AŞKIN SAYILAR ÜZERİNE

Aytek Erdil
Bilkent Üniversitesi, Matematik Bölümü, Bilkent/ANKARA

Bu yazıda transandant ya da üstün diye de anılan aşkın sayılarla ilgileneceğiz. Aşkın sayılardan söz etmeye başlamadan önce, ilerde kullanacağımız kimi tanımları verelim:

Tanım. K kümesi için, bir $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow K$ örten fonksiyonu varsa, K **sayılabilir** bir kümedir denir.

Örnek 1. $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}$ fonsiyonunu

$$\begin{aligned} f(n) &= \tfrac{n}{2}, && n \text{ çift ise} \\ f(n) &= -\tfrac{n-1}{2}, && n \text{ tek ise} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlarsak f örten bir fonksiyon olur, ve $\mathbb{Z}$ sayılabilir bir kümedir.

Örnek 2. Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ da sayılabilir bir kümedir. $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}$ örten fonksiyonunu şöyle tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} f(n) &= \tfrac{m}{k}, && n = 2^m 3^k \text{ biçimindeyse } (k > 0) \\ f(n) &= -\tfrac{m}{k}, && n = 5^m 7^k \text{ biçimindeyse } (k > 0) \\ f(n) &= 0, && \text{diğer durumlarda} \end{aligned}$$

Örnek 3. Acaba $[0, 1]$ aralığındaki tüm gerçel sayıların kümesi sayılabilir midir ? Bu sorunun yanıtı 'Hayır !' dır. $[0, 1]$ 'in sayılabilir olmadığını, olmayana ergi yöntemiyle göstereceğiz:

$[0, 1]$ 'in sayılabilir olduğunu varsayalım. Tanım gereği, bir $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow [0, 1]$ örten fonksiyonu bulunmalıdır. Şimdi, $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$ sayılarının ondalık düzendeki yazılımlarını listeleyelim:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\cdots a_{1,j}\cdots \\ f(2) &= 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\cdots a_{2,j}\cdots \\ &\vdots \\ f(i) &= 0.a_{i,1}a_{i,2}a_{i,3}\cdots a_{i,j}\cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Yazılıştan da anlaşılacağı üzere $a_{i,j}, f(i)$ nin 0 'dan sonraki j 'yinci basamağını göstermektedir. f örten olduğundan, bu listede $[0, 1]$ aralığındaki tüm noktalar bulunmalıdır. b sayısını şöyle tanımlayalım: Her $i \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned} b_i &= 8, && a_{i,i} \neq 8 \text{ ise} \\ b_i &= 7, && a_{i,i} = 8 \text{ ise} \\ b &= 0, b_1 b_2 \cdots b_i \cdots && \end{aligned}$$

Bu tanıma göre b 'nin 0 dan sonraki i-inci basamağı, $f(i)$ 'nin i-inci basamağından farklıdır, bu yüzden b, listedeki her sayıdan farklıdır ve aynı zamanda $[0,1]$ aralığındadır. Bu da, $[0,1]$ 'deki her gerçel sayının listede bulunduğu varsayımıyla çelişir. Böylece $[0,1]$ 'in sayılabilir olmadığını kanıtladık.

Tanım. Sayılabilir olmayan kümlere **sayılamaz** denir.

Teorem 1. Sayılabilir kümelerin sayılabilir birleşimi sayılabilirdir.

Kanıt. Sayılabilir birleşimle söylenmek istenen, birleşimi alınan kümelerin oluşturduğu kümenin sayılabilir olmasıdır, yani birleşimi alınan kümeler A_α 'lar ise, $S = \{A_\alpha\}$ kümesinin sayılabilir olmasıdır. S sayılabilir olduğu için *örten* bir $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow S$ fonksiyonu vardır. $f(i) = A_i$ olacak biçimde A_α 'ları adlandıralım. f örten olduğundan $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ yazabiliriz. Bu yazılışta kimi $i \neq j$ için $A_i = A_j$ olabilir.

Her $j \in \mathbb{Z}^+$ için bir örten $f_j : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow A_j$ fonksiyonu vardır, çünkü A_j 'lerin her biri sayılabilirdi. $g : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \bigcup_{j\in\mathbb{Z}^+} A_j$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım:

$$
\begin{array}{ll}
m, n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ise,} & g(2^m 3^n) = f_m(n), \\
k, 2^m 3^n \text{ biçiminde değilse} & f(k) = a;\ \text{öyle ki } a,\ A_1 \text{ 'in herhangi bir elemanı.}
\end{array}
$$

Bu şekilde tanımladığımız g fonksiyonunun örten olduğu açıktır, bu yüzden $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}^+} A_j$, başka bir deyişle A_α 'ların birleşimi de sayılabilirdir. □

Tanım. Verilen sonlu sayıda kümenin kartezyen çarpımı şöyle tanımlanır:

$$\prod_{i=1}^{m} K_i := K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_m := \{(a_1, a_2, \ldots, a_m) \mid a_i \in K_i\}$$

Teorem 2. Sayılabilir kümelerin sonlu çarpımı sayılabilirdir.

