NEDİR ORDİNAL SAYILAR?

Nurettin Ergun
İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü,
İSTANBUL

Evet nedir ordinal sayılar? Dilerseniz bu kısa yazıda onlar üzerine biraz bilgi edinelim. Çok özel ve çok ilginç "iyi sıralanmış" kümelerdir ordinal sayılar. Küme denilen kavramı sanırım biraz olsun biliyoruz. Küme konusunda, kaçınılmaz olarak, el yordamı ile, matematiksel olarak pek sağlıklı sayılamayacak şeyler söylenir lise ve üniversite yıllarında. Aksiyomatik ve titiz biçimde anlatılmadıkça, koca usta Cantor'un düştüğü türden yanılgılara, elbette bilmeden ve ayrımına bile varmadan düşmek, neredeyse kaçınılmaz olur. İyi tanımlanmış bir nesneler ya da matematiksel işaretler topluluğuna küme derseniz eğer, bu yüzyılın başında pek çok örneğiyle karşılaşılan çatışkılarla (paradokslarla) yüz yüze gelirsiniz. Bertrand Russell 'ın gözlemlediği şu ünlü çatışkı gibi: $X \notin X$ gerçekleyen tüm X kümelerinin topluluğu, iyi tanımlanmış, tanımı görünürde belirli bir belirsizlik içermeyen bir topluluktur; o halde yukardaki tanımlamaya uyup S topluluğuna rahatlıkla "küme" derseniz eğer, şu çelişik sonuçlardan kurtulamazsınız: Acaba S kümesi $S \in S$ mi yoksa $S \notin S$ mi gerçekler, ne dersiniz?. S kümesinin tanımı nedeniyle $S \in S$ gerçeklenebilmesi için gerek ve yeter koşul $S \notin S$ gerçeklenmesidir, gözleyebiliyor musunuz? Peki bu ve benzeri çatışkılardan kaçınmak için ne yapmalı? İlk kez E. Zermelo ve A. Fraenkel ikilisi 1910 'ların başında, usta geometrici Euklides 'in kendilerinden binlerce yıl önce yaptığına benzer bir biçimde, aksiyomatik bir inşa verdiler, birbirlerinden bağımsız olarak. Bugün kısaca 'Zermelo-Fraenkel Aksiyomatik Kümeler Kuramı' diye bilinen bu aksiyomatik modelde, bu usta ikili, açık biçimde tanımlamadan sınıf, küme, $\in$ bağıntısı kavramlarını ve mantık niceleyicileri kullanarak, bir takım formüller biçiminde dokuz temel aksiyomu listelediler; örneğin

$$\text{Varlık Aksiyomu} : \exists x(x = x)$$

'dir. Daha sonra Zermelo 'nun üzerinde çok tartışılan ünlü "Seçme Aksiyomu" bu aksiyomlara eklendi. Böyle bir aksiyomatik modelde, işin gerçekten en güç ve zorlu yanı bu modelin tutarlı olduğunu (aksiyomların çelişik sonuçlar üretmiyen bir yapı oluşturduğunu) kanıtlayabilmektir. Bizim için yaşamsal önemi olan bilgiler, şimdilik, şunlardır: Ancak uygun bir A sınıfı için $X \in A$ gerçekleyen bir X sınıfına küme denilir ve bu modelde hiç bir X kümesi için $X \in X$ gerçekleşmez! Bu sonuncusu kanıtlanabilen bir önermedir, yanlış anlaşılmasın. Evet, bu adımdan sonra kümeler konusunda, eskisi gibi "el yordamı" ile çalışmayı sürdüreceğiz!

