OYUNLA EĞİTİM VE BİRKAÇ OYUN

Ali Nesin
Bilgi Üniversitesi, Matematik Bölümü,
İSTANBUL

Acaba, diye soruyorum kendi kendime, ilk ve ortaöğretimde, matematik öğrencilere oyun oynatarak öğretilse ne olur? İlkokul 1 'den başlayarak öğrenciler sürekli matematiksel oyun oynasalar... En fazla bir ay boyunca, öğretmenlerinin kendilerine sunduğu oyunu küçük gruplar oluşturarak irdelemeye çalışsalar... Sonra bir başka oyun irdelense... O oyunu çocuklar nasıl oynarlarsa kazanırlar? Hangi hamlelerle kazanma olasılıklarını artırırlar? En iyi stratejileri nedir? Birinci oyuncu mu, yoksa ikinci oyuncu mu olmak daha iyidir? Kazanma olasılığı kaçtır? Oyunun beklentisi nedir?

Oyun temelli bir matematik eğitimi daha iyi bir sonuç verir mi? Öğrenciler, belki daha az bilgili olarak liseden mezun olabilirler, ama, bana öyle geliyor ki, bildiklerini gerçekten, özümseyerek bilirler. Ayrıca, matematiği, düşünmeyi, araştırmayı daha çok severler, matematiğin özü olan "kanıtlamayı" daha iyi kavrarlar ve yaşama ve üniversite eğitimine daha iyi hazırlanmış olurlar. Örneğin, yazı-tura ya da zar atarak kesirli sayılar öğrenilebilir.

Üstüne üstlük, konular en fazla bir ay süreceğinden ve birbirinden olabildiğince bağımsız olacağından, hiç bir öğrenci bir aydan fazla arkadaşlarından geri kalmayacaktır. Bir oyunu iyi çözümleyebilen (analiz edebilen) bir öğrencinin kendine olan güveni artacaktır. Sürekli başarısızlık böylece önlenecektir.

Matematiği bir piramite benzetebiliriz: Temel yoksa, bir kat yukarı çıkamayız. Tarih dersi pek öyle değildir. Eski Yunan uygarlığı bilinmeden de 1789 Fransız Devrimi pekâlâ anlaşılabilir. On bir yıllık eğitimi boyunca, bir gencin bunalıma girme, bir ara sorunlarını aşamama, dolayısıyla derslerine çalışamama olasılığı yüksektir. Bir ay matematikten geri kalan öğrenci, bu bir aylık gecikme yüzünden bütün yaşamı boyunca matematikten geri kalacaktır, kendine olan güvenini yitirecektir. Bunun önlenmesi gerekmektedir. Birbirinden olabildiğince bağımsız dersler, bence, bu sorunu büyük ölçüde çözer.

Zorunlu olmadıkça sabaha kadar ders çalışan bir öğrenciye az rastlanır. Oysa çocuklar sabaha kadar oyun oynamaya can atarlar. Öğrenciler hem oyun oynasalar, hem de matematiği öğrenseler, böylece matematiği kendi kendilerine keşfedip öğrenseler, güzel olmaz mı?

Bugün matematik derslerinde bir lise öğrencisi ne öğreniyor?

Örneğin x^y sayısını öğreniyor. 2^3 sayısının 8 olduğunu bir ilkokul öğrencisi bile bilir. $2^{1/2}$ biraz daha zordur, ama $\sqrt{2}$ anlamına geldiğini ortaokul öğrencileri bilirler. Peki ya π^π sayısını, hatta 2^π sayısını, bir lise öğrencisi, yaklaşık bile olsa, hesaplayabilir mi? Nedir bu sayı? Bırakın hesaplamayı, anlamını bilir mi? Hatta π 'nin tanımını bile bilmez. Ama bilmediği bu sayılarla işlem yapmasını öğrenir...

Lise öğrencisine matris çarpımları öğretilir. Matrislerin nereden geldiği, neden öyle değil de böyle çarpıldığı öğretilmez. Matrislerin öyle değil de böyle çarpılması, bir matematikçinin kaprisinin, diretmesinin bir sonucu mudur? Kutsal bir kitapta mı yazmaktadır, yoksa matris çarpımı, gökten inme bir vahiy midir? Hayır! Matrislerin böyle çarpılması gerekmektedir. Matris çarpımını böyle tanımlamak gerekir. Bu, bir gereksinimdir, başka türlü olamazdı. Ama bu gereksinim lise öğrencisine gösterilemez. Lise öğrencisi bu gereksinimi anlamak için yeterli donanıma, bilgiye sahip değildir. Hatta birçok lise öğretmeni bile bilmez neden matrislerin böyle çarpıldığını. Sonuç: Matrisler konusu öğrenciye ezberletilir.