Kanıt. İlk önce iki sayılabilir kümenin çarpımının sayılabilir olduğunu kanıtlayalım:

K_1 ve K_2 sayılabilirse, örten $f_1 : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow K_1$ ve $f_2 : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow K_2$ fonksiyonları vardır. $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow K_1 \times K_2$ fonksiyonunu şöyle tanımlayalım:

$$
\begin{array}{ll}
f(2^m 3^n) = (f_1(m), f_2(n)) \ , & \\
k, 2^m 3^n \text{ biçiminde değilse,} & f(k) = (f_1(1), f_2(1)).
\end{array}
$$

f fonksiyonunun örten olduğu açıkça görülür ve $K_1 \times K_2$ sayılabilirdir.

Şimdi, teoremi, kümelerin sayısı üzerine tümevarım yaparak kanıtlayabiliriz. $m = 1$ tane küme için teorem doğrudur, $m = k(\geq 1)$ tane küme için savın doğru olduğunu varsayalım. Verilen $k+1$ küme $K_1, \ldots, K_k, K_{k+1}$ olsun. Tümevarım varsayımımızdan $K_1 \times \cdots \times K_k$ kümesinin sayılabilir olduğunu biliyoruz, bu kümeye K' diyelim. O zaman $K_1 \times \cdots \times K_k \times K_{k+1} = K' \times K_{k+1}$ olur. Sayılabilir iki kümenin çarpımının sayılabilir olduğunu kanıtlamıştık. Bu yüzden $K' \times K_{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1} K_i$ de sayılabilirdir; böylece kanıt tamamlanır. □

Tanım. Bir sayı, rasyonel katsayılı bir polinomun köküyse, o sayıya **cebirsel** sayı denir. Bir cebirsel sayının derecesi, o sayının kökü olduğu en küçük dereceli, rasyonel katsayılı polinomun derecesi olarak tanımlanır.

Örnek. $\sqrt{5}$, ikinci dereceden bir cebirsel sayıdır, çünkü $\sqrt{5}$ 'in kökü olduğu en küçük dereceli, rasyonel katsayılı polinomlar (x^2-5) 'in rasyonel katlarıdır.

Rasyonel sayılarsa birinci dereceden cebirsel sayılardır.

Acaba cebirsel olmayan sayılar var mı? Bu sorunun yanıtını vermek için önce bir teoremi kanıtlayalım:

Teorem 3. Cebirsel sayılar kümesi sayılabilirdir.

Kanıt. $\mathcal{A}$ ile cebirsel sayılar kümesini, $\mathcal{A}_n$ ile de n-inci dereceden cebirsel sayılar kümesini gösterirsek, $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i$ olur. Yani, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_i$ 'lerin sayılabilir birleşimidir. n-inci dereceden rasyonel katsayılı polinomlarla, her bileşeni rasyonel olan sıralı $(n+1)$-liler arasında doğal bir birebir eşleme vardır. $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ polinomuyla $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ sıralı $(n+1)$-lisini eşliyoruz. $\{(a_0, a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{Q}\}$ kümesi, $\prod_{i=0}^{n} \mathbb{Q}$ şeklinde de belirtilebilir, ve bu küme sayılabilir kümelerin (her biri rasyonel sayılar kümesi) sonlu çarpımı olduğu için sayılabilirdir (Teorem 2'den). Demek ki n-inci dereceden, rasyonel katsayılı polinomlar kümesi sayılabilirdir. n-inci dereceden bir polinomun en çok n tane değişik kökü olabilir. Buna göre n-inci dereceden ve rasyonel katsayılı polinomların köklerinin oluşturduğu küme n tane sayılabilir kümenin birleşimidir, dolayısıyla sayılabilirdir. Bu küme $\mathcal{A}_n$ olduğuna göre, $\mathcal{A}_n$ 'nin sayılabilir olduğunu kanıtlamış olduk. $\mathcal{A}$, yani cebirsel sayılar kümesi, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\mathcal{A}_n$ 'lerin sayılabilir birleşimi olduğu için, sayılabilirdir (Teorem 1'den). □

Sonuç. Cebirsel olmayan sayılar vardır.

