PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.181. $x^3 - 2y^3 - 4z^3 = 0$ denkleminin tüm tamsayı çözümlerini bulunuz.

A. 182. Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:

$$x + y + z = a$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3$$

A. 183. a, b ve c doğal sayılarının ortak katlarının en küçüğü (OKEK), ve ortak katlarının en büyüğü (OBEB), sırasıyla, $[a,b,c]$ ve (a,b,c) olsun. x ve y doğal sayılarının OBEB i de (x,y) ile gösterilmek üzere

$$\frac{[a,b,c]}{(a,b,c)}(a,b)(a,c)(b,c) = abc$$

olduğunu kanıtlayınız.

A. 184. Herhangi 3 paralel doğru verilmiş olsun. 3 köşesi bu doğrular üzerinde bulunan bir kare çiziniz.

A. 185. Çevrel çemberinin yarıçapı 1 olan bir üçgenin, iç teğet çemberinin yarıçapı r ve yükseklik ayaklarını köşe alan üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı $r\prime$ ise, $r' \leq 1 - \frac{1}{3}(1+r)^2$ olduğunu ispatlayınız.

YARIŞMA SORULARI

Y.181. Herhangi bir a doğal sayısı için $a^{10}+a^5+1$ sayısının bir bileşik sayı olduğunu gösteriniz.

Y. 182. $P(x) = ax^2 + bx + c$ polinomunun her tamsayıda aldığı değer, bir tamsayının dördüncü kuvvetine eşit ise $a = b = 0$ olduğunu gösteriniz.

Y. 183. $x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5 = 77$ denkleminin tamsayılarda hiç çözümü bulunmadığını gösteriniz.

Y.184. Bir ABC üçgeninde h_a, h_b, h_c yükseklikler; l_a, l_b, l_c açıortaylar; m_a, m_b, m_c kenarortaylar ve r içteğet çemberin yarıçapı olmak üzere

$$g_r \leq h_a + h_b + h_c \leq l_a + l_b + l_c \leq m_a + m_b + m_c$$

olduğunu kanıtlayınız.

Y. 185. Dışbükey ABCDE beşgeninde, ABC, BCD, CDE, DEA üçgenlerinin her birinin alanı 2, EAB üçgeninin alanı ise 3 'tür. Beşgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜMLER

A.171. Aşağıdaki sayılardan hangisi daha büyüktür?

$(123456789!)^2$, yoksa $123456789^{123456789}$.

Çözüm. Her doğal sayı $n > 2$ için $(n!)^2 > n^n$ olduğunu gösterelim.

$(n!)^2 = n!n! = (1.2.3...n)(n...3.2.1) = [1.n][2(n-1)]...[k(n-k+1)]...[n.1]$

Her k, $(2 \leq k < n)$ için $k.(n-k+1) = (n-k)(k-1)+n > n$ olduğundan, yukarıdaki ifadeden

$$(n!)^2 > \underbrace{n.n...n}_{n \text{ defa}} = n^n$$

olduğu görülür.

A.172. Ardışık 10 tamsayıdan en az biri geri kalan dokuz sayı ile aralarında asaldır; gösteriniz.

Çözüm. n, $n+1$, ..., $n+9$ ardışık 10 tamsayı olsun. $s > r$ olmak üzere, $(n+r, n+s) = (n+r, s-r)$ ve $0 < s-r < 10$ olduğundan bu sayılardan en az birinin 10 'dan küçük hiç bir asal sayı ile bölünemediğini göstermek yeter.

Sözü edilen sayılar arasında:

2 ile bölünenlerin sayısı 5;

3 ile bölünen ve tek olanların sayısı en çok 2;

5 ile bölünen ve tek olanların sayısı tam 1;

7 ile bölünen ve tek olanların sayısı en çok 1 'dir.

10 ardışık sayı içinde tam 5 tane tek sayı olduğundan ve 5 tek sayıdan 3, 5 veya 7 ile bölünenlerin sayısı en çok $2 + 1 + 1 = 4 < 5$ olduğundan, tek sayılardan en az biri 3, 5 ve 7

[illegible] bölünemez. Bu tek sayı diğerleri [illegible] asal olacaktır.