Hele determinantlar... Lise öğrencisi için determinantlar matematik değil sihirbazlıktır.

Limit, türev ve integral de doğru dürüst öğretilemez. "Öğretilmiyor" bile demiyorum, "öğretilemez" diyorum.

En çok düşünülmesi gereken ders olan matematik, okullarda ezberletilir. Öğrenciler ezberlerler ve matematikten nefret ederler.

Oysa matematik ne güzeldir! Kendi kendine keşfedilince ve anlaşılınca...

Matematik eğitiminde bilgiyi ön plana çıkarmamalıyız. En azından sekiz yıllık ilköğretimde, hatta ortaöğretimin ilk iki yılında. Oyun ağırlıklı bir matematik müfredatında, inanıyorum ki ezbere yer olmayacaktır. Her öğrenci öğrendiğini bilerek, anlayarak öğrenecek, yani bilgiyi özümseyecektir.

Bütün bu dediklerim iyi hoş da, mümkün mü? Bir öğrencinin sekiz-dokuz yılını dolduracak kadar matematiksel oyun var mı?

Belki bugün yok, ama düşünülürse, üstünde çalışılırsa zamanla bulunabilir. Ayrıca, klasik ya da oyunsal eğitim diye salt iki seçeneğimiz yok. Bunun bir ara yolu da bulunabilir. Haftada üç saat klasik matematik eğitimi, üç saat de oyunla eğitim gibi seçenekler de var. Bu konuda karar vermesi gerekenler daha çok pedagoglar ve eğitimcilerdir.

Bir başka sorun da üniversiteye giriş sınavları... Bilgi ağırlıklı olmayan bir ilk ve ortaeğitimden geçen iki milyona yakın gence, üniversite sınavlarında ne soracaksınız, onları nasıl değerlendireceksiniz? Bu soruya bir yanıtım yok. Her şeyin yanlış olduğu bir ortamda, doğru bir iş yapmanın ne derece zor olduğunu gösteriyor bu ikilem...

Birinci Oyun.

Aşağıdaki oyunu ilkokul birinci sınıf öğrencileri oynayabilirler:

Bir doğal sayıdan başlayarak oyuncular bir önceki oyuncunun söylediği sayıdan sırayla 1 ya da 2 çıkarırlar. Sıfırın altına inmek yasaktır! 0 diyen kaybeder. Örneğin, eğer 13 'ten başlanmışsa, oyuncular sırayla, 11 - **10** - 8 - **7** - 6 - **4** - 3 - **1** - 0 diyebilirler. Bu örnekte, en son sayıyı birinci öğrenci söylediğinden, birinci oyuncu oyunu kaybeder.

Böylece, çocuklar, hiç bir şey öğrenmeseler, çıkarmayı öğrenirler. Bu oyunu, kim nasıl oynarsa kazanır? Yanıtı oldukça kolaydır. Bu oyunda kazanmak için $3n+1$ biçiminde yazılan sayıları söylemek gerekmektedir. Bir kez $3n+1$ biçiminde yazılan bir sayı söyleyebilirsek, bundan sonra hep $3n+1$ biçiminde yazılan bir sayı söyleyebiliriz. Şöyle yaparız: Diyelim $3n+1$ dedik. Öbür oyuncu 1 çıkarırsa 2 çıkarırız, 2 çıkarırsa 1 çıkarırız. Böylece, sıra yeniden bize geldiğinde, daha önce söylediğimiz sayıdan toplam 3 çıkmış olur, yani $3(n-1)+1$ sayısını söylemiş oluruz. Böylece n bir azalmış olur. n ler azala azala 0 olduğunda 1 sayısını söylemiş oluruz. Öbür oyuncu zorunlu olarak 0 diyecek ve oyunu kaybedecektir.

Bu oyunun çözümlemesi şöyle yapılır:

- 0 diyen oyunu kaybedecektir.
- 1 diyen oyunu kazanacaktır, çünkü öbür oyuncu 0 demek zorundadır.
- 2 ya da 3 diyen oyunu kaybeder, çünkü öbür oyuncu 1 deyip oyunu kazanır.
- 4 diyen oyunu kazanır, çünkü öbür oyuncu ya 2 ya da 3 demek zorundadır ve oyunu kaybedecektir.
- 5 ya da 6 diyen oyunu kaybeder, çünkü öbür oyuncu 4 deyip oyunu kazanabilir...

