

**ÜÇÜNCÜ ANTALYA  
MATEMATİK OLİMPİYADI  
İKİNCİ SEÇME SINAVI**

**Halil İ. Karakaş - İlham Aliyev**  
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,  
07058-ANTALYA

Üçüncü Antalya Matematik Olimpiyadının ikinci seçme sınavı 25 Nisan 1998 Cumartesi günü yapıldı. Sınava birinci seçme sınavında başarılı olan 75 öğrenci katıldı. Birincisinde olduğu gibi, ikinci sınav da Lise I-II ve Lise III olmak üzere iki kategoride yapıldı. Her iki kategoride de öğrencilere 5'er soru soruldu ve 3,5 saat süre verildi. Olimpiyadın ikinci seçme sınavında sorulan soruları, kısa çözümleri ile birlikte sunuyoruz.

**Lise I-II Soruları:**

1. Dört ardışık doğal sayının çarpımının asla bir tamkare (yani başka bir doğal sayının karesi) olamayacağını kanıtlayınız.
2. Yarıçapı 1 cm olan bir çember üzerinde rasgele 100 tane nokta işaretlenmiştir. Çember üzerinde, bütün işaretlenmiş noktalara olan uzaklıkları toplamı 100 cm'den büyük olacak şekilde bir noktanın bulunduğunu gösteriniz.
3.  $x, y, z$  negatif olmayan reel sayılar,  $x + y + z \leq 3$  ise,

$$\frac{2}{1+x} + \frac{2}{1+y} + \frac{2}{1+z} \geq 3$$

olduğunu kanıtlayınız.

4. Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2 \\ x_2 + x_3 = x_4^2 \\ x_3 + x_4 = x_1^2 \\ x_4 + x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

5. Kenar uzunluğu 1 cm olan bir  $ABC$  eşkenar üçgeninin  $[AB]$  kenarı üzerinde rasgele bir  $D$  noktası alınıyor.  $D$ 'nin  $AC$  ve

$BC$  üzerine dik izdüşümleri, sırasıyla,  $E$  ve  $F$ ;  $E$  ve  $F$ 'nin  $AB$  üzerine dik izdüşümleri, sırasıyla,  $E_1$  ve  $F_1$  olsun.

$$|E_1F_1| = \frac{3}{4} \text{ cm}$$

olduğunu gösteriniz.

**Lise III Soruları:**

1. Herhangi üç tek doğal sayı verildiğinde öyle bir dördüncü tek doğal sayı bulunabilir ki, bu dört sayının kareleri toplamı bir tamkaredir (yani başka bir doğal sayının karesi), kanıtlayınız.

2. Kenar uzunluğu 1 cm olan bir kare içine, alanları toplamı  $1997,5 \text{ cm}^2$  olan ve konveks olmaları gerekmeyen 1998 tane çokgen, karenin dışına taşmayacak biçimde rasgele yerleştiriliyor. Karenin en az bir noktasının sözkonusu çokgenlerden hepsi tarafından örtüldüğünü gösteriniz.

3.  $x, y, z$  reel sayılar,  $x \geq y \geq z > 0$  ise,

$$\frac{x^2 - y^2}{z} + \frac{z^2 - y^2}{x} + \frac{x^2 - z^2}{y} \geq 3x - 4y + z$$

olduğunu kanıtlayınız.

4. Bir koridorun, boyutları  $2 \times 11 \text{ m}$  olan dikdörtgen biçimindeki tabanı, boyutları  $1 \times 2 \text{ m}$  olan aynı tür halılarla, halılar birbirini örtmeksizin, kaplanmak isteniyor. Bu iş kaç farklı biçimde yapılabilir?

5.  $ABCD$  konveks (dışbükey) dörtgeninin  $[BC]$  ve  $[CD]$  kenarlarının orta noktaları, sırasıyla,  $P$  ve  $Q$  olsun. Eğer  $|AP| + |AQ| = d$  ise,  $ABCD$  dörtgeninin alanının  $\frac{1}{2}d^2$ 'den küçük olduğunu gösteriniz.

**ÇÖZÜMLER**

**Lise I-II Çözüm 1.**

$$\begin{aligned} a &= k(k+1)(k+2)(k+3) \\ &= (k^2+3k)(k^2+3k+2) \\ &= (k^2+3k)^2 + 2.(k^2+3k) + 1 - 1 \\ &= (k^2+3k+1)^2 - 1 \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2}[|ED| \cdot |AC| + |FD| \cdot |BC|]$$

$$= \frac{1}{2}[|ED| + |FD|] = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

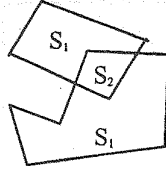
$$\Rightarrow |ED| + |FD| = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{ve } |E_1D| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |ED|, |F_1D| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |FD|$$

$$\Rightarrow |E_1D| + |F_1D| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}.$$

**Lise III Çözüm 1.**  $x, y, z$  tek doğal sayılar ise,  $x^2 + y^2 + z^2 = 2p + 1 = (p + 1)^2 - p^2$  sağlanacak biçimde  $p$  vardır. Buradan:  $x^2 + y^2 + z^2 + p^2 = (p + 1)^2$ .  $p$  tek sayıdır, çünkü aksi halde eşitlik ( $\text{mod } 4$ ) 'te çelişki verir.

