$|FS|.|F'S'| = |FS''|.|FS| = |A'F|.|AF| = (|A'O| + |OF|)(|AO| - |OF|) = |AO|^2 - |OF|^2 = b^2$ den $|FS|.|F'S'| = b^2$ bulunur.

**Çözüm 2.** Elipsin $(m, n)$ noktasındaki $d$ teğetinin denklemi

$$\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} = 1,$$

$$mb^2x + na^2y - a^2b^2 = 0$$

dır.




Bir noktadan bir doğruya olan uzaklık formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned} |FS| &= \frac{|mb^2c-a^2b^2|}{\sqrt{m^2b^4+n^2a^4}} \\ |F'S'| &= \frac{|-mb^2c-a^2b^2|}{\sqrt{m^2b^4+n^2a^4}} \end{aligned} \qquad (1)$$

elde ederiz. Ayrıca, $(m,n)$ noktası elips üzerinde bulunduğundan,

$$b^2m^2 + a^2n^2 = a^2b^2 \qquad (2)$$

dir. (1) ve (2) den $|FS|.|F'S'| = b^2$ olur. (**Çözenler:** *Ali Akın, Alper Çay, Atasagun Baykal, Cemal Özboğa, Erol Ünal, Mustafa Dönmez*)

**Y.142.** Bir $ABCD$ kirişler dikdörtgeninin çevrel çemberi üzerinde alınan bir $E$ noktasından $BC, CD, DA, AB$ doğrularına sırasıyla $EP, EQ, ER, ES$ dikmeleri indiriliyor. $|EP|.|ER| = |EQ|.|ES|$ olduğunu kanıtlayınız.

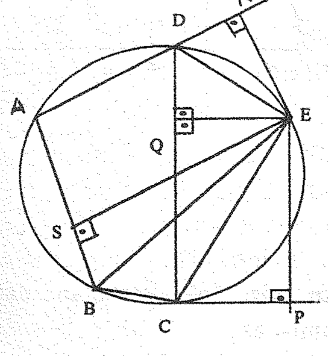
**Çözüm 1.** Bir $ABC$ üçgeninde, $a, b, c$ kenar uzunlukları; $h, a$ kenarına ait yükseklik ve çevrel yarıçap $g$ ise $2gh = bc$ dir. Bundan yararlanarak;

$$\begin{aligned} 2g|ER| &= |EA|.|ED| \\ 2g|EP| &= |EB|.|EC| \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} 2g|EQ| &= |ED|.|EC| \\ 2g|ES| &= |EA|.|EB| \end{aligned} \qquad (2)$$

(1) ve (2) eşitliklerinde ikinci tarafların çarpımları birbirine eşittir. Bu
$|ER|.|EP| = |EQ|.|ES|$

demektir.



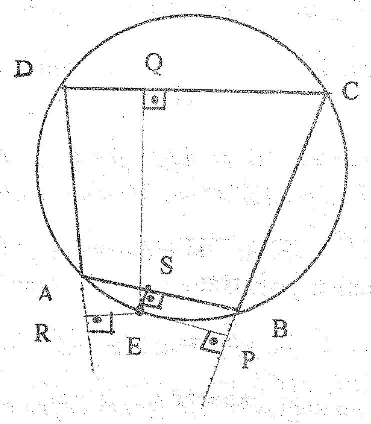

**Çözüm 2.** $m\,(\widehat{ABE}) = m\,(\widehat{ADE})$ dir. Buradan $\overset{\triangle}{ESB} \sim \overset{\triangle}{ERD}$ ve dolayısıyla,

$$\frac{|ES|}{|ER|} = \frac{|EB|}{|ED|}. \qquad (1)$$

$m\,(\widehat{CDE}) = m\,(\widehat{EBP})$ dir. Buradan $\overset{\triangle}{EQD} \sim \overset{\triangle}{EPB}$ ve dolayısıyla,

$$\frac{|EQ|}{|EP|} = \frac{|ED|}{|EB|}. \qquad (2)$$

(1) ve (2) den $|ES|.|EQ| = |ER|.|EP|$ olur.




(**Çözenler:** *Ali Akın, Atasagun Baykal, Cemal Özboğa, Murat Aygen, Mustafa Dönmez*)

**Y.143.** Çevrel yarıçapı R olan $A_1A_2\cdots A_n$ düzgün çokgeninin çevrel çemberi üzerinde alınan bir $P$ noktası için

$$\sum_{i=1}^{n} |PA_i|^2 = 2nR^2$$

olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm 1.** $P$ noktası, $\overset{\frown}{A_1A_n}$ (küçük) yayının bir iç noktası olmak üzere, $\overset{\frown}{PA_1}$'nın ölçüsü $\alpha$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \overset{\frown}{PA_2} &= \alpha + \tfrac{2\pi}{n},\ \overset{\frown}{PA_3} = \alpha + \tfrac{4\pi}{n},\ \cdots,\ \overset{\frown}{PA_n} \\ &= \alpha + \tfrac{2(n-1)\pi}{n} \end{aligned}$$

olur. R yarıçaplı bir çemberde bir $[AB]$ kirişinin uzunluğu $2R\sin\frac{1}{2}$ $(\overset{\frown}{AB})$ olduğundan, söz konusu toplam

$$T = 4R^2(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cdots + \sin^2(\frac{\alpha}{2} + \frac{(n-1)\pi}{2}))$$

olur. $\sin^2 x = (1-\cos 2x)/2$ eşitliği kullanılarak,

$$\sin^2\tfrac{\alpha}{2} + \cdots + \sin^2(\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{(n-1)\pi}{2})$$

$$= \tfrac{n}{2} - [\cos\alpha + \cdots + \cos(\alpha + \tfrac{2(n-1)\pi}{n})]$$

elde edilir.

$$\cos\alpha + \cdots + \cos(\alpha + \tfrac{2(n-1)\pi}{n}) = 0$$

olduğundan, $T = 4R^2(\frac{n}{2})$, $T = 2nR^2$ bulunur.

