

COLLATZ PROBLEMİ

Cem Tezer

ODTÜ, Matematik Bölümü, 06531-ANKARA

Bu yazımda neredeyse 60 yıldan beri çözülemeyen bir problemi tanıtmak istiyorum.

Sunuş yazılarında, bazı filmlerin küçük çocuklar veya kalp hastalığı olan yetişkinler tarafından seyredilmesinin mahsurlu, hatta tehlikeli olduğunu işaret eden ikazlar bulunur. Böylesi ikazların asla bir tesiri olmadığını, hatta mevzubahis nesneyi bilakis cazip kıldığını bilmeme rağmen, ismi saygıdeğer bir matematikçiye ¹ izafe edilmiş haliyle eldeki yazının başlığını teşkil eden bu problemin hakiki bir bela olduğunu en baştan belirtmeyi de vicdan borcu addederim:

Collatz Problemi, $3n + 1$ Problemi, Syracuse Algoritması gibi muhtelif namlar altında yeryüzünü dolaşan bu problem kendisine ulaştırıldığında, P. Erdős günümüzdeki matematiğin böyle problemleri çözmeye hazır olmadığını beyan etmiş, S. Kakutani'nin 60 lı yılların başında bu problemi getirip, tanıtmasıyla birlikte Yale Üniversitesi matematik bölümünde bütün araştırmalar bir ay boyunca kesilmiş, hatta soğuk savaş yıllarının o vehim dolu ikliminde mizah ehli bazı akhevveler bu problemin, demokrasinin kalesi Amerika Birleşik Devletleri'ndeki ilmi hayata kast eden bir kızıl oyun olduğunu iddia etmişlerdir!

Bu füsunkâr belanın ne olduğu hususunda okuyucularımı daha fazla meraklandırmadan sadede geleyim:

Herhangi bir tabii sayı, yani 1, 2, 3, ... v. b. gibi kesin artı bir tamsayı alınsın: Sayı çiftse ikiye bölünsün, tekse üç katının bir fazlasının yarısı alınsın. Hangi tabii sayıyla başlanırsa başlansın, bu işlem tekrarlanarak muhakkak 1'e ulaşılacaktır: Doğru mu, yanlış mı?

Bir örnekle açıklayayım: Ele alınan tabii sayı 18 olsun. Bu sayı çift olduğundan, yarısı alınır ve 9 elde edilir. Bu ise bir tek sayı olup, üç katının bir fazlasının yarısı alınır, yani $(3 \times 9 + 1) / 2 = 14$ bulunur. Bu gene çift olup, bunun da yarısı alınarak $14 / 2 = 7$ çıkarılır. Dökümün devamını okuyucunun yoklamasına bırakalım:

$$18 \rightarrow 9 \rightarrow 14 \rightarrow 7 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 20 \rightarrow$$

$$10 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow \boxed{1} \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$$

Okuyucunun yoklamasını yaparak işlemi yakından tanıması maksadıyla iki örnek daha sunayım:

$$15 \rightarrow 23 \rightarrow 35 \rightarrow 53 \rightarrow 80 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow$$

$$5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow \boxed{1} \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots ;$$

$$37 \rightarrow 66 \rightarrow 33 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 38 \rightarrow 19 \rightarrow 29 \rightarrow$$

$$44 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 17 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow$$

$$5 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow \boxed{1} \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$$

Yukardaki örnekler, hangi tabii sayıdan başlanırsa başlansın 1'e dönüleceğini düşündürüyor. Yapılan binlerce bilgisayar denemesi bu tahmini teyid etmekte. ² Tabii ne kadar geniş çaplı olursa olsun hiç bir bilgisayar denemesi bir ispat teşkil edemez.

¹Lothar Collatz (Doğum yılı: 1910)

²Bu problemin bilgisayar denemelerine çok müsait olduğunu söylemeye gerek yok. İsteyen okuyucuya, kendi ihtiyacım için FORTRAN diliyle hazırladığım kısa bir programı gönderebilirim. MATHEMATICA gibi yüksek seviyeli yazılım kullanıcıları için daha kuvvetli değilse bile, çok daha rahat yaklaşımların var olduğunu tahmin ederim.