Kanıt. $\mathcal{A} \cap \mathbb{R} = \mathcal{A}'$ diyelim. $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ olduğundan $\mathcal{A}'$ kümesi de sayılabilirdir. $\mathbb{R}$ kümesi $[0,1]$ kapalı aralığını içerdiği ve $[0,1]$ sayılamaz olduğu için $\mathbb{R}$ de sayılamaz bir kümedir. Demek ki $\mathcal{A}' \subset \mathbb{R}$ ve $\mathcal{A}' \neq \mathbb{R}$ 'dir ve $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}'$ kümesi boş küme değildir. Bu küme cebirsel olmayan gerçel sayıların kümesidir. □

Burada kanıtını vermeyeceğimiz, ama bir sonraki teoremin kanıtında kullanacağımız bir teoremi anımsatalım:

Teorem [Ortalama Değer Teoremi]. f, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ olacak biçimde bir $c \in (a,b)$ vardır.

Teorem [Liouville]. α, derecesi n $(n > 1)$ olan bir cebirsel sayıysa, öyle bir $c = c(\alpha) > 0$ vardır ki, her p/q, $(q > 0)$ rasyonel sayısı için $|\alpha - p/q| > c/q^n$ 'dir.

Kanıt. α nın kökü olduğu, rasyonel katsayılı en küçük dereceli polinomlardan biri P olsun. Polinomlar her noktada türevlenebilir olduğundan P 'nin türevi olan P' tanımlıdır. Ortalama Değer Teoreminden, her $p/q \in \mathbb{Q}$ $(q > 0)$ için öyle bir ξ vardır ki $P(\alpha) - P(p/q) = (\alpha - p/q)P'(\xi)$ 'dir ve ξ, α ile p/q 'nun arasındadır.

p/q, P 'nin kökü değildir, öyle olsaydı, $xq - p$, P 'yi bölerdi ve $Q = \frac{P}{xq-p}$ derecesi P 'nin derecesinden az olan rasyonel katsayılı bir polinom olurdu. α 'nın derecesi 1 'den büyük olduğu için

α rasyonel olamaz, dolayısıyla α, p/q 'ya eşit değildir. Bu yüzden α aynı zamanda Q polinomunun da köküdür. Buysa P 'nin en küçük dereceli olmasıyla çelişir.

P rasyonel katsayılı bir polinom olduğundan $aP = R$ tamsayı katsayılı bir polinom olacak biçimde bir $a > 0$ tamsayısı vardır. $R(\alpha) = aP(\alpha) = 0$, $R(p/q) = aP(p/q) \neq 0$ 'dır.

R 'nin derecesi n olduğundan, $q^n R(p/q)$, 0 'dan farklı bir tamsayıdır. Dolayısıyla $|q^n R(p/q)| \geq 1$, yani $|R(p/q)| \geq \frac{1}{q^n}$ 'dir.

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| |P'(\xi)| = |P(\alpha) - P(p/q)| = |P(p/q)| = \frac{|R(p/q)|}{a} \geq \frac{1}{a.q^n}$$

'dir.

$|\alpha - p/q| \geq 1$ ise $c(\alpha) = 1/2$ seçeriz ve teorem sağlanır. $|\alpha - p/q| < 1$ ise, ξ, α ile p/q arasında olduğundan $|\xi - \alpha| < 1$ dir. Buradan $|\xi| - |\alpha| \leq |\xi - \alpha| < 1$ ve $|\xi| < 1 + |\alpha|$ elde edilir. $|\xi|$ üstten sınırlı olduğu için $|P'(\xi)|$ de üstten bir $s > 0$ sayısıyla sınırlıdır. $c(\alpha) = 1/sa$ seçersek

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{P(p/q)}{P'(\xi)}\right| > \frac{1}{s}|P(p/q)| \geq \frac{1}{asq^n} = \frac{c}{q^n}$$

buluruz ve kanıt tamamlanır. □

Bu teoremde önemli olan nokta, c 'nin sadece α 'ya bağlı olmasıdır. Bu teoremin yardımıyla aşkın sayılar kurmak kolaylaşıyor:

Sav. $\xi = 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + \cdots$ aşkın bir sayıdır.

Kanıt. ξ 'nin aşkın olmadığını, yani cebirsel olduğunu varsayalım. ξ 'nin derecesi k olsun. Liouville Teoreminden, öyle bir $c > 0$ vardır ki, her p/q rasyonel sayısı için $|\xi - p/q| > c/q^k$ 'dır. $n!(k-n-1) < \log_{10} 9c - 1$ olacak biçimde bir $n > 10$ tamsayısı bulabiliriz. Buradan $-(n+1)! < -k \cdot n! + \log_{10} 9c - \log_{10} 10$ buluruz. Buna göre

$$10^{-(n+1)!} < 10^{-k \cdot n!}\frac{9c}{10} \quad \text{ve} \quad 10^{-(n+1)!}\frac{10}{9} < \frac{c}{10^{k \cdot n!}} \qquad (*)$$

buluruz. p/q rasyonel sayısını $10^{-1!} + \cdots + 10^{-n!}$ olarak tanımlarsak, $q = 10^{n!}$ 'dir.