Böyle bir çözümleme (analiz) yukardaki $3n+1$ stratejisini bulduracaktır.

Yukardaki oyunu öğretmen öğrencileriyle herkesin önünde oynamalıdır ve öğretmen hep kazanmalıdır. Bir süre sonra öğrenciler öğretmenin bildiği, kendilerinin bilmediği bir hinoğluhinlik olduğunu sezinleyeceklerdir. Eğer öğretmen, hamleleri, yani söylenen sayıları tahtaya yazarsa, öğrenciler öğretmenin stratejisini daha kolay anlarlar.

Öğretmen böylece "kazandıran strateji" kavramını öğrencilerin anlamasını sağlar. Sıra bir sonraki oyuna gelmiştir. Bir sonraki oyunda öğrenciler yalnızdır. Birbirleriyle oynarlar. Oyunu kavradıktan sonra "kazandıran strateji" 'yi bulmaya çalışırlar.

İkinci Oyun.

Yeni oyunumuzda, oyuncular, belirlenmiş bir sayıdan 1, 2 ya da 3 çıkarsınlar... Yine son hamleyi yapan, yani 0 diyen oyunu kaybediyor. Bu yeni oyunda, $4n+1$ biçiminde yazılabilen bir sayıyı söyleyen oyuncu oyunu kazanır. Şöyle kazanır: Öbür oyuncu 1 çıkarırsa 3 çıkarır, 2 çıkarırsa 2 çıkarır, 3 çıkarırsa 1 çıkarır. Böylece toplam 4 çıkmış olur... Dolayısıyla $2n$ hamle sonra $n=0$ olur, yani 1 söylenir. Öbür oyuncu 0 demek zorunda olduğundan, oyunu kaybeder.

Okulda yukardaki oyunları öğrenen çocuk, anababasıyla ya da büyük kardeşleriyle oynarsa, onları yenip kendine ve aklına güvenir, özgüveni artar! Hatta aile, parmak kadar çocuğun bu kadar zeki olmasına şaşar ve ona övgüler yağdırır.

Öğrenciden buna benzer yeni oyunlar bulması ve bulduğu oyunların en iyi stratejisini saptaması istenebilir.

Üçüncü Oyun.

Bir önceki oyunu biraz daha değiştirelim. O oyunun en iyi stratejisini yasaklayalım! Bir önceki oyunun en iyi stratejisi, öbür oyuncu bir önceki hamlesinde i çıkarmışsa, $4 - i$ çıkarmaktı. Bundan böyle bu strateji yasak olsun! Yani, bundan böyle, bir oyuncu 1 çıkarmışsa, sonraki oyuncu 3 çıkaramasın, 2 çıkarmışsa 2 çıkaramasın, 3 çıkarmışsa 1 çıkaramasın... Yine son hamleyi yapan kaybediyor.

Bu yeni oyunun en iyi stratejisi nedir? Bu yeni oyunun en iyi stratejisi $5n + 1$ biçiminde yazılabilen sayılar söylemektir. Diyelim, $5n + 1$ biçiminde yazılan bir sayı söyledik. Eğer öbür oyuncu 2 çıkarırsa 3 çıkarırız, 3 çıkarırsa 2 çıkarırız. Böylece toplam 5 çıkmış olur ve $5(n - 1) + 1$ sayısına ulaşırız. Peki ya öbür oyuncu 1 çıkarmışsa, yani $5n$ demişse? Ne yazık ki, 4 çıkaramayacağımızdan $5(n - 1) + 1$ sayısını söyleyemeyiz... Ne yapalım? Biz de 1 çıkaralım, yani $5n - 1$ diyelim. Öbür oyuncu 3 çıkaramayacağından (yasak!!!) $5n - 4$, yani $5(n - 1) + 1$ diyemez. Demek ki öbür oyuncu ya 1 ya 2 çıkaracaktır. 1 çıkarırsa 2 çıkaralım, 2 çıkarırsa 1 çıkaralım. Böylece $5(n-1)+1$ sayısına ondan önce biz varırız.

Dördüncü Oyun.