Bazen 1 in ortaya çıkması için çok beklemek gerekebilir: Mesela 27 yle başladığı takdirde 1 e ulaşmak için 70 adım gerekiyor!

Aşağı yukarı 1940 dan beri yüzlerce matematikçinin el attığı bu problem hakkında bütün kaynakları vermeye kalkışmak tabii ki akıl işi olmaz. Sahayı bu yazıda verileceklerin ötesinde tanımak isteyen okuyucu umumî ve rahat bir başlangıcı [3] le yapabilir. Neşeli bir çeşitleme için [4] ü tavsiye ederim. Asıl problemin çözümü yönünde bir katkı getirmemekle birlikte sahanın dinamik sistemlerle temasını esas alan, çok yeni bir kaynak olarak da [6] 'dan bahsedebilirim.

Ben (gene eksiksiz veya yetkin olmak iddiasından tamamen beri) incelemelerim neticesinde, eldeki problemin çözümü doğrultusunda en esaslı adımın C. J. Everett'e ([1]) ait bir teorem olduğu kanaatine vardım. Yazımın gayesi de bu teoremi sunmak olacak. Bu yazıda temas edilmemekle birlikte, meraklısının muhakkak incelemesi gerektiğine inandığım diğer bir teorem de Çek matematikçileri I. Korec ve Š. Znam'a ait ([2]).

Söylediklerimi matematik diline aktarmak için gösterimlerimi tesbit ederek başlamak istiyorum: Tamsayılar kümesi \mathbf{Z} ile, tabii sayılar, yani kesin artı tamsayılar kümesi de \mathbf{N} ile gösterilsin. \mathbf{Z} üzerinde devirli aritmetik yaparken herhangi $a, b \in \mathbf{Z}$ ve $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$ verildiğinde, $a - b$ nin n ye bölündüğünü göstermek üzere $a \equiv b \pmod{n}$ yazılsın. Mesela, bu suretle $x \in \mathbf{Z}$ 'nin çift, $y \in \mathbf{Z}$ 'nin de tek olduğunu belirtmek için $x \equiv 0 \pmod{2}$, $y \equiv 1 \pmod{2}$ yazmak kafidir.

A, B, C kümeleri ve $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ dönüşümleri gözönüne alındığında g nin f ye (sıraya dikkat!) dönüşümce eklenmesini $g \circ f : A \rightarrow C$ ile gösterelim. Yani, herhangi bir $x \in A$ için $g \circ f(x) = g(f(x))$ olsun. Bir D kümesi ve D yi gene kendisine gönderen bir $h : D \rightarrow D$ dönüşümü ve bir $n \in \mathbf{N}$ verildiğinde de, h nin kendi kendisine dönüşümce n defa eklenmesini $h^n : D \rightarrow D$ ile gösterelim. Bu suretle $h^1 = h$, $h^2 = h \circ h$, $h^{n+1} = h \circ h^n = h^n \circ h$ ve en açık şekliyle de

$$h^n = h \circ h \circ h \circ \dots \circ h \quad (n \text{ defa})$$

olacaktır. Bunların dışında, h^0 daima birim dönüşümü gösterecektir. Yani her $z \in D$ için, $h^0(z) = z$ olsun.

$\varphi : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ dönüşümü

$$\left. \begin{array}{l} n \equiv 0 \pmod{2} \text{ ise} \\ n \equiv 1 \pmod{2} \text{ ise} \end{array} \right\} \varphi(n) = \begin{cases} n/2 \\ (3n+1)/2 \end{cases}$$

şeklinde tarif edilsin.

Okuyucunun da kolaylıkla yoklayabileceği üzere, φ dönüşümü sadece bir denklem kullanılarak

$$\varphi(n) = n + \frac{1}{4} - \frac{(-1)^n}{4}(2n+1)$$

olarak da tarif edilebilir.