**Çözüm 2.** İki vektörün toplamının uzunluğunun karesi

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a}\,.\,\vec{b})$$

formülünü kullanacağız. O noktası, düzgün çokgenin çevrel çemberinin merkezi olmak üzere,

$$\begin{array}{rcl} \vec{PA_1} & = & \vec{PO} + \vec{OA_1} \\ \vec{PA_2} & = & \vec{PO} + \vec{OA_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \vec{PA_n} & = & \vec{PO} + \vec{OA_n} \end{array}$$

ve buradan da

$$\begin{array}{rcl} |\vec{PA_1}|^2 & = & R^2 + R^2 + 2\vec{PO}\,.\,\vec{OA_1} \\ |\vec{PA_2}|^2 & = & R^2 + R^2 + 2\vec{PO}\,.\,\vec{OA_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ |\vec{PA_n}|^2 & = & R^2 + R^2 + 2\vec{PO}\,.\,\vec{OA_n} \end{array}$$

elde ederiz. Sonuncu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$\sum_{i=1}^{n}|\vec{PA_i}|^2 = 2nR^2 + 2\vec{PO}\,.\,(\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \cdots + \vec{OA_n}) = 2nR^2 + 2\vec{PO}\,.\,\vec{O} = 2nR^2$

olur (burada $\vec{O}$-sıfır vektörüdür).

**(Çözenler:** *Atasagun Baykal, Cemal Özboğa, Murat Aygen, Mustafa Dönmez* )

**Y.144.** (Soru dergide yanlış basılmış; doğrusu) $n$ pozitif bir tamsayı, $I$ ise uzunluğu $\frac{1}{n}$ olan bir açık aralık olsun. $p \in \mathbb{N}$ ve $q \in \{1, 2, \cdots, n\}$ olmak üzere $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı $I$ 'da olacak şekilde en çok kaç tane $(p,q)$ ikilisi bulunabilir?

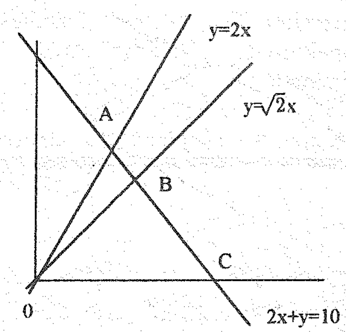
**Çözüm.** $p, p' \in \mathbb{N}$ ve $1 \le q \le n$ için

$$|\tfrac{p}{q} - \tfrac{p'}{q}| = \tfrac{|p-p'|}{q} \ge \tfrac{1}{q} \ge \tfrac{1}{n}$$

olacağından, her $q \in \{1, 2, \cdots, n\}$ için $\frac{p}{q}$ ve $\frac{p'}{q}$ sayıları $I$ 'da olacak biçimde en çok bir $(p,q)$ ikilisi vardır. $q = 1, 2, \cdots, n$ olabileceğinden, istenen türde en çok $n$ tane $(p,q)$ ikilisi bulunabilir. İstenilen türde $(p,q)$ ikililerinin tam sayısı $I$ 'ya bağlıdır. Örneğin $I = (0, \frac{1}{n})$ için istenen tür ikili yoktur. $I = (-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})$ aralığı için $(0,1), (0,2), \cdots, (0,n)$ ikilileri bulunur.

**Y.145.** Çevresi 10 birimden küçük olan rastgele bir ikizkenar üçgen çiziliyor. Bu üçgenin geniş açılı olma olasılığı nedir?

**Çözüm.** $x, y$ iki pozitif gerçel sayı olsun. Kenarları $x, x$ ve $y$ birim olan bir ikizkenar üçgenin varlığı için gerek ve yeter koşul, üçgen eşitsizliğinden $y < 2x$ eşitsizliğinin doğru olmasıdır. Bu üçgenin geniş açılı olması ise kosinüs teoreminden



$$y^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos\theta > 2x^2$$

yani $y > \sqrt{2}x$ eşitsizliğinin doğru olması ile eşdeğerdir. Bu bölgeleri, şekildeki gibi düzlemde belirleyelim.

Çevresi 10 birimden küçük ikizkenar üçgenler kümesi $OAC$ bölgesi ile, bunlardan geniş açılı olanlar ise $OAB$ bölgesi ile birebir eşlenmiştir. O halde aranan olasılık

$$p = \frac{alan(OAB)}{alan(OAC)} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

dir. $A = (\frac{5}{2}, 5)$, $B = (10 - 5\sqrt{2},\ 10\sqrt{2} - 10)$, $C = (5, 0)$ olduğundan $p = 3 - 2\sqrt{2} \cong 0.17175\cdots$ olarak bulunur.

(**Çözenler:** *Atasagun Baykal, Murat Aygen* )

***Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:***

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, Matematik Dünyası Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 07058 ANTALYA adresine,

30 Mart 1998 tarihine kadar gönderiniz.

## YAZARLARA

*Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:*

- *Konu sunuşları.*
- *Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.*
- *Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı.*
- *Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.*
- *Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.*
- *Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.*
- *Matematik dünyasından güncel haberler.*

*Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihan daktilo ile, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üst üste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar*

**Matematik Dünyası**
**Akdeniz Üniversitesi**
**Matematik Bölümü**
**07058 Antalya**

*adresine gönderilecektir.*