

38. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADI

Halil İbrahim Karakaş
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

38. Uluslararası Matematik Olimpiyadı 18-31 Temmuz 1997 tarihlerinde Arjantin'in sahil kenti Mar del Plata'da yapıldı. 82 ülkeden 460 yarışmacının katıldığı olimpiyatta ülkemizi *Umut Akdemir, Deniz Gündüz, İsa Emin Hafalır, Fatih Sulak, Mehmet Bumin Yenmez ve Muhammet Ali Yıldırım*'dan oluşan ulusal takımımız temsil etti. Takım lideri olarak, aynı zamanda Uluslararası Olimpiyat Komitesi Danışma Kurulu (Advisory Board) üyesi olan *Semih Koray*, lider yardımcısı olarak bu satırların yazarı *Halil İ. Karakaş* ve gözlemci olarak *Zafer Nurlu* görev yaptılar.



38th
International
Mathematical
Olympiad

ARGENTINA

Ulusal takımımız, bu satırların yazarı ile 20 Temmuz 1997 Pazar günü İstanbul'dan hareket ederek Paris üzerinden 21 Temmuz 1998 Pazartesi günü Buenos Aires'e, oradan da Mar del Plata'ya uçtu. Arjantin'e indiğimizde mevsim kış, hava yağmurlu idi. Takım liderimiz *Semih Koray* ve gözlemcimiz *Zafer Nurlu* 3 gün önce Arjantin'e ulaşmışlardı. Ancak, olimpiyat kurallarına göre onları ancak sınavların bitiminde görebilecektik.

Sınavlar, yazılı olarak, birincisi 24 Temmuz 1997 Perşembe günü; ikincisi 25 Temmuz 1997 Cuma günü olmak üzere herbiri 4,5 saat süren 3'er soruluk iki seansta yapıldı. Takımımız 1 gümüş, 4 bronz madalya kazanarak madalya sıralamasında şimdiye kadar bulunduğu yeri korudu.

38. Olimpiyatla ilgili ayrıntıları ve takımımızın hoş anılarını anlatmayı takım mensuplarına bırakarak

(Deniz, Fatih, Umut, İsa, Bumin ve Mali! Biriniz bu görevi yapmalısınız...) olimpiyatta sorulan 6 soruyu ve çözümlerini veriyorum. Kuşkusuz, burada verilen çözümlerden daha farklı çözümler vardır.

Sevgili okurlarımız! Soruları okuduktan sonra, çözümlere bakmadan önce, her soruyu kendiniz çözmeye çalışınız. Kolay gelsin...

İşte 38. Uluslararası Matematik Olimpiyadında sorulan sorular...

BİRİNCİ GÜN SINAV SORULARI

SORU 1. Köşeleri düzlemdeki tamsayı koordinatlı noktalar olan birim karelere bakalım. Bu kareler (satranç tahtasındaki gibi) sırayla siyah ve beyaza boyanmış olsun. Her (m, n) pozitif tamsayı çifti için, köşeleri tamsayı koordinatlı noktalar olan ve m ve n uzunluğundaki dik kenarları yukarıdaki karelerin kenarları üstünde bulunan bir dik üçgen alalım. S_1 ile bu üçgendeki siyah bölgelerin toplam alanını; S_2 ile de aynı üçgendeki beyaz bölgelerin toplam alanını göstereyim.

$$f(m, n) = |S_1 - S_2|$$

olsun.

a) Her ikisi de tek veya her ikisi de çift pozitif m ve n tamsayıları için $f(m, n)$ değerini hesaplayınız.

b) Her m ve n için $f(m, n) \leq \frac{1}{2} \max\{m, n\}$ olduğunu kanıtlayınız.

c) $f(m, n) < C$ koşulunu m ve n 'nin tüm değerleri için sağlayan bir C sabitinin bulunmadığını gösteriniz.