Biz sözü fazla uzatmadan, şimdi öncelikle sıralama kavramı konusunda çok temel bir iki şey söyleyip ana konuya geçmek istiyoruz. Bir X kümesi üzerinde, aşağıda yazılı

(i) Her $x \in X$ için $x \leq x$,
(ii) $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise, $x = y$,
(iii) $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise, $x \leq z$

koşullarını gerçekleyen ve $\leq$ işareti ile yazılan bağıntıya bir kısmi sıralama denir. Üçüncü koşula geçişlilik koşulu denir. Dikkat edilirse X kümesinde x, y elemanları ne olursa olsun

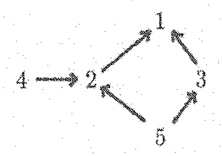
(iv) ya $x \leq y$ ya da $y \leq x$ olur

biçiminde bir koşul koşulmadığı için (eğer ek olarak bu son koşul da koşulmuşsa, artık $\leq$ bağıntısına yeni bir isim verilir ve ona tümel sıralama ya da lineer sıralama denir), başka bir deyimle herhangi iki x ve y elemanı için (iv) koşulu güvence altına alınmamışsa, bu sıralamaya X kümesini kısmen sıralamıştır denir. Kısmi sıralanmış bir X kümesinde bir x ve y çifti için eğer yukardaki (iv) koşulu gerçeklenmişse bu elemanlara kıyaslanabilir elemanlar denir. Kısacası kısmi sıralanmış bir kümede kıyaslanabilir olmayan en az bir eleman çifti var olabilir, ama apaçıktır ki her tümel sıralanmış küme elbette kısmi sıralanmıştır ve böyle bir kümede tüm eleman çiftleri kıyaslanabilirler.

Pozitif tamsayılar kümesini $\mathbf{Z}^+$ ile gösterelim. Bu kümede

$$2 \leq 4 \leq 6 \leq \cdots \quad , \quad 1 \leq 3 \leq 5 \leq \cdots$$

biçiminde tanımlanan $\leq$ bağıntısı bir kısmi sıralamadır, ama herhangi bir çift pozitif tamsayı ile herhangi bir tek pozitif tamsayı bu sıralamada kıyaslanabilir değildir! Bir başka örnek verelim: İlk beş pozitif tamsayıdan oluşan küme üzerinde aşağıdaki gibi bir kısmi sıralama tanımlansın:



Kısacası, ancak ve yalnız bir a sayısından bir b sayısına $\rightarrow$ işareti ile ulaşılabiliyorsa $a \leq b$ yazılsın ve elbette ayrıca her a elemanı için $a \leq a$ geçerli olsun. Bu bir, tümel sıralama olmayan kısmi sıralamadır, çünkü örneğin 4 ve 5 elemanları kıyaslanabilir değildir. $\mathbf{Z}^+$ kümesinde, ancak ve yalnız n tamsayısı m 'nin bir tam katı olduğunda $m \leq n$ yazılsın. Bu da tümel olmayan bir kısmi sıralamadır, çünkü $2 \leq 3$ ve $3 \leq 2$ geçerli değildir. Boş olmayan herhangi bir X kümesinin tüm altkümelerinin oluşturduğu $P(X)$ kümesinde, ancak ve yalnız $A \subseteq B$ ise $A \leq B$ yazılsın. Apaçıktır ki $P(X)$ kümesi, $\leq$ bağıntısıyla kısmi sıralanmıştır, ama eğer X kümesinde en az iki eleman, sözgelimi x ve y varsa, ne $\{x\} \leq \{y\}$ ve ne de $\{y\} \leq \{x\}$ geçerli olabilir. Buna karşılık $\mathbf{Z}^+$ kümesinde

$$1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq \cdots$$

ve

$$2 \leq 4 \leq 6 \leq \cdots \leq 1 \leq 3 \leq 5 \leq \cdots$$

biçiminde iki ayrı tümel sıralama tanımlayabiliriz; ikinci sıralamada n, m pozitif tamsayıları ne olursa olsun $2n \leq 2m - 1$ gerçeklendiğini gözlüyorsunuz, değil mi? İlkokuldan beri öğrendiğimiz birincisine, $\mathbf{Z}^+$ kümesindeki alışılagelen sıralama denir. Eğer kısmi sıralanmış bir X kümesinde, ek olarak şu inanılmaz

