PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

UYARI: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.156. $0 \le a \le 1 \le b \le c < 3$ olmak üzere, kenar uzunlukları a, b, c olan üçgenler içinde en büyük alana sahip üçgenin alanı kaç olabilir?

A.157. 11 111 den 99 999 'a kadar tüm beş basamaklı sayılar, her kart üzerinde birer sayı olmak üzere yazılmış ve bu kartlar rasgele (gelişigüzel) biçimde yanyana dizilmiştir. Bu şekilde elde edilen 444 445 basamaklı sayının 3' ün bir kuvveti olamayacağını kanıtlayınız.

A.158. $(0, \frac{\pi}{2})$ aralığında bulunan α ve β sayıları için

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)$$

eşitliği sağlanıyorsa $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ olduğunu gösteriniz.

A.159. $2^{\sqrt[12]{1998}} + 2^{\sqrt[4]{1998}} \geq 2^{\sqrt[6]{1998}+1}$ eşitsizliğini ispatlayınız.

A.160. Tüm köşegen ve kenar uzunlukları rasyonel sayılar olan konveks $ABCD$ dörtgeni veriliyor. Köşegenlerin kesişim noktası O olmak üzere, AO doğru parçasının uzunluğunun bir rasyonel sayı olduğunu kanıtlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.156. n herhangi bir doğal sayı olmak üzere,

$$n,\ n+1,\ n+2,\ \cdots,\ n+37,\ n+38$$

dizisinde, rakamları toplamı 11 ile bölünen bir sayı bulunduğunu gösteriniz.

Y.157. Konveks $ABCD$ dörtgeninin AB, BC, CD ve DA kenarlarının uzantıları üzerinde

$$\vec{BB'} = \vec{AB},\ \vec{CC'} = \vec{BC},$$

$$\vec{DD'} = \vec{CD},\ \vec{AA'} = \vec{DA}$$

sağlanacak biçimde B', C', D', A' noktaları alınmıştır. A', B', C', D' dörtgeninin alanının $ABCD$ dörtgenin alanının 5 katı olduğunu kanıtlayınız.

Y.158. $\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}$ sayısının tam kısmının 1998 ile bölünmesinden kalan nedir?

Y.159. Alfa burcunun 1001 gezegenden ibaret bir gezegenler sisteminin her gezegeninde bir astronom, kendi gezegenine en yakın olan gezegeni gözlemektedir. (Gezegenler birbirinden farklı uzaklıktalar.) Astronomların hiç birinin gözlemediği bir gezegenin varlığını kanıtlayınız.

Y.160. Alanı S ve çevre uzunluğu P olan konveks dörtgenin içine, yarıçapı $\frac{S}{P}$ olan bir daireyi (dışarıya taşmaksızın) yerleştirmek mümkündür; kanıtlayınız.

ÇÖZÜMLER

A.146. Bir XY doğrusu köşeleri aynı olan üç dik açının kenarlarını sırasıyla A, B, C, D, E, F noktalarında kesiyorsa

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = -1$$

olduğunu gösteriniz. *(Cemil Uğurlu, 1946).*

Çözüm. Sözkonusu üç dik açının ortak köşesi O olmak üzere, $A\hat{O}B = D\hat{O}E = \alpha$, $B\hat{O}C = E\hat{O}F = \beta$ ve $C\hat{O}D = \gamma$ diyelim.

$$|AB|/|BC| = |OA|\sin\alpha/|OC|\sin\beta$$
$$|CD|/|DE| = |OC|\sin\gamma/|OE|\sin\alpha$$
$$|EF|/|FA| = |OE|\sin\beta/|OA|\sin(-\gamma)$$

olduğundan çarpım (-1) olur.