Bu dönüşüm, elbette yazımın başında gündelik dilde tasvir ettiğim işleminden başka bir şey olmayıp, bu yazıda *Collatz dönüşümü* olarak anılacaktır.

TAHMİN A : Her $n \in \mathbf{N}$ için, $\varphi^k(n) = 1$ olacak şekilde bir $k \in \mathbf{N}$ vardır.

Collatz problemi ve emsali adlar altında tanınan ve bugün, yani ortaya atılmasından yaklaşık 60 yıl sonra hala çözümü bilinmeyen problem, ya TAHMİN A yı ispat etmek veya yanlış olduğunu gösterecek bir misal bulmak problemidir.

Bu noktada okuyucunun dikkatini görünüşte daha zayıf bir tahmine çekmek istiyorum:

TAHMİN B : $n \geq 2$ şeklindeki her $n \in \mathbf{N}$ için, $\varphi^k(n) < n$ olacak şekilde bir $k \in \mathbf{N}$ vardır.

Tahmin edilebileceği üzere, görünüş aldatıcı. Dikkatle bakılınca, TAHMİN A ve TAHMİN B nin birbirine tamamen denk iki önerme olduğu görülebilir: TAHMİN A doğruysa, TAHMİN B nin de doğru olacağı aşikardır. Bir de TAHMİN B nin doğru olduğu varsayılınsın ve herhangi bir $n \in \mathbf{N}$ alınsın. TAHMİN B ye göre, $\varphi^k(n) < n$ olacak şekilde bir $k \in \mathbf{N}$ bulunabilir. Aynı yolla, bu sefer de

TAHMİN B yi $n_1 = \varphi^k(n)$ ye uygulayarak $\varphi^{k+k_1}(n) = \varphi^{k_1}(n_1) < n_1 < n$ olacak şekilde bir $k_1 \in \mathbb{N}$ bulunabilir. Gene $n_2 = \varphi^{k+k_1}(n)$ için aynı işlem tekrarlanarak $\varphi^{k+k_1+k_2}(n) = \varphi^{k_2}(n_2) < n_2 < n_1 < n$ olacak şekilde bir $k_2 \in \mathbb{N}$ bulunabilir. Bu yolda devam edildiğinde her adımda en az 1 eksileceği için $\varphi^{k+k_1+k_2+\dots}(n)$ muhakkak 1 e vasil olacaktır. Yani, TAHMİN A da doğru olmalıdır.

Sonlu bir K kümesi verildiğinde, K nin öğelerinin sayısı $\#K$ ile gösterilsin. Bir $A \subseteq \mathbb{N}$ için, eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{x \in A \mid 1 \leq x \leq n\}}{n} = 1$$

ise A kümesine \mathbb{N} içinde *yoğun* bir küme denilsin. Tamsayılar hakkında herhangi bir \mathcal{P} önermesi gözönüne alındıkda, eğer,

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{P}, n \text{ için doğrudur.}\}$$

kümesi \mathbb{N} içinde yoğun bir küme ise, \mathcal{P} *hemen hemen her* $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur denilsin.

Artık yazımın esasını teşkil eden teoremi sunabilirim:

TEOREM : (C. J. Everett, 1977, [1]) TAHMİN B hemen hemen her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

Bu teoremin ispatını, gerekli hazırlıkları bir dizi yardımcı teorem vasıtasıyla sunduktan sonra vereceğim.

Önce, bir ikazda bulunmak isterim: Dikkatli okuyucularımın fark etmiş olacakları gibi, TAHMİN A ve TAHMİN B denk önermeler olmakla birlikte, TAHMİN B nin hemen hemen her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olması, TAHMİN A nın da hemen hemen her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olduğu manasına gelmez ! Gerçek şu ki, TAHMİN A nın da hemen hemen her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olduğunun ispatı bugün için harikulade büyük bir katkı olacaktır. Okuyucularımdan birinin bu yönde gayret göstererek, servet değilse bile haklı bir şöhret kazanması, bu arada memleketimizin yüzünü ağartması benim için büyük bir saadet olurdu.