(iv') X 'in boş olmayan her altkümesinin bir en küçük elemanı vardır

koşulu gerçekleniyorsa, işte o zaman X kümesine yepyeni bir isim verilir ve ona iyi sıralanmış küme denir. Kısmi sıralanmış bir X kümesinde boş olmayan bir A altkümesinin en küçük elemanı, her $x \in A$ ile kıyaslanabilen ve $a_0 \leq x$ gerçekleyen özel $a_0 \in A$ elemanına denir. Böyle bir eleman varsa tektir, neden dersiniz? Bu eleman kısaca $min(A)$ işareti ile gösterilir. İyi sıralanmış bir kümede her farklı eleman çiftinin kıyaslanabilir olduğunu gözlüyorsunuz, değil mi? Demek ki her iyi sıralanmış küme tümel sıralanmıştır. Buna karşılık gerçel sayılar üzerindeki alışılagelen, ancak ve yalnız $y - x \in \mathbf{R}^+$ ya da $x = y$ ise $x \leq y$ yazılsın, biçiminde tanımlanan tümel sıralama bir iyi sıralama değildir, çünkü gerek $\mathbf{R}^+$ kümesinin ve sözgelimi gerekse $\sqrt{2} < r$ gerçekleyen tüm r rasyonel sayılarının kümesinin (yani $(\sqrt{2}, \infty) \bigcap \mathbf{Q}$ kümesinin) en küçük elemanları yoktur, neden? $\mathbf{Z}^+$ kümesinde yukarıda tanımlanan son iki tümel sıralamanın birer iyi sıralama olduğunu görebiliyor muyuz? Hayır mı? O zaman öncelikle aşağıdaki şu ünlü önermeyi inceleyelim:

Önerme: $\mathbf{Z}^+$ kümesinde, tümevarım ilkesi ile, alışılagelen sıralamanın bir iyi sıralama olması iddiaları eşdeğerdir.

Gerçekten, $\mathbf{Z}^+$ kümesindeki alışılagelen sıralama bir iyi sıralama olsun ve aynı küme üzerine koşulmuş bir $\mathbf{k}$ koşulu, varsayalım ki $1 \in \mathbf{Z}^+$ için geçerli olsun ve üstelik $n \in \mathbf{Z}^+$ için bu koşulun doğruluğu $n+1$ sayısı için de doğruluğunu getirsin. $\mathbf{k}$ koşulunun geçerli olmadığı pozitif tamsayılar kümesi, bunu $A \subseteq \mathbf{Z}^+$ ile gösterelim, varsayalım ki boş olmasın. Bu takdirde iyi sıralanma hipotezinin kaçınılmaz bir gereği olarak $min(A) = n_A \in A$ var olurdu. Bu ise, $\mathbf{k}$ koşulunun $1 \in \mathbf{Z}^+$ için doğru olduğu bilindiğinden, $1 < n_A$ verir ve üstelik $n_A - 1$ tamsayısı A 'ya ait olamayacağından, $\mathbf{k}$ koşulunun $n_A - 1 \in \mathbf{Z}^+$ ve dolayısıyla yukarda söylenenler nedeniyle n_A için doğru olması gerekirdi; kısacası A nın boştan farklılığı varsayımı bize önce $n_A \in A$ ve sonra da $n_A \notin A$ çelişkisini verirdi. Demek ki $A = \emptyset$ olmak, başka bir deyimle $\mathbf{k}$ koşulu tüm pozitif tamsayılar için doğru olmak zorundadır. O halde alışılagelen sıralama bir iyi sıralama ise $\mathbf{Z}^+$ kümesinde tümevarım ilkesi geçerli olur. Şimdi tersini gösterelim. $\mathbf{Z}^+$ kümesinde tümevarım ilkesi geçerli olsun. Şimdi $n \in \mathbf{Z}^+$ ne olursa olsun, $\mathbf{Z}^+$ kümesinin n elemanlı tüm altkümelerinin alışılagelen sıralamaya göre iyi sıralandığını iddia ediyoruz. $n = 1$ elemanlı altkümeler için bu iddia apaçıktır; $n = 2$ elemanlı altkümeler için, bu, alışılagelen sıralamanın bir tümel sıralama olmasının kolay bir sonucudur. n elemanlı tüm altkümelerinin alışılagelen sıralamaya göre iyi sıralandığını varsayalım. $\mathbf{Z}^+$ kümesinin $n+1$ elemanlı herhangi bir