SORU 2. A açısı ABC üçgenindeki açılardan en küçüğüdür. B ve C noktaları bu üçgenin çevrel çemberini iki yaya ayırıyor. U , B ve C arasındaki A noktasını içermeyen yayın bir iç noktası olsun. $[AB]$ ile $[AC]$ 'nin orta dikmeleri AU doğrusunu sırasıyla V ve W noktalarında kesiyor. BV ile CW doğruları da T noktasında kesişiyor.

$$|AU| = |TB| + |TC|$$

olduğunu gösteriniz.

SORU 3. $x_1, x_2, \dots, x_n, |x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 1$
ve $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$$

koşullarını sağlayan gerçel sayılar olsun.

x_1, x_2, \dots, x_n 'nin

$$|y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}$$

koşulu sağlanacak biçimde bir y_1, y_2, \dots, y_n
permütasyonu bulunduğunu gösteriniz.

İKİNCİ GÜN SORULARI

SORU 4. Elemanları $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$
kümesine ait bir $n \times n$ matrise (n sütun ve n
satırdan oluşan kare biçimindeki bir tabloya), eğer
her $i = 1, \dots, n$ için i -inci satır ile i -inci sütun
birlikte S 'nin tüm elemanlarını kapsıyorsa, bir
gümüş matris diyoruz.

a) $n = 1997$ için hiç bir gümüş matrisin bulun-
madığını;

b) n 'nin sonsuz sayıda değeri için gümüş
matrislerin bulunduğunu gösteriniz.

SORU 5. $a \geq 1, b \geq 1$ olmak üzere,

$$a^{(b^2)} = b^a$$

eşitliğini sağlayan tüm (a, b) tamsayı sıralı
ikililerini bulunuz.

SORU 6. Her n pozitif tamsayısı için, n
'nin, 2 'nin negatif olmayan tamsayı kuvvetlerinin
toplamı olarak yazılış biçimlerinin sayısını $f(n)$ ile
gösterelim. Toplamda geçen terimlerin yalnızca
sırasının değişik olduğu yazılış biçimlerini aynı
sayıyoruz. Örneğin 4 sayısı; $4, 2+2, 2+1+1, 1+1+1+1$
olarak dört şekilde yazılabileceğinden
 $f(4) = 4$ olur. Her $n \geq 3$ tamsayısı için

$$2^{\frac{n}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n}{2}}$$

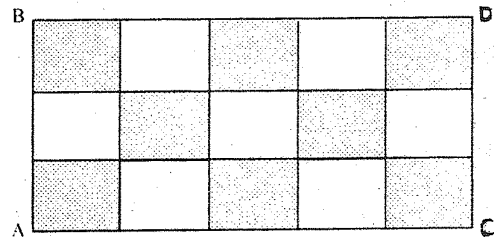
olduğunu kanıtlayınız.

ÇÖZÜMLER

SORU 1 'İN ÇÖZÜMÜ a) Köşeleri tamsayı
koordinatlı noktalar olan ve dik kenarları prob-
lemün koşullarına uyan,

$$m(\hat{A}) = 90^\circ, |AB| = m \text{ ve } |AC| = n$$

olan bir ABC dik üçgeni alalım. Aşağıdaki
şekilde gösterilen $ABCD$ dikdörtgenini düşü-
nelim.



Herhangi bir P poligonu için o poligonun siyah
kısımının toplam alanını $S_1(P)$ ile beyaz kısmının
toplam alanını $S_2(P)$ ile gösterelim. Eğer m
ve n her ikisi de tek veya her ikisi de çift
ise, $ABCD$ dikdörtgeni BC hipotenüsünün (veya
köşegeninin) orta noktasına göre simetriktir.