(Çözenler: *Ülkü Öztaş***)**

A.147. *(Soru dergide eksik basılmış; doğrusu:)* Bir $ABCD$ kirişler dörtgeninin $\hat{B}$ açısı dik olup, $[BD]$ köşegenine A ve C 'den indirilen dikmelerin ayakları sırasıyla E ve F ise, $|BE| = |DF|$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. $F\hat{D}C = \beta$ olsun. $|DC|\cos\beta = |DF|$, $B\hat{A}C = \beta$ olacağından,

$$|AB|/|AC| = \cos\beta$$

ve dolayısıyla,

$$|DC|.|AB|/|AC| = |DF|$$

olur. $H\hat{A}C = \alpha$ olsun, $D\hat{A}C = \beta - \alpha$ olur. $\sin(\beta - \alpha) = |DC|/|AC|$ ve $|AB|\sin(\beta - \alpha) = |BE|$ ve dolayısıyla, $|DC|.|AB|/|AC| = |BE|$ bulunur. O halde $|BE| = |DF|$ 'dir.

(**Çözenler:** *Cemal Özboğa*)

A.148. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerine DBC ve EBC eşkenar üçgenleri kuruluyor. $|AD|^2+|AE|^2 = a^2+b^2+c^2$ olduğunu ispatlayınız. (a, b, c, ABC üçgeninin kenar uzunluklarıdır.)

Çözüm. $[BC]$ 'nin orta noktası F olmak üzere, DAE üçgeninde $[AF]$ kenarortay olacağından,

$$\begin{aligned} |AF|^2 &= \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{|AD|^2+|AE|^2}{2}| - (\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$|AD|^2 + |AE|^2 = a^2 + b^2 + c^2 .$$

(**Çözenler:** *Cemal Özboğa, Ülkü Öztaş, Fatih Karakoç, Kadir Gençay, Hasan Karabıyık*)

A.149. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ eğrisi bir elips ise, içindeki bölgenin alanını ABC cinsinden hesaplayınız. *(Turgay Kaptanoğlu)*

Çözüm. Yarı eksen uzunlukları a ve b olan elipsin içindeki bölgenin alanı πab dir. $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ elipsinin eksen uzunluklarını bulmak için, uygun bir dönme ile denklem $A'X^2 + C'Y^2 = 1$ haline dönüştürülür; elipsin eksenleri X ve Y eksenleri olacağından yarı eksen uzunlukları $\frac{1}{\sqrt{A'}}$ ve $\frac{1}{\sqrt{C'}}$ dür; istenen alan $\frac{\pi}{\sqrt{A'C'}}$ olur. Öte yandan dönme sonrasında $B^2 - 4AC = (B')^2 - 4A'C'$ ve $B' = 0$ olduğundan; $A'C' = \frac{1}{4}(4AC - B^2)$ ve alan $\frac{2\pi}{\sqrt{4AC-B^2}}$ olarak bulunur.

(**Çözenler:** *Ülkü Öztaş, Hasan Karabıyık*)

A.150. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsiyle $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ hiperbolünün, eğer

$$A^2 \leq a^2 \text{ ve } a^2 - b^2 = A^2 + B^2$$

ise (yani eşodaklı iseler), dik olarak kesiştiklerini gösterin. *(Turgay Kaptanoğlu)*

Çözüm. İki denklemi ortak çözerek elipsle hiperbolün kesişme noktaları (x_0, y_0), $(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$ ve $(-x_0, -y_0)$ için

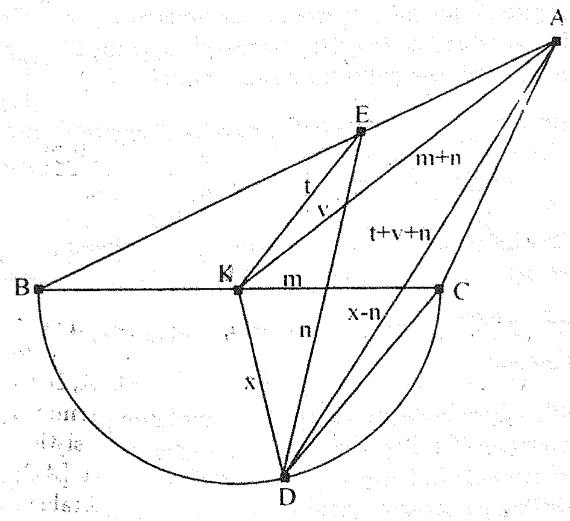
$$x_0^2 = \frac{a^2A^2(b^2+B^2)}{a^2B^2+A^2b^2},\ y_0^2 = \frac{b^2B^2(a^2-A^2)}{a^2B^2+A^2b^2}$$