$$B = \{N_1, N_2, \cdots, N_n, N_{n+1}\}$$

altkümesi alınsın. $\{N_1, N_2, \cdots, N_n\}$ kümesi, varsayım gereği

$$N_{i_1} \leq N_{i_2} \leq \cdots \leq N_{i_n}$$

biçiminde iyi sıralanacaktır. Aynı varsayım gereği $\{N_{i_1}, N_{i_2}, \cdots, N_{i_{n-1}}, N_{n+1}\}$ n elemanlı kümesi de iyi sıralanır. Bu iyi sıralanmalardan yararlanarak B kümesinde bir iyi sıralanma kolaylıkla belirlenir, nasıl? O halde tümevarım ilkesi gereği, $\mathbf{Z}^+$ kümesinde boş olmayan tüm sonlu altkümeler iyi sıralanırlar. Şimdi herhangi bir sonsuz elemanlı $A \subseteq \mathbf{Z}^+$ altkümesi için, $\mathbf{Z}_n^+ = \{1, 2, \cdots, n\}$ kümeleri yardımıyla

$$A = A \cap \mathbf{Z}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap \mathbf{Z}_n^+)$$

nedeniyle ve sonuçta uygun bir n_0 pozitif tamsayısı sayesinde $\emptyset \neq A \cap \mathbf{Z}_n^+$ gerçekleştiğinden bu sonlu altküme için var olan en küçük eleman

$$min(A \cap \mathbf{Z}_n^+) = min(A)$$

gerçekler; gerçekten herhangi bir $n \in A$ için, ister $n \leq n_0$ ister $n_0 \leq n$ olsun $\min(A \cap \mathbf{Z}_n^+) \leq n$ geçerlidir, neden? Elbette $min(A \cap \mathbf{Z}_n^+) \in A$ olur. Önermenin kanıtlanması bitirilmiştir.

Peki $\mathbf{Z}^+$ kümesindeki

$$2 \leq 4 \leq 6 \leq \cdots \leq 1 \leq 3 \leq 5 \cdots$$

tümel sıralaması neden bir iyi sıralamadır? Artık bunu gösterebilmelisiniz! Son olarak, bu yazıda kullanacağımız önemli bir kavramı tanımlayalım. Bir X iyi sıralanmış kümesinde herhangi bir $x \in X$ elemanının belirlediği segment ya da başlangıç aralığı

$$S(x) = \{y \in X : y \leq x, y \neq x\}$$

altkümesine denir. Kolayca $min(X - S(x)) = x$ gözlenebilir.

Evet artık, bir ordinal sayıyı tanımlama zamanı geldi. Bu tanımlama aslında çeşitli biçimlerde yapılabilir; aşağıdaki dahiyane tanımlamaya, 40 yılı aşan uzun bir olgunlaşma dönemi sonunda ulaşılmıştır. Vereceğimiz tanımlama Alman usta Johann von Neumann 'ındır (1923). Geleneksel olarak ordinal sayılar Yunan harfleri α, β, γ ve ν ile gösterilirler.

Tanım: Bir α kümesine, ancak ve yalnız aşağıdaki üç koşulu gerçeklerse bir *ordinal sayı* denir:
(1) α nın her elemanı bir kümedir,
(2) $\beta \in \alpha$ ise $\beta \subset \alpha$ olur,
(3) (2) 'deki $\in$ bağıntısı α için iyi sıralamadır.

Hemen belirtelim, bir A kümesi bir B kümesi tarafından kapsanıyorsa ve üstelik $A \neq B$ ise, bu durum kısaca $A \subset B$ işareti ile gösterilir. Şimdi birbiri ardısıra ordinal sayıların bazı temel özelliklerini gözleyebiliriz.

Özellik 1: Bir ordinal sayının her elemanı bir ordinal sayıdır.

Gerçekten α bir ordinal sayı ve $\beta \in \alpha$ olsun. O hale (1) nedeniyle β bir kümedir. Üstelik β yukarıdaki üç koşulu da gerçekler; gerçekten $\gamma \in \beta$ ise $\beta \subset \alpha$ nedeniyle $\gamma \in \alpha$ ve (1) nedeniyle γ bir kümedir ve üstelik $\gamma \subset \beta$ olur, çünkü $\in$ bağıntısı α kümesinde geçişlilik özelliğine sahip olduğundan, her bir $\nu \in \gamma$ için $\alpha \in \beta$ nedeniyle $\nu \in \beta$ bulunur; peki neden $\gamma \neq \beta$ olmak zorundadır? $\in$ bağıntısının, iyi sıralanmış α kümesinin β altkümesini iyi sıralayacağı apaçıktır.