Herhangi bir $N \in \mathbb{N}$ için, uzunluğu N olup, sadece 0 ve 1 lerden müteşekkil satır vektörler kümesi $\mathcal{A}[N]$ ile gösterilsin. Örnek olarak, $N = 1, 2, 3, 4$ hallerinde

$$\mathcal{A}[1] = \{ [0], [1] \}$$

$$\mathcal{A}[2] = \{ [0, 0], [0, 1], [1, 0], [1, 1] \}$$

$$\mathcal{A}[3] = \{ [0, 0, 0], [0, 0, 1], [0, 1, 0], [0, 1, 1],$$

$$[1, 0, 0], [1, 0, 1], [1, 1, 0], [1, 1, 1] \}$$

$$\mathcal{A}[4] = \{ [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1], [0, 0, 1, 0],$$

$$[0, 0, 1, 1], [0, 1, 0, 0], [0, 1, 0, 1], [0, 1, 1, 0], [0, 1, 1, 1],$$

$$[1, 0, 0, 0], [1, 0, 0, 1], [1, 0, 1, 0], [1, 0, 1, 1],$$

$$[1, 1, 0, 0], [1, 1, 0, 1], [1, 1, 1, 0], [1, 1, 1, 1] \}$$

olacaktır. (Tecrübeli bir matematikçi için

$$\mathcal{A}[N] = \{0, 1\}^{\{0, 1, 2, \dots, N-1\}}$$

sunuşunun kafi olduğunu belirteyim.)

$$\#\mathcal{A}[N] = 2^N$$

olduğunun ispatını (N üzerinde tümevarım tavsiye ederek) okuyucuya bırakıyorum.

$N \in \mathbb{N}$ verilmiş olsun. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ ye Collatz dönüşümü $0, 1, 2, \dots, N-1$ defa uygulanırken bir kenara her bir adımda ortaya çıkan sayıya karşılık, mevzubahis sayı çiftse 0, tekse 1

yazmak suretiyle $\mathcal{A}[N]$ nin bir ögesi elde edilebilir. Örnek olarak, $N = 7$, $n = 18$ hali incelenirse

$\varphi^0(18) = 18$	(çift)	-----	0
$\varphi^1(18) = 9$	(tek)	-----	1
$\varphi^2(18) = 14$	(çift)	-----	0
$\varphi^3(18) = 7$	(tek)	-----	1
$\varphi^4(18) = 11$	(tek)	-----	1
$\varphi^5(18) = 17$	(tek)	-----	1
$\varphi^6(18) = 26$	(çift)	-----	0

bulunacaktır. Demek ki 18 e karşılık $[0, 1, 0, 1, 1, 1, 0] \in \mathcal{A}[7]$ elde edilmekte.

Her $n \in \mathbb{N}$ ye karşılık bu usulle elde edilen $\vec{u} = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}] \in \mathcal{A}[N]$, ardarda N Collatz dönüşümünün tesiri altında n nin başına gelenleri hülasa ettiği için $\vec{u} \in \mathcal{A}[N]$ 'ye n 'nin N adımlık seyir defteri denilsin.

Şimdi gene işi matematik diline aktararak sağlama alalım: Verilen her $N \in \mathbb{N}$ için,

$$SD_N : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}[N]$$

dönüşümü her $n \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq k \leq N - 1$ ye tabi her $k \in \mathbb{Z}$ için

$$u_k \equiv \varphi^k(n) \quad (2)$$

olmak üzere

$$SD_N = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}]$$

şeklinde tarif edilsin. SD_N ye N adımlık seyir defteri dönüşümü denilsin.