Bu nedenle,

$$S_1(ABC) = S_1(BCD) \text{ ve } S_2(ABC) = S_2(BCD)$$

'dir. Böylece

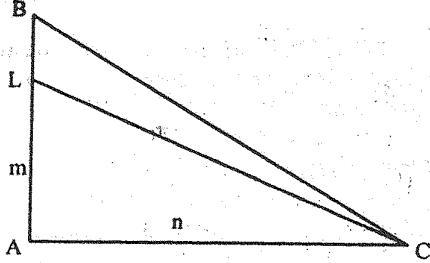
$$\begin{aligned} f(m, n) &= |S_1(ABC) - S_2(ABC)| \\ &= \frac{1}{2} |S_1(ABCD) - S_2(ABCD)| \end{aligned}$$

olur. Buradan, eğer m ve n her ikisi de çift ise,
 $f(m, n) = 0$; her ikisi de tek ise $f(m, n) = \frac{1}{2}$
olduğu görülür.

b) Eğer m ve n her ikisi de tek veya her ikisi de
çift ise kanıtlamamız gereken eşitsizlik (a) şıkının
sonucu olarak hemen görülür. Şimdi m 'nin tek
ve n 'nin çift olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki
şekilde görüldüğü gibi, $[AB]$ üzerinde

$$|AL| = m - 1$$

olacak biçimde bir L noktası alalım.



$m - 1$ çift olduğundan $f(m - 1, n) = 0$; yani

$$S_1(ALC) = S_2(ALC)$$

dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} f(m, n) &= |S_1(ABC) - S_2(ABC)| \\ &= |S_1(LBC) - S_2(LBC)| \\ &\leq \text{Alan}(LBC) = \frac{n}{2} \leq \frac{1}{2} \max\{m, n\}. \end{aligned}$$

c) Her $k \geq 1$ tamsayısı için $f(2k + 1, k)$ 'yi hesaplayalım. Yukarıda olduğu gibi, $[AB]$ üzerinde, $|AL| = 2k$ olacak biçimde bir L noktası alalım. Bu takdirde, $f(2k, 2k) = 0$ ve $S_1(ALC) = S_2(ALC)$ olduğundan

$$f(2k + 1, 2k) = |S_1(LBC) - S_2(LBC)|$$

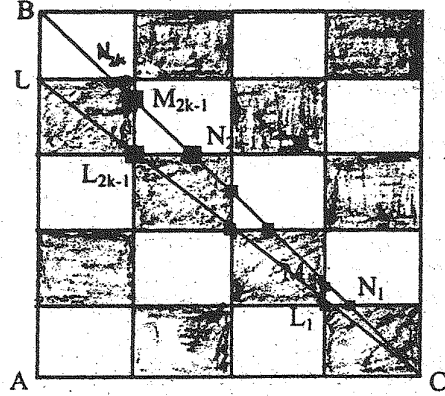
olur. LBC üçgeninin alanı k 'dir. Genelliği bozmadan $[LC]$ 'nin tamamen siyah bölgede kaldığını varsayabiliriz (aşağıdaki şekilden izleyiniz). Bu durumda, LBC 'nin beyaz kısmı, her biri BAC 'ye benzeyen BLN_{2k} , $M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1}$, ..., $M_1L_1N_1$ üçgenlerinden oluşur. Dolayısıyla LBC 'nin beyaz kısmının toplam alanı

$$\begin{aligned} S_2(LBC) &= \frac{1}{2} \frac{2k}{2k+1} \left(\left(\frac{2k}{2k} \right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2k} \right)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2k} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4k(2k+1)} (1^2 + 2^2 + \dots + (2k)^2) \\ &= \frac{4k+1}{12}, \end{aligned}$$

siyah kısmının toplam alanı

$$S_1(LBC) = k - \frac{4k+1}{12} = \frac{8k-1}{12}$$

olur.



Sonuç olarak,

$$f(2k + 1, 2k) = \frac{2k-1}{6}$$

istenildiği kadar büyük değerler alabileceğinden

$$f(m, n) \leq C$$

koşulunu her m ve n pozitif tamsayısı için sağlayacak bir C sabiti bulunamaz.