Özellik 2: Bir ordinal sayının her segment 'i bir ordinal sayıdır.

Kısacası α bir ordinal sayı ve $\beta \in \alpha$ ise $S(\beta) = \{\gamma \in \alpha : \gamma \in \beta\}$ segmentinin bir ordinal sayı olduğu tıpkı yukarıdaki gibi gözlenir.

Özellik 3: α ve β ordinal sayıları ne olursa olsun, aşağıdaki üç bağdaşmaz durumdan bir ve yalnız biri geçerlidir:

$$\beta \in \alpha, \quad \beta = \alpha, \quad \alpha \in \beta.$$

Apaçıktır ki kanıtlama için gereken (ve yeterli olacak olan) şudur: Eğer α ve β farklı ordinal sayılar ise ya $\beta \in \alpha$ ya da $\alpha \in \beta$ gerçeklenir.

Bunun içinse ya $\alpha \cap \beta = \alpha$ ya da $\alpha \cap \beta = \beta$ gerçeklendiğini göstermek yetecektir. Apaçıktır ki hem $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$ ve hem de $\alpha \cap \beta \subseteq \beta$ geçerlidir. Eğer $\alpha - (\alpha \cap \beta) \neq \emptyset$ (yani $\alpha \cap \beta \subset \alpha$) ise, α iyi sıralanmış kümesinde

$$min(\alpha - (\alpha \cap \beta)) = \gamma \in \alpha - (\alpha \cap \beta)$$

elemanı var olurdu. Demek ki herhangi bir $\nu \in \alpha - (\alpha \cap \beta)$ için ya $\nu = \gamma$ ya da $\gamma \in \nu$ geçerli olacaktır. Bu aşamada inanması güç gelecektir, biliyoruz ama, şimdi $\gamma = \alpha \cap \beta$ göstereceğiz. Herhangi bir $\nu \in \gamma$ alınsın. O halde kolayca $\nu \in \alpha$ bulunur, üstelik $\nu \in \alpha \cap \beta$ olmalıdır, aksi durumda $\nu \in \alpha - (\alpha \cap \beta)$ olur ve yukarıda belirtildiği gibi ya $\nu = \gamma$ ya da $\gamma \in \nu$ geçerli olur ve sonuçta olanaksız olan $\nu \in \nu$ elde edilirdi. Demek ki her bir $\nu \in \gamma$ için $\nu \in \alpha \cap \beta$ geçerli olduğunu anlarız, bu ise $\gamma \subseteq \alpha \cap \beta$ demektir. Tersine herhangi bir $\nu \in \alpha \cap \beta$ alındığında, $\gamma \notin \alpha \cap \beta$ olduğundan ve $\in$ bağıntısının geçişlilik kuralını sağlaması nedeniyle ne $\nu = \gamma$ ve ne de $\gamma \in \nu$ geçerli olabilir. Oysa hem γ ve hem de ν, $\in$ bağıntısına göre iyi sıralanmış α kümesinin birer elemanı olduğundan kıyaslanabilirler ve zorunlu olarak $\nu \in \gamma$ geçerli olur; tüm bunlar ise $\alpha \cap \beta \subseteq \gamma$ verir. Evet inanılması güç olan eşitliği gösterdik. Peki bu bize ne verecektir? Ne mi verecektir? Dikkat edin aşağıdaki ara önermeyi kanıtlamış olduk:

Ara Önerme: $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$ ise, $\alpha \cap \beta \in \alpha - (\alpha \cap \beta)$ olur.