Yukardaki oyunları biraz değiştirerek ilginç oyunlar bulabiliriz. Örneğin, her oyuncu 2 ya da 3 çıkarsın. 1 çıkarmak yasak! Ve en son hamleyi yapan oyuncu oyunu kaybetsin! Bu oyunda 0 ya da 1 diyen oyuncu oyunu kaybeder, çünkü 0 ya da 1 den sonra sayı çıkarılamaz, yani 0 ya da 1 diyen en son hamleyi yapmış olur. 2 diyen kazanır, çünkü bir sonraki oyuncu, 1 çıkaramadığından, zorunlu olarak 0 diyecektir. Bu oyunu kim ve nasıl oynayarak kazanır?

Negatif Oyunlar.

Bir oyunda kaybedenin kazandığı oyuna, o oyunun **negatifi** denir! Örneğin, yukardaki oyunlarda, son hamleyi yapan oyuncu oyunu kaybediyordu. Son hamleyi yapan oyuncunun kazanacağı, yani 0 diyenin kazanacağı oyunları da ele alabiliriz. Bunlar da ilginç oyunlardır.

Sonlu Oyunlar.

Yukardaki oyunlar sonlu oyunlardı. Yani, oyunun uzunluğu (oyunun biteceği maksimum hamle sayısı) sınırlıydı ve oyunun her aşamasında her oyuncunun sonlu sayıda hamlesi vardı. Örneğin, 25 ten başlanan bir oyun en fazla 25 hamle sürebilir. Ayrıca, 1, 2 ya da 3 çıkarılan bir oyunda, her oyuncunun oyunun her aşamasında en fazla 3 hamlesi vardır. Demek ki yukardaki oyunlar sonlu oyunlardır.

Sonsuz Bir Oyun.

Aşağıdaki oyun sonsuzdur: Birinci oyuncu bir doğal sayı seçer, ikinci oyuncu bir sonraki hamleyi kimin yapacağını belirler. Bir sonraki oyuncu, ki bu oyuncu birinci ya da ikinci oyuncu olabilir, sayıdan 1 ya da 2 çıkarır. Sıra öbür oyuncuya geçer, o da 1 ya da 2 çıkarır. En son 0 demek zorunda olan oyunu kaybeder.

Bu oyunu ikinci oyuncu kazanır. Eğer birinci oyuncunun seçtiği sayı $3n+1$ biçimindeyse, ikinci oyuncu birinci oyuncunun bir hamle daha yapmasını söyler. Eğer, birinci oyuncunun seçtiği sayı $3n + 1$ biçiminde yazılmıyorsa, ikinci oyuncu bir sonraki hamleyi kendisinin yapacağını söyler ve bir sonraki hamlesinde 1 ya da 2 çıkararak sayıyı $3n + 1$ biçiminde yazılan bir sayı haline sokar.

Bu oyun hep biter, ama hamle sayısı sınırlı olmadığından sonlu bir oyun değildir. Örneğin, birinci oyuncu 25 derse, oyun en fazla 25 hamle sürer, 100 derse oyun 100 hamle sürebilir. Yani, oyunun uzunluğu sınırlı değildir.

Bir Başka Sonsuz Oyun.

Yuvarlak bir masanın üstüne iki oyuncu sırayla birbirine değmeyecek biçimde tavla pulları yerleştirsinler. Tavla pulunu masanın üstüne koyacak yer bulamayan oyuncu oyunu kaybetsin.

Bu oyunda oyunu bitiren maksimum hamle sayısı sonludur. Masanın ve tavla pullarının büyüklüğüne göre değişir bu sayı, ama sonludur. Ancak, her an her oyuncunun yapabileceği hamle sayısı sonsuzdur, çünkü tavla pulunu masanın üstüne sonsuz biçimde yerleştirebiliriz. Dolayısıyla bu oyun da sonsuzdur.

Bu oyunu birinci oyuncu kazanır. Pulunu masanın tam ortasına koyar. Sonraki hamlelerde, pulunu, öbür oyuncunun pulunu koyduğu yerin merkeze göre tam simetriğini oynar. Böylece oyun simetrik bir biçimde gelişir ve ikinci oyuncu pulunu koyabildiği sürece, birinci oyuncu da pulunu koyabilir. Dolayısıyla, birinci oyuncu, bu stratejiyle oynarsa, oyunu kaybetmez, demek ki kazanır.

Bu oyunu yuvarlak bir masayla değil de üçgen bir masayla oynarsak, aynı stratejiyi kullanamayız. Çünkü, yukardaki stratejiyle kimi zaman üçgenin dışına çıkmak zorunda kalabiliriz.