Gözlem: $f(m, n)$ 'nin, m ve n 'nin biri tek diğeri çift aralarında asal sayılar olması durumunda da istenildiği kadar büyük değerler aldığını görmek mümkündür. Gerçekten, m tek ve n çift, m ve n 'nin en büyük ortak böleni d ise,

$$f(m, n) = f\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)$$

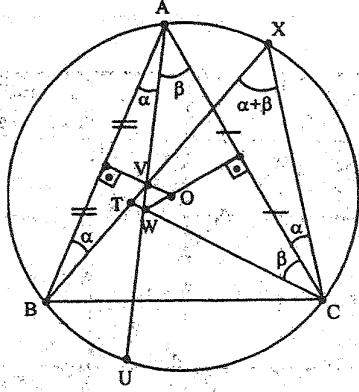
'dir.

SORU 2 'NİN ÇÖZÜMÜ: BV doğrusunun çevrel çemberi kestiği nokta X olsun.

$$m(\widehat{VAB}) = m(\widehat{VBA}) = \alpha,$$

$$m(\widehat{WAC}) = m(\widehat{WCA}) = \beta$$

olsun. Bu takdirde,



$m(\widehat{TXC}) = m(\widehat{BAC}) = \alpha + \beta$ olur (aynı yayı gören çevre açıları). Böylece,

$$m(\widehat{TCX}) = m(\widehat{TXC}) = \alpha + \beta$$

ve TCX üçgeni ikizkenar; $|TC| = |TX|$ olur. Diğer yandan, $|VA| = |VB|$, $|VU| = |VX|$ ve dolayısıyla,

$$|AU| = |VA| + |VU| = |VB| + |VX| = |AX|$$

'dir. Böylece,

$$|AU| = |AX| = |TB| + |TX| = |TB| + |TC|$$

olduğu görülür.

SORU 3 'ÜN ÇÖZÜMÜ: (x_1, x_2, \dots, x_n) 'nin herhangi bir permütasyonu $\pi = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ için

$$S(\pi) = y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n$$

olsun. $\frac{n+1}{2} = r$ diyelim. Her π için $S(\pi) \leq r$ olduğunu göstermemiz gerekiyor. Birim permütasyonu π_0 ile, tersine sıralama veren permütasyonu da $\tilde{\pi}$ ile gösterelim:

$$\pi_0 = (x_1, \dots, x_n), \quad \tilde{\pi} = (x_n, \dots, x_2, x_1)$$

Eğer $|S(\pi_0)| \leq r$ veya $|S(\tilde{\pi})| \leq r$ ise kanıtlanacak birşey kalmaz; iddia doğrudur. Bu nedenle, $|S(\pi_0)| > r$ ve $|S(\tilde{\pi})| > r$ kabul edebiliriz. Şimdi,

$$\begin{aligned} S(\pi_0) + S(\tilde{\pi}) &= (x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n) \\ &+ (x_n + 2x_{n-1} + \dots + nx_1) \\ &= (n+1)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \end{aligned}$$

ve böylece

$$|S(\pi_0) + S(\tilde{\pi})| = n + 1 = 2r$$

'dir. Yukarıdaki kabulümüze göre $|S(\pi_0)| > r$ ve $|S(\tilde{\pi})| > r$ olduğundan $S(\pi_0)$ ve $S(\tilde{\pi})$ ters işaretli olup biri r 'den büyük, diğeri de $(-r)$ 'den küçüktür. Başka bir ifadeyle, $S(\pi_0)$ ve $S(\tilde{\pi})$ her ikisi de $[-r, r]$ aralığının dışındadır.