O halde üstelik, akıllı davranmayıp $\alpha \cap \beta \neq \beta$, yani $\alpha \cap \beta \subset \beta$ olduğunda diretirsek, bu ara önerme nedeniyle

$$\alpha \cap \beta \in (\alpha - (\alpha \cap \beta)) \cap (\beta - (\alpha \cap \beta)) = \emptyset$$

gibi kesinkes olanaksız ve saçma bir sonuca ulaşırız. Evet, demek ki bu saçma sonuca ulaşmak istemiyorsak, tüm bu kanıtlamalar sırasında hiç bir yerde yanlış yapmadığımıza göre, başlangıç aşamasındaki

$$\text{ya } \alpha \cap \beta = \alpha \text{ ya da } \alpha \cap \beta = \beta \text{ olur}$$

iddialarından en az birisinin (ve başta $\alpha \neq \beta$ varsaydığımızdan) tam birisinin doğru olduğunu kabullenmek zorundayız. Sözgelimi $\alpha \cap \beta = \alpha$ ve $\alpha \cap \beta \neq \beta$ ise $\alpha = \alpha \cap \beta \subset \beta$ ve dolayısıyla $\alpha \in \beta$ sonucuna ulaşırız. Özellikle (3) 'de sözü edilen iddialardan herhangi ikisinin aynı anda geçerli olamayacağını kolayca gözleyebiliyoruz değil mi?

Özellik 4: Herhangi α ve β ordinal sayıları için aşağıdaki eşdeğerdir:

(i) $\beta \in \alpha$,
(ii) α kümesinde β bir öz alt segmenttir,
(iii) $\beta \subset \alpha$.

Gerçekten (i) doğru ise $\beta = \{\gamma \in \alpha : \gamma \in \beta\} = S(\beta)$ gerçeklendiğini gözlemek kolaydır ve (i) nedeniyle $\beta \subset \alpha$ geçerli olduğundan $S(\beta)$ segmenti α kümesine eşit değildir ve (ii) doğru olur. (ii) doğru ise apaçıktır ki (iii) doğru olur. Son olarak (iii) geçerliyse $\beta \neq \alpha$ ve $\alpha \not\in \beta$ olacağından Özellik (3) nedeniyle zorunlu olarak $\beta \in \alpha$ bulunur.

Şimdi bu dört özellik sonunda artık gönül rahatlığıyla

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ancak } \beta \subset \alpha \text{ ise, } \beta < \alpha \\ \text{ancak } \beta \subseteq \alpha \text{ ise, } \beta \leq \alpha \end{array} \right\} \qquad (*)$$

yazabiliriz ve böylelikle herhangi iki α ve β ordinal sayısı için ya $\alpha = \beta$ ya $\alpha < \beta$ ya da $\beta < \alpha$ bağdaşmaz durumlarından birisinin geçerli olduğunu anlarız. (*) tümel sıralamasının bir iyi sıralama olduğunu ilerde göreceğiz.

Özellik 5: Herhangi sayıda ordinal sayının bileşimi bir ordinal sayıdır.

Evet $\{\alpha_i : i \in \Gamma\}$ gibi bir ordinal sayılar kümesi verildiğinde,

$$\alpha^* = \cup_{i \in \Gamma} \alpha_i$$

kümesinin bir ordinal sayı olduğunu gözlemek güç değildir. Gerçekten herhangi bir $\beta \in \alpha^*$ için, uygun bir $i_0 \in \Gamma$ yardımıyla $\beta \in \alpha_{i_0}$ bulunur ve β 'nın bir küme olduğu anlalışılır. (2) benzer biçimde kolayca gözlenir. Şimdi son olarak herhangi bir boş olmayan $A \subseteq \alpha^*$ altkümesinin en küçük elemanının varlığını gösterelim.

$$A = \cup_{i \in \Gamma} (A \cap \alpha_i)$$

nedeniyle uygun bir $i_0 \in \Gamma$ yardımıyla $\emptyset \neq A \cup \alpha_{i_0}$ bulunur ve

$$min(A \cup \alpha_{i_0}) = min(A)$$

gerçeklendiği gözlenebilir, gerçekten herhangi bir $\beta \in A$ için ister $\beta \in \alpha_{i_0}$ ister $\beta \notin \alpha_{i_0}$ olsun, Özellik (3) 'den yararlanarak $min(A \cap \alpha_{i_0}) \leq \beta$ bulunur. Dikkat edilirse

$$\forall i \in \Gamma \text{ için } \alpha_i \leq \alpha^*$$

olmaktadır.