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| = 10^{-(n+1)!} + 10^{-(n+2)!} + \cdots < 10^{-(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots\right) \leq 10^{-(n+1)!}\frac{10}{9}$$

'dur. Liouville Teoremine göre $|\xi - p/q| > c/q^k$ olduğundan

$$\frac{c}{10^{k \cdot n!}} = \frac{c}{q^k} < \left|\xi - \frac{p}{q}\right| < 10^{-(n+1)!}\frac{10}{9} \quad \text{ve dolayısıyla} \quad \frac{c}{10^{k \cdot n!}} < 10^{-(n+1)!}\frac{10}{9} \quad \text{bulunur.}$$

Buysa $(*)$ 'da bulduğumuzun tam tersidir ve çelişkiye ulaşmış olduk; demek ki ξ cebirsel olamaz, yani ξ aşkın bir sayıdır. □

Aşkın Sayıların Tarihinden

Matematiğin en ünlü sayılarından e ve π de aşkındır. e 'nin aşkınlığı 1873'te Hermite tarafından kanıtlanmış, π 'nin aşkınlığıysa 1882'de Lindemann tarafından açıklanmış. π 'nin cebirsel olmadığını göstermek, insanlığın yanıtını yüzyıllardır aradığı bir soruyu da açıklığa kavuşturdu. Bu soru, alanı, verilen bir dairenin alanına eşit olan kareyi cetvel ve pergelle çizme problemiydi. π 'nin aşkın olmasının önemli sonuçlarından biri, $\sqrt{\pi}$ oranının cetvel ve pergelle çizilmesinin olanaksız olduğuydu, yani sadece cetvel ve pergel kullanarak, alanı verilen bir dairenin alanına eşit olan kare çizilemezdi.

1934'te açıklanan Gelfond-Schneider Teoremi, a ve b cebirsel, a, 0 ve 1 'den farklı ve b rasyonel değilse, a^b 'nin aşkın olduğunu söylüyordu. Bu teoremden $2^{\sqrt{2}}$ ve $\sqrt{7}^{\sqrt{3}}$ 'ün aşkın olduğu kolayca görülüyor. Aslında elimizde bir aşkın sayı varken, bir çok yeni aşkın sayı bulabiliriz, çünkü ξ aşkınsa, $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere ξ^n de aşkın bir sayıdır. Öyle olmasaydı ξ^n 'nin kökü olduğu rasyonel katsayılı polinom P olmak üzere, $Q(x) = P(x^n)$ alırsak, Q da rasyonel katsayılı bir polinom olur ve $Q(\xi) = P(\xi^n) = 0$ bulunur, bu da ξ 'nin aşkın olmasıyla çelişir.

Gelfond-Schneider Teoreminin yardımıyla e^π 'nin aşkın olduğu kanıtlanabilir: $e^{i\pi} = -1$ olduğundan $e^\pi = (-1)^{-i}$ 'dir. $-i$, $x^2 + 1 = 0$ denkleminin bir kökü olduğundan cebirseldir. -1 de cebirseldir ve 0 ve 1 'den farklıdır. $-i$ rasyonel olmadığından, Gelfond-Schneider Teoreminden $e^\pi = (-1)^{-i}$ 'nin aşkın olduğunu buluruz.

e^e, π^π ya da π^e 'nin aşkın olup olmadığıysa hâlâ bilinmiyor.

Meraklılara

Aşkın sayılara ilişkin en önemli kaynak Alan Baker'ın **Transcendental Number Theory** adlı kitabı. Bu kitap oldukça zor okunan bir kitap, ama daha okunaklı kitaplar da var. Shidlovskii'nin **Transcendental Numbers** adlı kitabı bunlardan biri. Aşkın sayılar üzerine yazılmış kitaplar olmasa da Ian Stewart'ın **Galois Theory** ve A. Jones, S. A. Morris, K. R. Pearson'ın **Abstract Algebra and Famous Impossibilities** adlı kitapları e ve π 'nin aşkın olduğunun kanıtlarını içeriyor.

KAYNAKÇA

[1] A. Baker, *A concise introduction to the theory of numbers*, Cambridge University Press, 1984.

[2] J. R. Munkres, *Topology: a first course*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1975.