İlk yardımcı teoreme geçmeden evvel $N = 4$ haline yakından bakmak ve SD_4 ün 1 den 16 ya kadarki tabii sayılar üzerindeki tesirinin tam bir dökümünü çıkartmak, bu suretle de seyir defteri dönüşümü fikrine iyice açıklık getirmek istiyorum. Aşağıdaki dökümde her satırda önce mevzubahis tabii sayı, sonra o sayının ardarda 0, 1, 2, 3 defa uygulanan Collatz dönüşümü altındaki seyri, son olarak da tekabül eden 4 adımlık seyir defteri verilmektedir:

1	---	(1, 2, 1, 2)	→	[1, 0, 1, 0]
2	---	(2, 1, 2, 1)	→	[0, 1, 0, 1]
3	---	(3, 5, 8, 4)	→	[1, 1, 0, 0]
4	---	(4, 2, 1, 2)	→	[0, 0, 1, 0]
5	---	(5, 8, 4, 2)	→	[1, 0, 0, 0]
6	---	(6, 3, 5, 8)	→	[0, 1, 1, 0]
7	---	(7, 11, 17, 26)	→	[1, 1, 1, 0]
8	---	(8, 4, 2, 1)	→	[0, 0, 0, 1]
9	---	(9, 14, 7, 11)	→	[1, 0, 1, 1]
10	---	(10, 5, 8, 4)	→	[0, 1, 0, 0]
11	---	(11, 17, 26, 13)	→	[1, 1, 0, 1]
12	---	(12, 6, 3, 5)	→	[0, 0, 1, 1]
13	---	(13, 20, 10, 5)	→	[1, 0, 0, 1]
14	---	(14, 7, 11, 17)	→	[0, 1, 1, 1]
15	---	(15, 23, 35, 53)	→	[1, 1, 1, 1]
16	---	(16, 8, 4, 2)	→	[0, 0, 0, 0]

Dikkat edilirse, seyir defterleri sütununda mümkün olan 16 tane 4 adımlık seyir defterinin hepsi mevcuttur. Yani 1 den 16 ya kadarki tabii sayıların her birine ayrı bir seyir defteri tekabül ediyor. Biraz daha teknik bir dille söylemek gerekirse, SD_4 dönüşümü, $\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 16\}$ ve $\mathcal{A}[4]$ kümeleri arasında bire bir ve örten bir münasebet kuruyor. Aşağıda sunulacak olan ilk yardımcı teorem, bunun sadece $N = 4$ için değil, bütün $N \in \mathbb{N}$ ler için doğru olduğunu gösterecek.

YARDIMCI TEOREM I : Verilen her $N \in \mathbb{N}$ için, SD_N dönüşümü $\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 2^N\}$ kümesini bire bir (ve tabii ki örten) bir şekilde $\mathcal{A}[N]$ ye gönderir.

İspat: N üzerinde tümevarım yapılacak. $N = 1$ hali aşikar: Basit bir yoklamayla, SD_1 in $\{1, 2\}$ kümesini bire bir şekilde $\mathcal{A}[1] = \{\{0\}, \{1\}\}$ 'e gönderdiği görülebilir. SD_N nin, $\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 2^N\}$ kümesini bire bir bir şekilde $\mathcal{A}[N]$ ye gönderdiği varsayılarak, SD_{N+1} in, $\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 2^{N+1}\}$ kümesini bire bir bir şekilde $\mathcal{A}[N+1]$ e gönderdiği gösterilecek. $1 \leq n, n' \leq 2^{N+1}$ e tabi $n, n' \in \mathbb{N}$ için,

$$SD_{N+1}(n) = SD_{N+1}(n') = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_N] \in \mathcal{A}[N+1]$$

olsun.

$$n = m + 2^N Q$$

$$n' = m' + 2^N Q'$$

ve

$$1 \leq m, m' \leq 2^N$$

olacak şekilde $m, m' \in \mathbb{N}$, $Q, Q' \in \{0, 1\}$ alındıkda,

$$SD_N(m) = SD_N(m') = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}] \in \mathcal{A}[N]$$

olup (neden ?), tümevarıma temel teşkil eden varsayım muvacehesinde $m = m'$ olmalıdır. Buna karşılık $Q = u_N = Q'$ olup (neden ?) $n = n'$ bulunur. \square

Okuyucunun sabrına sığınarak, ufak bir gösterim unsuru daha: $n, N \in \mathbb{N}$ verildiğinde, $SD_N(n) = [u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}]$ ise $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{N-1}$ toplamı $\sigma_N(n)$ ile gösterilsin.