Özellik 6: α ordinal sayısı ne olursa olsun $\alpha \cup \{\alpha\}$ bir ordinal sayıdır.

Yalnızca, $\emptyset \neq A \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$ altkümesinin en küçük elemanının varlığını gösterelim. $A \cap \alpha = \emptyset$ ise, $A = \{\alpha\}$ olur ve $min(A) = \alpha$ olur. $A \cap \alpha \neq \emptyset$ ise, $min(A \cap \alpha) = min(A)$ kolayca gözlenir.

Dikkat edilirse $\alpha \subset \alpha \cup \{\alpha\}$ geçerlidir ve herhangi α ve β ordinal sayıları için ya $\beta \leq \alpha$

ya da $\alpha \cup \{\alpha\} \leq \beta$ gerçeklenir. Bu yeni ordinal sayı kısaca

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$$

işareti ile gösterilir ve α 'nın "ardılı" adını alır. Görüldüğü gibi her ordinal sayının tek türlü belirli bir ardılı vardır ve bu ondan kesinlikle büyük olan tüm ordinal sayıların en küçüğüdür. $\alpha+1$ 'in de bir ardılı vardır ve bu $(\alpha + 1)+1$ ya da kısaca $\alpha + 2$ işareti ile gösterilir, vb..

Aman dikkat: Hiç bir ordinal sayının ardılı olmayan özel ordinal sayılar da vardır. Bu tür ordinal sayılara limit ordinal sayı denilir. Aşağıda tanımlanacak olan ω_0 ve $\omega_0 2$ ordinal sayıları böyledir. İlk ordinal sayılar, ki onlara sonlu ordinal sayılar da denir, aşağıdaki biçimde tanımlanır. İlk ordinal sayı ϕ ya da 0 işareti ile gösterilir. Onun ardılı ve onun ardısıra gelenler, yukarıda anlatılanlar nedeniyle

$$\{\phi\}, \{\phi\{\phi\}\}, \{\phi\{\phi\}, \{\phi\{\phi\}\}\}, ..$$

biçiminde tanımlanırlar. Bunlar sırasıyla

$$1 = \{\emptyset\} = \{0\},$$

$$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\},$$

$$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}, ...$$

işaretleriyle gösterilir. Örneğin $3 = 2 \cup \{2\}$ *gerçekleştiğini* gözlüyor musunuz? $n+1$ ordinal sayısı, kendinden öncekiler tanımlı olduğunda

$$n + 1 = \{0, 1, .., n\} = \{n \cup \{n\}\}$$

biçiminde tanımlanır. Tüm sonlu ordinallerden sonra gelen ilk ordinal sayı

$$\omega_0 + 1 = \{0, 1, 2, ...\} = \cup\{n : n \text{ sonlu ordinal }\}$$

'dir. Onun ardılları ise, sırasıyla,

$$\omega_0 + 1 = \{0, 1, 2, .., \omega_0\}$$

$$\omega_0 + 2 = \{0, 1, 2, .., \omega_0, \omega_0 + 1\}, ...$$

'dir. Benzer biçimde tüm $\omega_0 + n$ ordinal sayılarından sonra gelen ilk ordinal sayı, tüm $\omega_0 + n$ sayılarının birleşim kümesi olan ordinal sayıdır ve bu $\omega_0 2$ ile gösterilir. Peki neden $2\omega_0$ ile değil de $\omega_0 2$ ile gösterilir? Dikkat edilirse gerek ω_0 ve gerekse $\omega_0 2$ sayıları kendilerinden önce gelen ordinal sayıların hiç birisinin ardılları değildir. Yine dikkat edilirse ω_0 ile $\omega_0 2$ "kümeleri" eşkuvvettedir, yani bu iki küme arasında bire-bir ve örten bir fonksiyon tanımlıdır; gerçekten 0, 2, 4, ... sayılarını sırasıyla, 0, 1, 2, ... sayılarına ve 1, 3, 5, ... sayılarını ise ω_0, $\omega_0 + 1$, $\omega_0 + 2$, ω_0,... sayılarına eşleştiren fonksiyon bu niteliktedir. $\omega_0 2$ 'den sonra benzer yöntemle