Birim permütasyon π_0 'dan başlayarak, sonlu adımda, her adımda iki komşu elemanın yerlerini değiştirerek, her permütasyonu elde edebiliriz. Özel olarak, öyle bir permütasyonlar dizisi

$$\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{m-1}, \pi_m = \tilde{\pi}$$

bulunabilir ki, her $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ için π_{i+1}, π_i 'nin iki komşu elemanın yerleri değiştirilerek elde edilmiştir. Daha açık bir ifadeyle, eğer

$\pi_i = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ve $\pi_{i+1} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ ise, uygun bir $k \in \{1, \dots, n-1\}$ için

$$v_k = u_{k+1}, v_{k+1} = u_k;$$

$$t \notin \{k, k+1\} \text{ için } v_t = u_t.$$

Diğer yandan, $|x_i| \leq r$ olduğundan

$$\begin{aligned} |S(\pi_{i+1}) - S(\pi_i)| &= |kv_k + (k+1)v_{k+1} - ku_k - (k+1)u_{k+1}| \\ &= |u_k - u_{k+1}| \leq |u_k| + |u_{k+1}| \leq 2r \end{aligned}$$

'dir. Bu durumda, sayı eksenini üzerinde

$$S(\pi_0), S(\pi_1), \dots, S(\pi_{m-1}), S(\pi_m)$$

sayılarından ardarda gelen herhangi ikisi arasındaki uzaklık $2r$ 'den büyük olamaz. $S(\pi_0)$ ve $S(\tilde{\pi}) = S(\pi_m)$ sayıları $[-r, r]$ aralığının dışında kaldıklarından, $S(\pi_i)$ 'lerden en az biri bu aralık içinde olmak zorundadır. Böyle bir i için $S(\pi_i) \leq r$ olur ve iddianın doğruluğu görülür.

SORU 4 'ÜN ÇÖZÜMÜ: a) $n > 1$ bir tamsayı olsun ve bir $n \times n$ gümüş matris A bulunduğunu kabul edelim. $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$ kümesinin, A 'nın köşegeni üzerinde bulunmayan bir x elemanını alalım. (Köşegen üzerinde sadece n yer, kümede ise $2n-1$ eleman bulunduğu böyle bir x vardır.) i -inci satırla i -inci sütunun oluşturduğu şekle i -inci çatal diyelim. x elemanı her çatalda tam bir kez görülür. Eğer x , A 'nın (i, j) girdisi (yani i -inci satır ve j -inci sütunun ortak elemanı) ise, bu takdirde, x hem i -inci çatalda

hem de j -inci çatalda görülür. Bu durumda i -inci ve j -inci çatalara x -geçişli çatalar diyelim. (Örneğin, aşağıdaki A matrisinde birinci ve dördüncü çatalar 6-geçişlidir.) Böylece A 'nın tüm çataları (ki, n tanedir) x -geçişli ikililere ayrılmaktadır. O halde n çift olmalıdır. 1997 tek olduğundan, 1997×1997 gümüş matris yoktur.

b) $n = 2$ için

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

bir gümüş matristir. $n = 4$ için çeşitli gümüş matrisler yazabiliriz. Örneğin,

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Burada dikkat edilirse, A_4 matrisi A_2 'yi altmatrisler olarak içermektedir. A_4 'ün A_2 'den elde edilmesi genelleştirilebilir. A_n gümüş matrisi verilmişse (n çift!) A_{2n} 'yi şöyle oluşturabiliriz: A_n 'nin her girdisine $2n$ eklenerek elde edilen matris B_n ve B_n 'nin köşegen girdilerini $2n$ ile değiştirerek elde edilen matris C_n olsun. Bu takdirde,

$$A_{2n} = \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & A_n \end{bmatrix}$$

matrisi bir gümüş matristir. Bunu görmek için A_{2n} 'nin i -inci çatalına bakalım. Eğer $i \leq n$ ise, bu çatal A_n 'nin i -inci çatalı ile B_n 'nin i -inci satırı ve C_n 'nin i -inci sütunundan oluşur. A_n 'nin i -inci çatalı $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$ kümesindeki tüm sayıları kapsar. B_n 'nin i -inci satırı ile C_n 'nin i -inci sütunu da $\{2n, 2n+1, \dots, 4n-1\}$ kümesinin elemanlarını kapsar. $i > n$ için de benzer tartışma ile A_{2n} 'nin i -inci çatalının $\{1, 2, \dots, 4n-1\}$ kümesinin tüm elemanlarını kapsadığı görülebilir.