[illegible] Çarpımları 1 'e eşit olan üç tane [illegible] toplamı bu sayıların terslerinin [illegible] büyük ise, bu takdirde söz konusu [illegible] bir tanesinin 1 'den büyük [illegible]niz.

[illegible] Çarpımları 1 'e eşit olan üç tane pozitif [illegible] diyelim. Varsayıma göre,

$$[illegible] > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$$

[illegible] eşitsizlikten;

$$[illegible] < (x+y)xy + 1,$$

$$[illegible](x+y)(1-xy) < 0,$$

$$[illegible] 1) - (xy-1)(x+y) < 0,$$

$$[illegible] 1 - x - y) < 0,$$

$$[illegible] - 1)(y-1) < 0$$

[illegible] Sonuncu eşitsizlikten kolayca [illegible] gibi, x, y ve $\frac{1}{xy}$ 'den yalnız biri 1 [illegible] diğer ikisi ise 1 'den küçük olmalıdır.

[illegible] $\in \mathbb{R}$ sayısı $a^5 - a^3 + a = 2$ denklemini [illegible] $3 < a^6 < 4$ olduğunu gösteriniz.

[illegible] $\neq 0$ olduğu açıktır. Şimdi,

$$[illegible] = (a^2)^3 + 1^3 = (a^2+1)(a^4 - a^2 + 1) =$$
$$[illegible] - a^3 + a) = 2\frac{a^2+1}{a} = 2\left(a + \frac{1}{a}\right).$$

[illegible] eşitlikten, $a > 0$ olduğu görülür.

[illegible], $\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 2\sqrt{\left(a.\frac{1}{a}\right)} = 2$ ve $a \neq 1$ [illegible], $a + \frac{1}{a} > 2$ 'dir. Böylece,

$$[illegible] = 2.\left(a + \frac{1}{a}\right) > 2.2 = 4 \Rightarrow a^6 > 3.$$

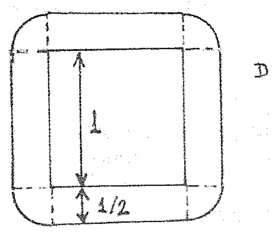
[illegible] $2 + a^3 = a^5 + a$ eşitliğinin her iki yanını [illegible] bölersek,

$$[illegible] = \frac{a^5+a}{a^3} \Rightarrow \frac{2}{a^3} + 1 = a^2 + \frac{1}{a^2} > 2 \Rightarrow$$
$$[illegible] > 2 \Rightarrow a^3 < 2 \Rightarrow a^6 < 4.$$

[illegible] $3 < a^6 < 4$ olur.

[illegible] 20×25 dikdörtgeninin içine, ke[illegible]uzunluğu 1 olan 120 tane kare atılmıştır. [illegible] içine, çapı 1 olan ve 120 karenin [illegible] kesmeyen bir daireyi yerleştirmenin [illegible] olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm.



Çapı 1 olan dairenin kenara taşmaması için onun merkezi 20×25 dikdörtgeninin kenarlarından $\frac{1}{2}$ 'den fazla uzaklıkta bulunmalıdır ve dolayısıyla, bu merkez, alanı 19.24=456 olan bir dikdörtgenin içinde bulunmalıdır. Bundan başka, dairenin merkezi, her bir karenin çevresinden $\frac{1}{2}$ 'den fazla uzaklıkta bulunmalıdır, yani alanı $3 + \frac{\pi}{4}$ şekilde gösterilen biçimde olan her parçanın dışında olmalıdır. (Şekile bakınız.) Bu tür parçaların toplam alanı en fazla

$$120(3 + \frac{\pi}{4}) = 360 + 30\pi$$

olduğundan ve bu son sayı da $360 + 30.3,2 = 456$ 'dan küçük olduğundan, sözkonusu parçalarla, alanı 456 olan dikdörtgeni örtmek olanaksızdır. Dolayısıyla, karelerin hiç birini kesmeyen ve 20×25 dikdörtgeninin dışına taşmayan bir dairenin merkezi için yer bulmak mümkündür.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y. 171. $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{2665.2666}$ ve $B = \frac{1}{1334.2666} + \frac{1}{1335.2665} + ... + \frac{1}{2666.1334}$ sayıları veriliyor. $\frac{A}{B}$ nin bir tamsayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Her $k \in \mathbf{N}$ için $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ olduğunu anımsayınız. Böylece,