$$\omega_0 2 + 1, \omega_0 2 + 2, ..., \omega_0 3, .., \omega_0 4, ..., ..., \omega_0 \omega_0 = \omega_0^2$$

ordinal sayıları ve sonra

$$...\omega_0^3, .., \omega_0^{\omega_0}, .., \omega_0^{\omega_0^{\omega_0}}, ...$$

sayıları tanımlanabilir. Bunların **tümü** hala ω_0 ile eşkuvvettedir, neden? Peki, kuvveti ω_0 'ın kuvvetinden büyük olan ordinal sayıların varlığını güvence altına alan nedir? Bu, **Ord** işareti ile gösterilen tüm ordinal sayıların "sınıfı"nın (işte bu topluluk bir küme DEĞİLDİR, peki neden?) aşağıdaki özelliğe sahip olmasıdır:

Özellik 7: Ord sınıfı (*) 'da tanımlanan $\leq$ bağıntısına göre iyi sıralanmıştır.

Gerçekten herhangi bir boş olmayan

$$A = \{\alpha_i : i \in \Gamma\}$$

ordinal sayılar kümesinden seçilmiş bir $\alpha_{i_0} \in A$ sayesinde, kolaylıkla $\alpha_{i_0} \cap A = \phi$ ise $\alpha_{i_0} = min(A)$ $\alpha_{i_0} \cap A \neq \phi$ ise $min(\alpha_{i_0} \cap A) = min(A)$ gösterilir.

Ord sınıfı içinde, kuvveti ω_0 'dan kesin büyük olan ordinal sayıların varlığı hala gösterilmedi diyorsunuz, kesinlikle haklısınız. Bu nitelikteki ordinal sayıların en küçüğü ω_1 işareti ile gösterilir. Bu inanılmaz ordinal sayının varlığını güvence altına alan bilgilerin temelinde matematik tarihinin en şaşırtıcı sonuçlarından birisi yer alır:

Zermelo Teoremi: Her küme üzerinde (en az bir tane) iyi sıralanma bağıntısı tanımlıdır.

Yanlış anlaşılmasın, bu şaşırtıcı teorem, her küme üzerinde bir iyi sıralama bağıntısının *varlığını güvenceye almaktadır.* R gerçel sayılar kümesi üzerinde somut olarak (alışageldiğimiz tümel sıralamadan farklı) nasıl bir iyi sıralama tanımlanabilir? Bunu belirtmek ne yazık ki olanaksızdır, sevgili okurlar. Bir iyi sıralama tanımlanabilir ama nasıl bir iyi sıralama, bu belirlenemez! Kafam karıştı dediğinizi duyar gibiyim. Zermelo Teoremini ve *kardinal sayıları* bir başka yazıya bırakalım dilerseniz. Matematiğin keyfine vardığınız iyi çalışmalar dilerim hepinize.

— o —

SAYIN OKURLARIMIZ...

Önceden yayınlanmış olan "Matematik Dünyası" dergisinin sayıları, tanesi 500.000,- TL karşılığında, satışa sunulmuştur. Bu sayıları edinmek isteyen okurlar, tutarını Türkiye İş Bankası Antalya Şubesi 6200/30000/2203551 no'lu Prof. Dr. Halil İbrahim Karakaş hesabına yatırıp, dekontun bir örneği ile istedikleri sayıları bize gönderdikleri takdirde, sözkonusu sayılar adreslerine postalanacaktır.

Elimizde Bulunan Sayılar:

Cilt 1	Sayı: 1,2,3,4
Cilt 2	Sayı: 1,2,3,4,5
Cilt 3	Sayı: 5
Cilt 4	Sayı: 1,3,4,5
Cilt 5	Sayı: 1,5
Cilt 6	Sayı: 1,2,3,4,5
Cilt 7	Sayı: 1,2,3,4,5

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.
* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
* Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.
* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
* Matematik Dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile ya da PC 'de Latex programı yardımıyla, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üstüste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

Matematik Dünyası

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,

07058-Antalya

adresine gönderilecektir.