SORU 5'İN ÇÖZÜMÜ: $a, b \geq 1$ tamsayıları verilen denklemin bir çözümü; a ve b 'nin en

büyük ortak böleni d olsun. $a = dx, b = dy$ diyelim. x ve y aralarında asal tamsayılardır. Verilen denklem

$$(dx)^{dy^2} = (dy)^x \quad (1)$$

denkleminde denktir. (1) denkleminde üsler karşılaştırılırsa aşağıdaki üç durum söz konusu olur:

1.Durum: $dy^2 = x$. Bu durumda, (1)'den $x = y$ olması gerekir. x ve y aralarında asal olduğundan $x = y = 1$; $dy^2 = x$ 'ten $d = 1$ ve böylece $a = b = 1$ çözümü elde edilir.

2.Durum: $dy^2 > x$. Bu durumda, (1) denklemini

$$d^{dy^2-x} \cdot x^{dy^2} = y^x \quad (2)$$

biçiminde yazarsak, x^{dy^2} 'nin y^x 'i böldüğünü görürüz. x ve y aralarında asal olduğundan $x = 1$ ve

$$d^{dy^2-1} = y \quad (3)$$

elde ederiz. Eğer $d = 1$ ise, (3) ten $y = 1$ olur ve bu durum $dy^2 > x$ ile çelişir. O halde, $d \geq 2$ ve her $y \geq 1$ için

$$d^{dy^2-1} \geq 2^{2y^2-1} \geq 2^{2y-1} > y$$

olmalıdır (buradaki son eşitsizlik tümevarımla görülebilir). Bu eşitsizlik (3) ile çelişir ve bu durumda hiç çözüm bulunmadığı görülür.

3.Durum: $dy^2 < x$. Bu durumda, $x > d$ olur ve (1) denklemini

$$x^{dy^2} = y^x \cdot d^{x-dy^2} \quad (4)$$

biçiminde yazarak y^x 'in x^{dy^2} 'yi böldüğünü görürüz. x ve y aralarında asal olduğundan, $y = 1$ ve (4) denkleminde

$$x^d = d^{x-d} \quad (5)$$

elde edilir. (5)'teki üslü ifadelerin tabanları $x > d$ koşulunu sağladığından üsler de $d < x - d$ koşulunu sağlar. x 'i bölen her p asal sayısı d 'yi de böler. Böyle bir asal sayının x ve d 'yi bölen en büyük kuvvetleri, sırasıyla, p^α ve p^β olsun. Bu takdirde, (5)'ten $\alpha d = \beta(x - d)$ ve böylece $\alpha > \beta$ olduğu görülür. Dolayısıyla, d sayısı x 'i böler;

uygun bir k için $x = kd$ dir. $x > 2d$ olduğundan $k \geq 3$ olduğuna dikkat ediniz. (5) denkleminde $x = kd$ alınırsa

$$k = d^{k-2} \quad (6)$$

elde edilir. Buradan, $d \neq 1$ olduğu, yani $d \geq 2$ olduğu görülür.

$k = 3$ için (6) 'dan $d = 3$ ve böylece, $x = 9$ ile $a = 27$, $b = 3$ çözümü elde edilir.

$k = 4$ için (6) 'dan $d = 2$ ve böylece, $x = 8$ ile $a = 16$, $b = 2$ çözümü elde edilir.

$k \geq 5$ için tümevarımla, $d^{k-2} \geq 2^{k-2} > k$ ve böylece (6) 'nın sağlanmadığı görülür.