Açık Oyunlar.

Her bilginin iki oyuncuya da açık olduğu oyunlara **açık oyunlar** (İngilizcesi, "complete information game" 'dir.) denir. Örneğin kâğıt oyunlarının bir çoğu açık oyun değildir, bir oyuncunun kğıtlarını öbür oyuncu göremez. Yani bir oyuncunun bildiğini bir başka oyuncu bilmeyebilir.

Satranç, dama, go (çin daması), Othello, üç taş oyunları açık oyunlardır.

Tavlada bir oyuncunun bildiğini öbür oyuncu da bilir. Ama her ikisinin de bilmediği vardır: Bir sonraki zar. Bu yüzden tavla açık bir oyun değildir. Hatta tavlanın iki kişilik bir oyun olmadığı da söylenebilir. Zar, kazanma ya da kaybetme olanağı olmayan, ama hamle yapan üçüncü bir oyuncu olarak nitelenebilir.

İki Kişiden Birinin Kazandığı Oyunlar.

Satranç, dama, go, Othello, üç taş gibi oyunlarda iki oyuncu berabere kalabilirler. Ama ilk paragraflarda sözünü ettiğimiz (1 ya da 2 çıkar gibi) oyunlarda, iki oyuncudan biri mutlaka kazanır, beraberlik yoktur.

Eğer, satranç, dama, go, Othello, üç taş gibi oyunlarda, beraberlik halinde ikinci oyuncunun kazandığını varsayarsak, bu oyunlar, beraberliğin olmadığı, iki oyuncudan birinin mutlaka kazandığı oyunlara dönüşür. Böylece bu oyunların hepsi, beraberliğin olmadığı, açık, iki kişilik ve sonlu oyunlar olurlar. Bu tür oyunlar hakkında bir teorem biliyorum:

Bir Teorem. *Beraberliğin olmadığı, açık, iki kişilik ve sonlu oyunlarda, iki oyuncudan birinin her zaman kazanacağı bir strateji vardır.*

Bu teoremi kanıtlayalım. Kanıtımızı oyunun uzunluğu üzerinden tümevarımla yapacağız. Bir oyunun sürebileceği en yüksek hamle sayısına o oyunun **uzunluğu** diyelim. Örneğin, üç taş oyununun uzunluğu 9 'dur. Üç taşın daha önce bittiği de olur, ama 9 hamleden fazla sürmez ve 9 hamle süren üç taş oyunları vardır.

Beraberliğin olmadığı, açık, iki kişilik ve sonlu oyunlara **güzel oyun** diyelim. Her güzel oyunda, iki oyuncudan birinin kazanan stratejisi olduğunu kanıtlayacağım!

Her güzel oyun, her hamleden sonra, uzunluğu en az 1 eksilen bir başka oyuna dönüşür; ayrıca bu yeni oyun da güzeldir. Bu iki gözlem, bize oyunun uzunluğu üzerine tümevarım yapmamızı sağlar.

Birinci oyuncunun kazandığı oyunlara (yani birinci oyuncuyu kazandıran stratejinin olduğu oyunlara) A oyunları, ikinci oyuncunun kazandığı oyunlara da B oyunları diyelim.

Teoremimiz, her güzel oyunun ya A ya da B oyunu olduğunu söylüyor.

Uzunluğu n olan güzel bir oyun ele alalım. Bu oyuna G diyelim. G oyununun A ya da B oyunu olup olmadığını bilmiyoruz, kanıtlayacağız. Ama tümevarım varsayımına göre, uzunluğu n 'den küçük olan güzel oyunlar mutlaka ya A ya da B oyunlarıdır.

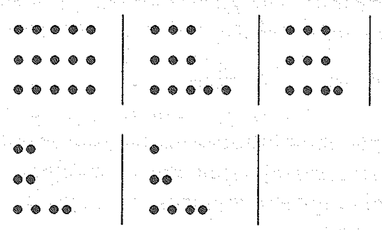
Diyelim, birinci oyuncuyuz ve 50 çeşit hamle yapabiliriz. Oyun, 50 değişik oyuna dönüşebilir. Bu oyunlara G_1, G_2, ..., G_{50} adlarını verelim. Bu yeni oyunların uzunlukları daha kısa olduğundan, her biri, tümevarım varsayımına göre, ya A oyunudur ya da B oyunu. Eğer hepsi birden A oyunuysa, hamlemiz ne olursa olsun öbür oyuncuya hep bir A oyunu sunarız. Bu yeni oyunda öbür oyuncu birinci oyuncu olduğundan oyunu kazanacaktır. Eğer oyunlardan biri bir B oyunuysa, oyunu o B oyununa dönüştürecek hamleyi yapalım. Böylece öbür oyuncuya ikinci oyuncunun kazanacağı bir oyun sunarız. Öbür oyuncu bu oyunda birinci oyuncu olduğundan oyunu kaybedecektir.