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2665} - \frac{1}{2666}$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2666} - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2666})$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2666} - (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{1333})$$
$$= \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335} + ... + \frac{1}{2665} + \frac{1}{2666};$$

$$2A = (\frac{1}{1334} + \frac{1}{2666}) + (\frac{1}{1335} + \frac{1}{2665}) + ...$$
$$+ (\frac{1}{2666} + \frac{1}{1334})$$
$$= \frac{4000}{1334.2666} + \frac{4000}{1335.2665} + ... + \frac{4000}{2666.1334}$$
$$= 4000B.$$

Sonuç olarak, $\frac{A}{B} = 2000$ 'dir.

(**Çözenler:** *Alp Şimşek (İzmir-Bornova), Cemal Özboğa (Kocaeli)*)

Y. 172. $a_1, a_2, ..., a_n$; n tane farklı pozitif sayı olsun (tam olmaları gerekmez). Bu sayılar yardımıyla elde edilen tüm mümkün toplamlar kümesini düşünelim (sayıların kendisini de söz konusu kümeye dahil ediyoruz). Elde edilen toplamlar içerisinde, en azından, $\frac{n(n+1)}{2}$ tane farklı sayı bulunacağını kanıtlayınız.

Çözüm. Sayıların artan sırada numaralanmış olduğunu varsayabiliriz: $a_1 < a_2 < ... < a_n$.

Aşağıdaki şekilde toplamları oluşturalım:

$$\begin{array}{lll}
a_1 & a_2 & \ldots \\
a_1 + a_n & a_2 + a_n & \ldots \\
a_1 + a_{n-1} + a_n & a_2 + a_{n-1} + a_n & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & a_2 + a_3 + \ldots + a_n & \\
a_1 + a_2 + \ldots + a_n & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\
\ldots & a_{n-2} + a_n & a_{n-1} + a_n & \\
\ldots & a_{n-2} + a_{n-1} + a_n & & \\
\ldots & & & \\
\ldots & & &
\end{array}$$

Buradaki bütün sayıların farklı olduğunu görmek zor değildir. Bunların toplam sayısı ise $n + (n-1) + ... + 1 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ 'dir.

Tam $\frac{n(n+1)}{2}$ tane farklı toplamın ortaya çıkacağı duruma örnek olarak $1, 2, 3, ..., n-1, n$ doğal sayılarını verebiliriz. Çünkü bu sayıların yardımıyla toplamlar oluşturursak, 1 'den $(1+2+...+n)$ 'ye kadar tüm doğal sayıları elde edebiliriz ki bunların da toplam sayısı $\frac{n(n+1)}{2}$ 'dir.

(**Çözenler** : *Alp Şimşek (İzmir)*)

Y.173. Bir doğru üzerinde 50 parça verilmiştir. Aşağıdaki önermelerden en az birinin doğru olduğunu kanıtlayınız:

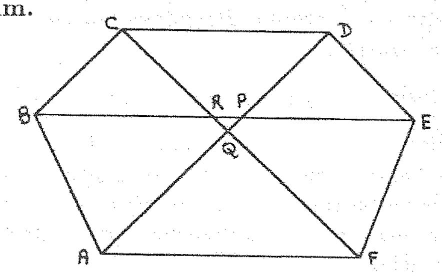
(a) Parçalardan en az 8 tanesinin ortak noktası vardır.

(b) Öyle 8 parça vardır ki, herhangi ikisinin ortak noktası yoktur.