Sonuç olarak, denklemin çözüm kümesi $\{(1, 1), (27, 3), (16, 2)\}$ 'den ibarettir.

SORU 6 'NİN ÇÖZÜMÜ: $n = 2k + 1 \geq 3$ herhangi bir tek sayı ise, n 'nin belirtilen biçimde her yazılışında toplanan terimlerden en az biri "1" olacaktır. Bu terim silinirse, $2k$ 'nın bir yazılışı elde edilir. Karşıt olarak, $2k$ 'nın herhangi bir yazılışına "1" toplanırsa $2k + 1$ 'in bir yazılışı elde edilir. Böylece, $2k$ 'nın belirtilen biçimde yazılışlarının kümesi ile $2k + 1$ 'in belirtilen biçimde yazılışlarının kümesi bire-bir eşlenebilmekte, yani aynı sayıda elemana sahiptir. Başka bir ifadeyle,

$$f(2k + 1) = f(2k). \quad (1)$$

Ek olarak, eğer $n = 2k$ herhangi bir pozitif çift tamsayı ise, n 'nin belirtilen biçimde her yazılışı için aşağıdaki iki durumdan biri geçerlidir: Ya bu yazılıшта toplanan terimlerden en az biri "1" dir ya da hiç biri "1" değildir. Birinci durumda, n 'nin yazılışından bir "1" silerek $2k - 1$ 'in bir yazılışını elde ederiz; bu durumda, daha önce olduğu gibi $n = 2k$ 'nın "birinci tür" yazılışları ile $2k - 1$ 'in yazılışları arasında bire-bir bir eşleme olduğunu görürüz. İkinci durumda, toplanan terimlerin her birini 2 'ye bölerek k 'nın bir yazılışını elde ederiz. Böylece, ikinci durumda da $n = 2k$ 'nın "ikinci tür" yazılışları ile k 'nın yazılışları arasında bire-bir bir eşleme olduğunu görürüz. Bu gözlemlerden

$$f(2k) = f(2k - 1) + f(k) \quad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2) formülleri her $k \geq 1$ için geçerlidir. Tanımdan hemen $f(1) = 1$ olduğu

görüldür. $f(0) = 1$ tanımlarsak (1) denklemini $k = 0$ için de doğrudur. (1) ve (2) 'den f 'nin azalmayan bir fonksiyon olduğu görülür.

(2) denkleminde, (1) 'den yararlanarak $f(2k - 1)$ yerine $f(2k - 2) + f(k)$ yazarsak her $k \geq 1$ için

$$f(2k) = f(2k - 2) + f(k) \quad (3)$$

elde ederiz. Herhangi bir $n \geq 1$ için (3) 'teki denklemler ($k = 1, \dots, n$ için) taraf tarafa toplanırsa her $n \geq 1$ için

$$f(2n) = f(0) + f(1) + \dots + f(n) \quad (4)$$

elde edilir.

Şimdi $f(2^n)$ için alt ve üst sınırları bulmağa çalışalım. Üst sınırı bulmak zor değil. $f(2) = 2$ olduğundan ve f azalmayan olduğundan her $n \geq 2$ için ((4) 'e göre)

$$f(2n) = f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n)$$

$$\leq 2 + (n - 1)f(n)$$

$$\leq f(n) + (n - 1)f(n) = nf(n)$$

'dir. Dolayısıyla,

$$f(2^n) \leq 2^{n-1}f(2^{n-1}) \leq 2^{n-1}2^{n-2}f(2^{n-2})$$

$$\leq 2^{n-1}2^{n-2}2^{n-3}f(2^{n-3}) \leq \dots$$

$$\leq 2^{(n-1)+(n-2)+\dots+1}f(2) \leq 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2.$$

Tümevarımla, her $n \geq 3$ için $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2 \leq 2^{\frac{n^2}{2}}$ olduğu ve sonuç olarak $f(2^n) \leq 2^{\frac{n^2}{2}}$ olduğu görülür.