Dilediğimizi kanıtladık...

Her ne kadar, güzel oyunları iki oyuncudan birinin kazanacağını biliyorsak da, kazanan stratejiyi bulmak her zaman kolay olmayabilir. Örneğin, satrancın böyle bir stratejisi bilinmemektedir, satranç çok uzun bir oyundur ve bilgisayarlar bile bu kadar uzun oyunla başa çıkamazlar. Öte yandan üç taş görece kısa bir oyundur (9 uzunlukta). Bilgisayara bile gerek kalmadan, elle hesaplayarak, en iyi strateji bulunabilir. Yanlış anımsamıyorsam, üç taş oyununda ikinci oyuncu her zaman berabere kalabilir.

Kimin Kazandığı Bilinen Ama Nasıl Kazandığı Bilinmeyen Bir Oyun.

Oyunumuz iki kişi arasında ve $n \times m$ boyutlu bir dikdörtgenin içindeki tamnoktalarda oynanıyor. Örneğin, 5×3 boyutlu bir oyun, aşağıdaki şeklin en solundan başlar. Oyuncular sırayla bir nokta seçerler ve seçtikleri noktayla o noktanın kuzeyiyle doğusu arasında kalan noktalar silinir. Örneğin, 5×3 boyutlu oyunda, birinci oyuncu $(4, 2)$ noktasını seçerse, oyun bir sonraki duruma dönüşür. Sonraki hamleler: $(5, 1)$, $(3, 2)$ ve $(2, 3)$.



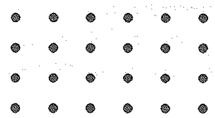
Oyun böyle sürer. Oyunda hiç nokta bırakmayan oyuncu oyunu kaybeder.

Elbet $(1, 1)$ noktasını seçen oyuncu oyunu kaybeder. Bu yüzden, kamikaze yapmak istemeyen bir oyuncu $(1, 1)$ noktasını zorunlu olmadıkça seçmez.

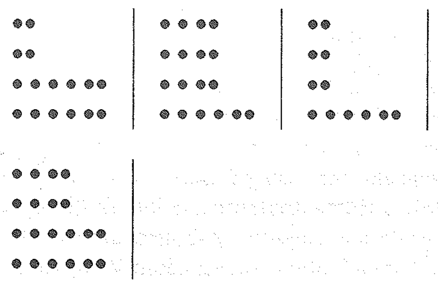
1×1 'lik oyunu birinci oyuncu kaybeder. Çünkü ilk hamlesini yapar yapmaz oyunda hiç nokta kalmaz. Eğer $n > 1$ ise, $n \times n$ 'lik oyunları birinci oyuncu kazanır. Bu oyunları kazanmak için birinci oyuncu nasıl oynamalıdır? Birinci oyuncu, kazanmak için $(2, 2)$ noktasını seçer. Bu ilk hamlesinden sonra, birinci oyuncu ikinci oyuncunun hamlelerinin simetriğini (bakışığını) oynar. İkinci oyuncu $(3, 1)$ noktasını seçerse, birinci oyuncu $(1, 3)$ hamlesini seçer. Birinci oyuncu bu stratejisini sürdürürse oyunu kaybedemez, yani kazanır.

1×1 'lik oyun dışında, her $n \times m$ 'lik oyunu birinci oyuncu kazanır. Dikkat edilirse, birinci oyuncunun **nasıl** oynayıp da kazanacağını bildiğimi söylemedim. Birinci oyuncunun nasıl oynayıp da kazanacağını ben de bilmiyorum. Ancak birinci oyuncunun kazanan bir stratejisi olduğunu biliyorum. Stratejiyi bilmiyorum, ama stratejinin varlığını biliyorum...