**Lise III Çözüm 2.**



Çokgenlerin hepsine ait, pozitif alanlı bir bölge bulunduğunu gösterelim.  $S_k$  ile karenin öyle noktaları kümesinin alanını gösterelim ki, bu noktalar tam  $k$  tane çokgenle örtülmüş olsun. Varsayalım ki,  $S_{1998} = 0$  olsun. O halde

$$1997,5 = S_1 + 2 \cdot S_2 + 3 \cdot S_3 + \dots + 1997 \cdot S_{1997}$$

$$\leq 1997 \cdot (S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{1997})$$

$$\leq 1997 \cdot 1 = 1997$$

diye çelişki çıkar. [ Bu soruya ikinci sınavda tam puan alarak Lise III 'ler arasında birinci olan M. Akif Erişmiş değişik ve güzel bir çözüm vermiştir; bu çözümü özetliyoruz: Çokgenlerden her birinin alanı 1 'den küçük veya 1 'e eşittir. Karenin,  $i$ . çokgen tarafından örtülen kısmının alanına

$s_i$ , örtülme kısmının alanına da  $x_i$  diyelim.  $x_i + s_i = 1$ ,  $x_i \geq 0$ . Eğer bu  $x_i$  alanlı bölgeler kareyi tamamen kapatmıyorsa, kapatılmayan bölgedeki her nokta tüm çokgenler tarafından örtülmüş olur. Verilenlerden

$$1997,5 = \sum_{i=1}^{1998} s_i = \sum_{i=1}^{1998} (1 - x_i) = 1998 - \sum_{i=1}^{1998} x_i$$

ve dolayısıyla

$$\sum_{i=1}^{1998} x_i = 0,5 < 1$$

olduğu görülür. Böylece,  $x_i$  alanlı bölgelerin (bu bölgeler kesişmeseler dahi) kapatmadığı noktalar, hatta pozitif alanlı bir kısım bulunduğu görülür. Bu noktalar tüm çokgenler tarafından örtülür. ]

**Lise III Çözüm 3.**

$$x + y \geq 2z, z + y \leq 2x, x + z \geq y \Rightarrow$$

$$\frac{x + y}{z} \geq 2, \frac{z + y}{x} \leq 2, \frac{x + z}{y} \geq 1.$$

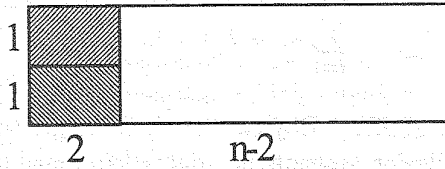
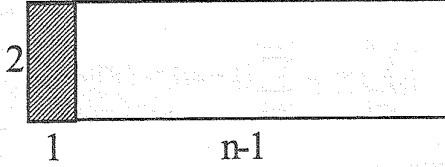
Bu eşitsizlikler, sırasıyla,

$$x - y \geq 0, z - y \leq 0, x - z \geq 0$$

ile çarpılarak toplanırsa problemde verilen eşitsizlik elde edilir.

**Lise III Çözüm 4.** Boyutları  $2 \times n$  olan koridorun tam  $x_n$  biçimde kaplandığını varsayalım.  $n = 1$  için  $x_1 = 1$  ve  $n = 2$  için  $x_2 = 2$  olduğu açıktır.  $n \geq 3$  olsun.  $2 \times n$  boyutlu koridorun herhangi bir örtüsünü düşünelim. O halde koridorun sol kısmı için

aşağıdaki şekillerden birisi geçerli olacaktır.



Birinci durumda  $x_n = x_{n-1}$  ve ikinci durumda  $x_n = x_{n-2}$  olur. Böylece,

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad (n = 3, 4, \dots)$$

indirgeme formülü elde edilir. Buradan

$$x_3 = 1 + 2 = 3, x_4 = x_3 + x_2 = 3 + 2 = 5,$$

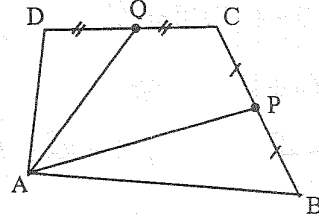
$x_5 = 8, \dots, x_{11} = x_{10} + x_9 = 89 + 55 = 144$  elde edilir.

**Not:**

$$x_n = \frac{1}{2^{n+1} \cdot \sqrt{5}} [(1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1}]$$

'dir.

**Lise III Çözüm 5.**



$A(ABCD) = 2.A(APCQ)$  'dur.  $|AQ| = x$  dersek,  $|AP| = d - x$  olur ve

$$A(ABCD) = 2.A(APCQ) < 2.2.A(\triangle APQ)$$

$$< 4 \cdot \frac{1}{2} x \cdot (d - x) < 2 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{2}$$

çıkar.

**Bir sonraki sayfada verilen  
Yarışma Problemlerine çözümlerinizi  
gönderirken lütfen şu noktalara  
dikkat ediniz:**

1. Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.
2. Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.
3. Çözümleri, **Matematik Dünyası, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA** adresine 31 Temmuz 1998 tarihine kadar gönderiniz.