YARDIMCI TEOREM II : Verilen her $N \in \mathbb{N}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\frac{\varphi^N(n)}{n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{N-\sigma_N(n)} \left(\frac{5}{3}\right)^{\sigma_N(n)}$$

dir.

İspat: Önce çok basit bir gerçeğe dikkat çekeyim: Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ alınsın. n çiftse, $n = 2q, q \in \mathbb{N}$ yazarak

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{n/2}{n} = \frac{2q/2}{2q} = \frac{1}{2},$$

n tekse, bu sefer de $n = 2q + 1$ yazarak,

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{3n+1}{2n} = \frac{6q+4}{2(2q+1)} < \frac{5}{3} \quad (\text{Neden ?})$$

olacaktır. Demek ki n, φ nin ona $1, 2, \dots, N$ defa uygulanması esnasında $N - \sigma_N(n)$ defa $1/2$ yle, $\sigma_N(n)$ defa da $5/3$ den küçük bir takım sayılarla çarpılacaktır. Böylece,

$$\frac{\varphi^N(n)}{n} = \frac{\varphi^N(n)}{\varphi^{N-1}(n)} \frac{\varphi^{N-1}(n)}{\varphi^{N-2}(n)} \dots \frac{\varphi^2(n)}{\varphi^1(n)} \frac{\varphi^1(n)}{n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{N-\sigma_N(n)} \left(\frac{5}{3}\right)^{\sigma_N(n)}$$

dir. \square

Şimdi, YARDIMCI TEOREM II 'ye göre, herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ verildiğinde, bu sayının N adımlık seyir defterindeki 0 ların sayısı 1 lerin sayısından " çok küçük " değilse, yani $\sigma_N(n)/N$ nin $1/2$ den " çok büyük " olmadığı takdirde, $\varphi^N(n) < n$ dir. Bu " çok küçük değil " ve " çok büyük değil " tabirleriyle ne kastedildiği YARDIMCI TEOREM III le vuzuha kavuşacak.

YARDIMCI TEOREM III : Verilen her $N \in \mathbb{N}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\sigma_N(n) < \left[\log_2\left(\frac{10}{3}\right)\right]^{-1} N$$

ise,

$$\frac{\varphi^N(n)}{n} < 1$$

dir.

İspat: Önce $[\log_2(10/3)]^{-1} = \log_{10/3}(2) \approx 0.575717$ olduğu hatırlansın. Basit bir hesap

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^N(n)}{n} &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{N-\sigma_N(n)} \left(\frac{5}{3}\right)^{\sigma_N(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^N \left(\frac{10}{3}\right)^{\sigma_N(n)} < \left(\frac{1}{2}\right)^N \left(\frac{10}{3}\right)^{[\log_2(10/3)]^{-1}N} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^N \left(\frac{10}{3}\right)^{\log_{10/3}(2)N} = \left(\frac{1}{2}\right)^N 2^N = 1 \end{aligned}$$

olduğunu gösterecektir. \square

Aslında okuyucuların çoğunun bildiğini tahmin ettiğim bazı özdeşlikleri bir yardımcı teorem çerçevesinde sunarak devam etmek istiyorum:

YARDIMCI TEOREM IV : Herhangi bir $N \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} &= 2^N, \quad \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} k = 2^{N-1}N \\ \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} k^2 &= 2^{N-2}N(N-1) + 2^{N-1}N. \end{aligned}$$

İspat: Birinci özdeşlik,

$$\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} x^k = (1+x)^N$$

de $x = 1$ koyularak elde edilebilir. Gene aynı özdeşliğin x 'e göre türevi alınarak

$$\sum_{k=1}^N \binom{N}{k} k x^{k-1} = N(1+x)^{N-1},$$

ve bunda da $x = 1$ ikamesiyle ikinci özdeşlik bulunur. Yukardaki özdeşlik x le çarpılarak

$$\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} k x^k = N(1+x)^{N-1}x,$$