buluruz. (x_0, y_0) noktasında elipsin eğimi $m_e = \frac{-b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$, hiperbolün eğimi ise $m_h = \frac{B^2}{A^2}\frac{x_0}{y_0}$ olduğundan; teğetlerin dik olması için gerek ve yeter koşul $-1 = m_e.m_h$, yani $b^2B^2x_0^2 = a^2A^2y_0^2$ ve yukarıdan yerine koyup sadeleştirirsek $b^2B^2 = a^2A^2$ olarak bulunur.

(**Çözenler:** *Cemal Özboğa, Ülkü Öztaş*)

Y.146. Bir ABC üçgeninin $[BC]$ kenarı çap alınarak üçgenin dışına bir yarım çember çiziliyor. Bu çember yayının orta noktası D olmak üzere D 'den öyle bir doğru geçiriniz ki, yarım çember ve üçgenden oluşan konveks bölge alanca eşit iki bölgeye ayrılsın.

Çözüm.



ABC üçgeninin A köşesi, BC yayının D orta noktasıyla birleştirilir, elde edilen AD doğrusuna $[BC]$ 'nin K orta noktasından paralel çizilir, bu paralelin AB kenarını kestiği nokta E ile gösterilirse, DE aranan doğru olur.

(**Çözenler:** *Ülkü Öztaş*)

Y.147. Dar açılı bir ABC üçgeninde yükseklik ayakları D, E, F olmak üzere DEF üçgeninin çevresi v, ABC üçgeninin çevresi $2u$ ise, $u \geq v$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. D, E, F noktaları ABC üçgeninin yükseklik ayakları olmak üzere,

$$|AF| = b\cos A,\ |AE| = c\cos A$$

ve

$$|EF|^2 = |AF|^2 + |AE|^2| - 2|AE||AF|\cos\alpha$$
$$= a^2\cos^2 A,$$

$|EF| = a\cos A$ bulunur. Benzer biçimde, $|FD| = b\cos B$, $|DE| = c\cos C$.

$$v = a\cos A + b\cos B + c\cos C\ , \qquad (1)$$

$$a = 2R\sin A,$$
$$b = 2R\sin B, \qquad (2)$$
$$c = 2R\sin C.$$

(R, çevrel yarıçaptır)

$$v = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C),$$

$$v = 4R\sin A\sin B\sin C,$$

$$v = 4R\frac{a}{2R}\frac{b}{2R}\frac{c}{2R} = \frac{2}{R}\frac{abc}{4R} = \frac{2A(ABC)}{R}$$

yani, $v = \frac{2ru}{R}$.

$R \geq 2r$ olduğundan $v \leq u$ bulunur.

(**Çözenler:** *Cemal Özboğa, Murat Aygen*)

Y.148. Bir çember üzerinde ardışık A, B, C, D noktaları alınarak ADC ve DCB açılarının açıortayları çiziliyor. Bu açıortayların kesiştiği K noktasından AB 'ye çizilen paralel doğru $[AD]$ ve $[BC]$ kenarlarını, sırasıyla, E ve F noktalarında kesiyor.