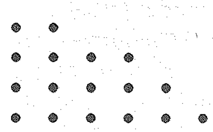
Herhangi bir $n \times m$ 'lik oyunu ele alalım. Örneğin, $n = 6$, $m = 4$ olabilir. Yani aşağıdaki oyunu ele almış olabiliriz:



Birinci oyuncuya Ahmet, ikinci oyuncuya Birol diyelim. Ahmet 'in yapabileceği bütün hamleleri ve bu hamlelerden sonra oyunun dönüşeceği bütün oyunları ele alalım. Bu oyunlara **X-oyunları** diyelim. Örneğin, $n = 6$, $m = 4$ ise,



oyunları X-oyunlarıdır. Öte yandan, aşağıdaki oyun bir X-oyunu değildir:



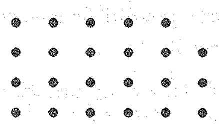
Ahmet 'in $n \times m$ 'lik oyunda nm tane değişik hamlesi olduğundan, nm tane X-oyunu vardır. Ahmet, Birol 'a bu X-oyunlarından birini bırakacaktır. Ve Birol önüne konan bu X-oyununun birinci oyuncusu olacaktır. Ahmet ise, bu X-oyununun ikinci oyuncusu olacaktır.

Eğer X-oyunlarından birini ikinci oyuncu kazanıyorsa, Ahmet, $n \times m$' lik oyunu bu X-oyununa dönüştürerek $n \times m$ 'lik oyunu kazanır. Çünkü Ahmet, bu X-oyununun ikinci oyuncusu olacaktır, dolayısıyla kazanacaktır.

Öte yandan, eğer X-oyunlarının hepsini birinci oyuncu kazanıyorsa, Ahmet, $n \times m$ 'lik oyunu kaybeder. Çünkü Ahmet ne oynarsa oynasın, Birol 'a bir X-oyunu sunacaktır, ve Birol bu X-oyununun birinci oyuncusu olacaktır, dolayısıyla kazanacaktır.

Şimdi, yukardaki $n \times m$ 'lik oyunu Ahmet 'in iyi oynayarak kazanabileceğini kanıtlayabilirim. Bir an için bunun doğru olmadığını varsayalım. Yani, bir an için, Ahmet 'in bu oyunu (nasıl oynarsa oynasın) kaybedeceğini varsayalım. Bir çelişki elde edeceğiz. Daha açıkçası, Ahmet 'in bu oyunu kazandığını kanıtlayacağız! Yani, Ahmet 'in $n \times m$ 'lik oyunu (nasıl oynarsa oynasın) kaybettiğini varsayıp, bu oyunu kazanacağını kanıtlayacağız! Böylece Ahmet 'in oyunu kazanacak biçimde oynayabileceği kanıtlanmış olacak.

Varsayımımıza göre $n \times m$ 'lik oyunu Ahmet kaybediyor. Demek ki X-oyunlarının hepsini birinci oyuncu kazanır. Şimdi, Ahmet en üst ve en sağdaki noktayı seçsin. Yani dikdörtgenden en köşedeki noktayı silsin. Örneğin $n = 6$, $m = 4$ ise, Birol 'a soldaki X-oyunu kalır. Şimdi sıra Birol 'da. Bu X-oyununda Birol ne oynarsa oynasın, Ahmet 'e gene bir X-oyunu bırakmak zorundadır! Öyle değil mi?



Yukardaki şekle biraz bakınca, Birol 'un her hamlesinin oyunu gene bir başka X-oyununa dönüştürdüğü anlaşılır. Demek ki Ahmet 'in önüne bir X-oyunu gelecektir ve Ahmet, önüne gelen bu yeni X-oyununun birinci oyuncusu olacaktır dolayısıyla kazanacaktır! İstediğimizi kanıtladık...

Kanıtımızı şöyle özetleyebiliriz:

(1) Varsayım: $n \times m$ 'lik oyunu Ahmet ne oynarsa oynasın kaybediyor.

(2) Demek ki bütün X-oyunlarını birinci oyuncu kazanıyor.

(3) Ahmet, ilk hamlesinde (n, m) noktasını seçsin.

(4) Birol, önüne gelen bu oyunu bir X-oyununa dönüştürmek zorundadır.

(5) Şimdi Ahmet bu X-oyununun birinci oyuncusu olacaktır ve (2) 'ye göre kazanacaktır.

(6) Demek ki Ahmet, $n \times m$ 'lik oyunu kazanır. Varsayımımızla çeliştik.

(7) Demek ki varsayım yanlıştır ve $n \times m$ 'lik oyunu Ahmet kazanır.

Çözümleyemediğim Bir Oyun.