bunun x e göre türevi alınarak

$$\sum_{k=1}^N \binom{N}{k} k^2 x^{k-1} = N(N-1)(1+x)^{N-2}x + N(1+x)^{N-1},$$

ve en nihayet $x = 1$ ikamesiyle de üçüncü özdeşlik çıkarılır. \square

Hedefi hatırlatayım: İstenilen şey, $n \geq 2$ şeklindeki $n \in \mathbb{N}$ ler arasında, $\varphi^k(n) < n$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ bulunabilenlerin \mathbb{N} içinde çoğunlukta olduğunu göstermektir. Buraya kadar yapılanlar, bu hedefin $\mathcal{A}(N)$ içindeki vektörlerden 0'ları ve 1'lerin sayıca yakın olanlarının çoğunlukta olduğunu göstermekle ilgisini işaret eder tabiatıyla. Bu yüzden verilen her $\varepsilon > 0$ için

$$\mathcal{A}_\varepsilon[N] = \{[u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}] \in \mathcal{A}[N] \mid \frac{u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{N-1}}{N} < \frac{1}{2} + \varepsilon\}$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon^o[N] = \{[u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}] \in \mathcal{A}[N] \mid \left(\frac{u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{N-1}}{N} - \frac{1}{2}\right)^2 < \varepsilon^2\}$$

kümelere göz önüne alınsın. Tabii ki $\mathcal{A}_\varepsilon^\circ[N] \subseteq \mathcal{A}_\varepsilon[N]$ dir.

Olasılıklar hesabı ile tanışıklığı olan okuyucularım, şimdi sunacağım yardımcı teoremin, (zayıf şekliyle) Büyük Sayılar Kanunu adlı çok mühim bir teoremin çıkış noktasını teşkil eden Çebişef eşitsizliği ([5]) ile yakından ilgili olduğunu hissedeceklerdir.

YARDIMCI TEOREM V :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\mathcal{A}_\varepsilon[N]}{2^N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\mathcal{A}_\varepsilon^\circ[N]}{2^N} = 1$$

İspat:

$$\begin{aligned} (2^N - \#\mathcal{A}_\varepsilon[N])\varepsilon^2 &= (\#\mathcal{A}[N] - \#\mathcal{A}_\varepsilon[N])\varepsilon^2 \leq (\#\mathcal{A}[N] - \#\mathcal{A}_\varepsilon^\circ[N])\varepsilon^2 \\ &\leq \sum_{\{u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}\} \in \mathcal{A}[N] - \mathcal{A}_\varepsilon^\circ[N]} \left(\frac{u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{N-1}}{N} - \frac{1}{2} \right)^2 \\ &\leq \sum_{\{u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}\} \in \mathcal{A}[N]} \left(\frac{u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{N-1}}{N} - \frac{1}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Şimdi, $0 \leq k \leq N$ ye tabi her $k \in \mathbb{Z}$ için, $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{N-1} = k$ olacak şekildeki $\{u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}\} \in \mathcal{A}[N]$ lerin sayısı N nin k li kombinezonlarının sayısına eşit olduğundan (neden ?)

$$\begin{aligned} (2^N - \#\mathcal{A}_\varepsilon[N])\varepsilon^2 &\leq \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \left(\frac{k}{N} - \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \left[\left(\frac{k}{N} \right)^2 - \frac{k}{N} + \frac{1}{4} \right], \end{aligned}$$

buradan da YARDIMCI TEOREM IV kullanılarak

$$(2^N - \#\mathcal{A}_\varepsilon[N])\varepsilon^2 \leq \frac{1}{N^2} [2^{N-2}N(N-1) + 2^N N] - \frac{1}{N} 2^{N-1}N + \frac{1}{4} 2^N = \frac{1}{4N} 2^N$$

ve

$$\frac{\#\mathcal{A}_\varepsilon[N]}{2^N} \geq 1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2}$$

elde edilir. Böylece her $\varepsilon > 0$ için,

$$1 - \frac{1}{4N\varepsilon^2} \leq \frac{\#\mathcal{A}_\varepsilon^\circ[N]}{2^N} \leq \frac{\#\mathcal{A}_\varepsilon[N]}{2^N} \leq 1$$

olup, N sonsuza gönderilerek istenilen limitler çıkarılır. \square

Artık esas teoremin ispatı sunulabilir:

Teoremin İspatı: Verilen bir $n \in \mathbb{N}$ için,

$$F(n) = \#\{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n \text{ olup, bir } k \in \mathbb{N} \text{ için } \varphi^k(n) < n \text{ dir}\}$$

yazılsın. Yani $F(n)$, 1 ile n arasındaki tabii sayılardan, Collatz dönüşümünün ardarda uygulamalarıyla kendisinden kesin küçük hale getirilebilenlerin sayısı olsun. Burada,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n)}{n} = 1$$

olduğu gösterilecek. Kolaylık olmak üzere, $[\log_2(10/3)]^{-1} - 1/2$ yerine λ yazarak, YARDIMCI TEOREM I ve III vasıtasıyla,

$$F(2^N) \geq \#\mathcal{A}_\lambda[N]$$

bu suretle de

$$1 \geq \frac{F(2^N)}{2^N} \geq \frac{\#A_\lambda[N]}{2^N}$$

bulunur. YARDIMCI TEOREM V yoluyla da

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F(2^N)}{2^N} = 1$$

çıkar. Şimdi, $n \geq 2$ ye tabi her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$2^N \leq n < 2^{N+1}$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Diğer taraftan, $2^N \leq n < 2^{N+1}$ e tabi $n \in \mathbb{N}$ ler arasında $F(n+1) = F(n)$ yi sağlayanların sayısı en çok

$$L = 2^{N+1} - 2^N - (F(2^{N+1}) - F(2^N))$$

olabilir. Demek ki $2^N \leq n < 2^{N+1}$ e tabi $n \in \mathbb{N}$ ler için iki ihtimal vardır: Ya $2^N \leq n \leq 2^N + L$ veya $2^N + L < n < 2^{N+1}$. Birinci halde aşikar olarak,

$$\frac{F(n)}{n} \geq \frac{F(2^N)}{2^N + L}$$

dir. İkinci halde de

$$\begin{aligned} \frac{F(n)}{n} &\geq \frac{F(2^N) + n - (2^N + L)}{n} = \frac{F(2^N) + n - (2^N + L)}{2^N + L + n - (2^N + L)} \\ &\geq \frac{F(2^N)}{2^N + L} \quad (\text{Neden ?}) \end{aligned}$$

olmalıdır. Böylece, her iki halde de,

$$\frac{F(n)}{n} \geq \frac{F(2^N)}{2^N + L} = \frac{F(2^N)}{2^{N+1} + F(2^N) - F(2^{N+1})}$$

dir. Demek ki

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{F(n)}{n} \geq \frac{F(2^N)}{2^{N+1} + F(2^N) - F(2^{N+1})} \\ &= \frac{F(2^N)}{2^N} \left[2 + \frac{F(2^N)}{2^N} - 2 \frac{F(2^{N+1})}{2^{N+1}} \right]^{-1} \end{aligned}$$

olup, n ve dolayısıyla N sonsuza gönderilerek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n)}{n} = 1 [2 + 1 - 2]^{-1} = 1$$

çıkarılır. □

KAYNAKLAR

- [1] C. J. Everett : Iteration of the number theoretic function $f(2n) = n$, $f(2n+1) = 3n+2$, *Advances in Mathematics* 25 (1977) 42-45.
- [2] I. Korec, Š. Znam : A note on the $3n+1$ problem, *American Mathematical Monthly* 94 (1987) 771-772.
- [3] J. C. Lagarias : The $3n+1$ problem and its generalisations, *American Mathematical Monthly* 92 (1985) 3-23.
- [4] D. A. Rawsthorne : Imitation of an iteration, *Mathematics Magazine* 58 (1985) 172-176.
- [5] A. Tortrat : *Calcul des Probabilités*, Masson et Cie, Paris 1963.
- [6] G. J. Wirsching : *The Dynamical Systems Generated by the $3n+1$ Problem*. Lecture Notes in Mathematics No. 1681, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg 1998.