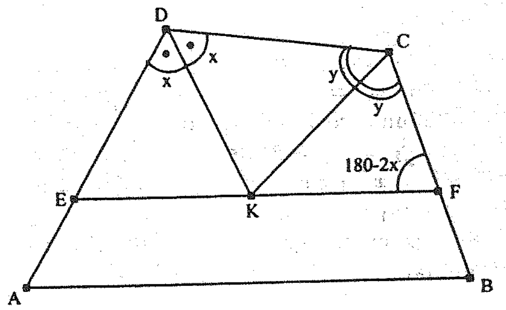
$$|EF| = |ED| + |FC|$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. Sözkonusu açıortaylar K noktasında kesişsin. Herhangi x, y açıları için

$$\sin 2x + \sin 2y = 2\sin(2y - x)\cos x$$
$$+2\sin(2x - y)\cos y,$$

$\hat{D} = 2x$ ve $\hat{C} = 2y$ olmak üzere; $\hat{E} = 180 - 2y$, $\hat{F} = 180 - 2x$ dir. $E\hat{K}D = 2y - x$, $C\hat{K}F = 2x - y$ olur. K noktasının ED, DC, CF kenarlarına uzaklığı h olsun.



Bu takdirde,

$$\frac{|EK| + |KF| - |ED| - |FC|}{h}$$
$$= \frac{1}{\sin 2y} + \frac{1}{\sin 2x} - \frac{\sin(2y - x)}{\sin x\sin 2y} - \frac{\sin(2x - y)}{\sin y\sin 2x}$$
$$= \frac{\sin 2x + \sin 2y}{\sin 2x\sin 2y}$$
$$-2\frac{\sin(2y - x)\cos x + \sin(2x - y)\cos y}{\sin 2x\sin 2y} = 0.$$

Böylece,

$$|EK| + |KF| = |ED| + |FC|,$$
$$|EF| = |ED| + |FC|.$$

(**Çözenler:** *Ülkü Öztaş*)

Y.149. $\sqrt{2}(xy + yz) \leq x^2 + y^2 + z^2$ eşitsizliğinin her x, y, z gerçel sayısı için doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Her a, b gerçel sayısı için $2ab \leq a^2 + b^2$ eşitsizliğinden,

$$\sqrt{2}xy = 2x\frac{y}{\sqrt{2}} \leq x^2 + \frac{y^2}{2}$$

ve

$$\sqrt{2}yz = 2\frac{y}{\sqrt{2}}z \leq \frac{y^2}{2} + z^2$$

çıkar; toplarsak istenen eşitsizlik bulunur. Eşitlik durumu $x = \frac{y}{\sqrt{2}}$ ve $\frac{y}{\sqrt{2}} = z$; yani $x = z = \frac{y}{\sqrt{2}}$ durumunda vardır.

(**Çözenler:** *Cemal Özboğa, Ülkü Öztaş*)

Y.150. Her n pozitif tamsayısı için $a_n = x^n + x^{-n}$ bir tamsayı ise, x reel sayısı hangi değerleri alabilir?

Çözüm. Önce $a_1 = x + \frac{1}{x}$ tamsayı ise geri kalan tüm $a_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ sayılarının da tam sayı olduğunu gözleyelim. $a_1^2 = (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = a_2 + 2$ 'den $a_2 = a_1^2 - 2$, $a_1^3 = (x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = a_3 + 3a_1$ 'den, $a_3 = a_1^3 - 3a_1$ olduğundan a_1 tamsayı iken a_2, a_3 ün de tamsayı olacağı görülür. Aynı yolla, binom açılımından

$$a_1^n = a_n + \binom{n}{1}a_{n-2} + \binom{n}{2}a_{n-3} + \cdots$$

bağıntısı gözlemimizi kanıtlar.

$x + \frac{1}{x} = k, k$ tamsayı ise, $x^2 - kx + 1 = 0$, $x = \frac{k \mp \sqrt{k^2-4}}{2}$ bulunur. x 'in gerçel olması istendiğinden; $k \geq 2$ tamsayıları için $x = \frac{k \mp \sqrt{k^2-4}}{2}$ şeklindeki sayılar istenen sayılardır.

(**Çözenler:** *Murat Aygen*)

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, Matematik Dünyası Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü 07058 ANTALYA adresine,

30 Mayıs 1998 tarihine kadar gönderiniz.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

- Konu sunuşları.
- Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
- Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.
- Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
- Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
- Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
- Matematik Dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üst üste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

Matematik Dünyası
Akdeniz Üniversitesi
Matematik Bölümü
07058 Antalya

adresine gönderilecektir