Özlem Beyarslan ile aşağıdaki oyunu keşfettik: İki oyuncunun önünde n tane nesne var. Her iki oyuncu da nesneleri, kendi zevkine göre, 1 'den n 'ye kadar puanlıyor. Bu nesneler, yiyecek, sanat yapıtları, müstakbel eş gibi öznel beğeni gerektiren şeyler olabilirler. Sözgelimi, bir oyuncunun 6 puan verdiği nesneye öbür oyuncu 4 puan verebilir, yani oyuncuların nesneleri değerlendirmesi birbirinden değişik olabilir, ki zaten ancak o zaman oyun ilginç oluyor.

Her iki oyuncu da birbirlerinin (ve kendilerinin de elbet) puanlamasını biliyor.

İki oyuncu teker teker nesneleri oyundan atıyorlar. En son kalan nesnenin puanları oyuncuların puanlarını belirliyor. Amaç, en çok puanı almak.

Örneğin, diyelim 3 nesnemiz var. Bu nesnelere A, B ve C adlarını verelim. Oyuncuların bu nesneleri değerlendirmesi de şöyle olsun:

	Birinci Oyuncu	kinci Oyuncu
A	1	1
B	2	3
C	3	2

Her iki oyuncu da A 'yı pek sevmiyor olacak ki, en düşük puanı A 'ya vermişler. Birinci oyuncu C 'yi sevmiş en çok, ikinci oyuncu da B 'yi...

Sıra birinci oyuncuda. Eğer birinci oyuncu A 'yı oyundan atarsa, geriye B ve C kalır ve, ikinci oyuncu C 'yi oyundan atarak, oyunun B ile bitmesini sağlar. Bu durumda, birinci oyuncu 2, ikinci oyuncu 3 puan kazanmıştır. İkinci oyuncu için daha iyi bir sonuç olamazdı. Ama ya birinci oyuncu için???... Birinci oyuncu ilk hamlesini başka türlü yapsaydı 2 yerine 3 puan alabilir miydi?

Eğer birinci oyuncu, ilk hamlesinde B 'yi silerse, sonuç onun için daha iyi olur. O zaman geriye A ve C kalır. İkinci oyuncu bu iki nesneden lesini başka türlü yapsaydı 2 yerine 3 puan alabilir miydi?

Eğer birinci oyuncu, ilk hamlesinde B 'yi silerse, sonuç onun için daha iyi olur. O zaman geriye A ve C kalır. İkinci oyuncu bu iki nesneden C 'yi tercih eder, dolayısıyla A 'yı siler ve geriye C kalır. Bu durumda, birinci oyuncu 3, ikinci oyuncu 2 puan kazanmıştır.

Demek ki, bu oyunda birinci oyuncu, en çok puanı almak için, ilk hamlesinde B 'yi oyundan atmalıdır. Beklenmedik bir hamle... Çünkü birinci oyuncu en sevmediğini değil, ortalama sevdiğini oyundan atıyor...

Oyunun amacı öbürünü yenmek değil, en çok puanı toplamak. Yani, birinci oyuncu $2-1$ yenmek yerine $4-3$ yenilmeyi tercih eder, çünkü, sorun yenmek ya da yenilmek olmadığından, 2 puan yerine 3 puan almak birinci oyuncunun işine gelir.

Eğer, her iki oyuncu da aynı nesneye en yüksek puan olan n 'yi vermişse, o zaman oyun elbette $n-n$ sonuçlanması beklenir: Hiç bir oyuncu puanı $n-n$ olan nesneyi silmez.

Bu oyun sonludur ve saklı bilgisi yoktur. (Oyuncular birbirlerinin puanlamasını biliyorlar.) Bu tür oyunlarda her zaman her iki oyuncunun da birer "en iyi stratejisi" vardır. Örneğin, yukardaki örnekte, birinci oyuncunun en iyi stratejisi B 'yi silmekti.

Bu tür her oyunun bir en iyi stratejisi var da, genel bir en iyi stratejisi var mı yok mu bilmiyorum. Yani, her n için ve her türlü sıralama için işleyen bir en iyi strateji var mı? Ya da, oyuncular en iyi stratejiyle oynadıklarında, oyunun hangi sonuçla biteceğini söyleyen bir formül???

Bilmiyoruz!

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.
* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
* Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.
* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
* Matematik Dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile ya da PC 'de Latex programı yardımıyla, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üstüste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

Matematik Dünyası
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-Antalya

adresine gönderilecektir.