Altsınırı elde etmek için, önce a ve b her ikisi de tek veya her ikisi de çift tamsayılar ve $b \geq a \geq 0$ ise,

$$f(b+1) - f(b) \geq f(a+1) - f(a) \quad (5)$$

olduğunu göstereceğiz. Gerçekten, eğer a ve b her ikisi de çift ise, bu takdirde (1) 'den dolayı, (5) eşitsizliğinin her iki tarafı da sıfır olur; eğer a ve b her ikisi de tek ise, bu takdirde (2) 'den dolayı,

$$f(b+1) - f(b) = f\left(\frac{b+1}{2}\right),$$

$$f(a+1) - f(a) = f\left(\frac{a+1}{2}\right)$$

olduğu görülür ve f 'nin azalmayan olması (5) eşitsizliğini verir.

Şimdi, $r \geq k \geq 1$ olan bir çift sayı r alalım ve (5) 'te $j = 0, 1, \dots, k-1$ için, ardarda, $a = r - j$, $b = r + j$ yazalım ve ortaya çıkan eşitsizlikleri taraf tarafa toplayalım. Sonuçta

$$f(r+k) - f(r) \geq f(r+1) - f(r-k+1)$$

elde ederiz. r çift olduğundan $f(r+1) = f(r)$ ve böylece her $k = 1, 2, \dots, r$ için

$$f(r+k) - f(r-k+1) \geq 2f(r)$$

elde edilir. Son eşitsizlikler de $k = 1, 2, \dots, r$ için taraf tarafa toplanınca

$$f(1) + f(2) + \dots + f(2r) \geq 2rf(r) \quad (6)$$

elde edilir. (4) denkleminde göre (6) 'nın sol tarafı $f(4r) - 1$ 'dir. Böylece, her $r \geq 2$ için

$$f(4r) \geq 2rf(r) + 1 > 2rf(r);$$

$r = 2^{m-2}$ alınarak

$$f(2^m) > 2^{m-1} f(2^{m-2}) \quad (7)$$

olur. $r = 2^{m-2}$ 'nin çift olduğundan emin olmak için $m > 2$ olmalıdır; ancak, (7) 'nin $m = 2$ için de doğru olduğuna dikkat ediniz.

Çözümü tamamlamak için $n > 1$ herhangi bir tamsayı olsun. $2p \leq n$ olacak şekilde bir pozitif tamsayı p alalım ve (7) eşitsizliğini $m = n, n-1, \dots, n-2p+2$ için ardarda uygulayalım:

$$\begin{aligned} f(2^n) &> 2^{n-1} f(2^{n-2}) > 2^{n-1} 2^{n-3} f(2^{n-4}) \\ &> 2^{n-1} 2^{n-3} 2^{n-5} f(2^{n-6}) > \dots \\ &> 2^{(n-1)+(n-3)+\dots+(n-2p+1)} \cdot f(2^{n-2p}) \\ &> 2^{p(n-p)} \cdot f(2^{n-2p}). \end{aligned}$$

Eğer n çift ise $p = \frac{n}{2}$; n tek ise $p = \frac{(n-1)}{2}$ alalım. O zaman, her $n \geq 2$ için

$$n \text{ çift ise } f(2^n) > 2^{\frac{n^2}{4}} \cdot f(2^0) = 2^{\frac{n^2}{4}},$$

$$n \text{ tek ise } f(2^n) > 2^{\frac{(n^2-1)}{4}} \cdot f(2^1) = 2^{\frac{(n^2-1)}{4}} \cdot 2 > 2^{\frac{n^2}{4}}$$

elde edilir. Böylece, problemde iddia edilen alt sınırın her $n \geq 2$ için geçerli olduğunu kanıtlamış olduk. Aynı alt sınırın $n = 1$ için de geçerli olduğunu görebilirsiniz.



Olimpiyat takımımız Arjantin yolunda, Paris'te