Çözüm. Parçalar içerisinde sağ ucu en küçük sayı olan parçaya $[a_1, b_1]$ diyelim. Eğer b_1 noktasını içeren parçalar sayısı 7 'den fazla ise, o halde problemin (a) önermesi doğru olur. Eğer b_1 'i içeren parçalar sayısı 7 veya 7 'den az ise, o halde $[a_1, b_1]$ 'den sağda bulunan en az 43 tane parça vardır. Bu 43 parça içerisinde sağ ucu en küçük sayı olan parçaya $[a_2, b_2]$ diyelim. Eğer b_2 noktasını içeren parçalar sayısı 7 'den fazla ise, problem çözülmüş olur. Fakat bu noktayı içeren parçalar sayısı 7 veya 7 'den az ise, o halde b_2 'den sağda bulunan en az 36 parça vardır. Bu şekilde devam ederek, ya en az 8 parçaya ait olan nokta buluruz, ya da birbiriyle kesişmeyen öyle 7 tane $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ... , $[a_7, b_7]$ buluruz ki, her k, $(1 \leq k \leq 7)$ için $[a_k, b_k]$ 'dan sağda en az $50 - 7k$ tane parça bulunmuş olur. Bu takdirde $[a_7, b_7]$ 'den sağda da en az bir $[a_8, b_8]$ parçası bulunacaktır ($50 - 7 \cdot 7 = 1$ olmasına dikkat edin.) Böylece problemin (a) önermesi sağlanmadığı takdirde çift-çift kesişmeyen en az 8 parçanın bulunduğunu söyleyebiliriz.

Y.174. Konveks $ABDCEF$ altıgeni verilmiştir. AD, BE ve CF köşegenlerinin her birinin altıgenin alanını yarıya böldüğü bilinmektedir. Bu köşegenlerin aynı bir noktada kesiştiklerini kanıtlayınız.

Çözüm.



Problemdeki özelliklere sahip bir altıgenin köşegenleri bir noktada kesişmesinler. O halde altıgenin içinde bir PQR üçgeni (şekile bakınız) oluşacaktır.

$ABCD$ ve $BCDE$ dörtgenlerinin alanlarının eşitliğinden ABP ve EPD üçgenlerinin alanlarının eşitliği çıkar. Gerçekten,

$$A(ABP) = A(ABCD) - A(BCDP)$$

$$= A(BCDE) - A(BCDP) = A(EPD).$$

Benzer şekilde,

$$A(BCR) = A(EFR) \ , \quad A(AQF) = A(CQD).$$

Üçgenlerin alanlarının eşitliğinden

$$AP \cdot BP = EP \cdot DP, \ CQ \cdot DQ = AQ \cdot FQ \ ,$$

$$ER \cdot FR = BR \cdot CR$$

olması çıkar. Bu eşitlikleri taraf tarafa çarparsak,

$$AP \cdot BP \cdot CQ \cdot DQ \cdot ER \cdot FR$$

$$= AQ \cdot BR \cdot CR \cdot DP \cdot EP \cdot FQ$$

elde ederiz. Lakin sonuncu eşitlik mümkün değil; çünkü

$$AP > AQ \ , \ BP > BR \ , \ CQ > CR \ , \ DQ > DP \ ,$$

$$ER > EP \ , \ FR > FQ.$$

(Eşitliğin sağlanması için $|PQ| = |QR| = |RP| = 0$ olmalı, dolayısıyla, P, Q ve R noktaları çakışmalıdır.)

(**Çözenler:** *Alp Şimşek (İzmir), Cemal Özboğa (Kocaeli), Mert Özkan Ocakoğlu (Kocaeli)*)

Y.174. Düzlemi bir kaç bölgeye bölen n, $(n \geq 2)$ tane doğru çizilmiş ve bu bölgelerin bazıları boyanmıştır. Boyama işlemi öyle yapılmıştır ki, boyanmış bölgelerin ortak sınırı yoktur (sınırlar doğru parçalarıdır). Boyanmış bölgeler sayısının $\frac{1}{3}(n^2+n)$ 'den

fazla olamayacağını kanıtlayınız.

Çözüm. Eğer tüm doğrular bir-birine paralel ise bu halde düzlem $n+1$ tane bölgeye bölünmüş olur ve bu durumda boyanmış bölgeler sayısının $\frac{1}{3}(n^2+n)$ 'den fazla olamayacağını kontrol etmek zor değil. (örneğin, $n \geq 2$ için

$$\frac{1}{3}(n^2+n) = n\frac{n+1}{3} \geq n\frac{2+1}{3} = n$$

eşitsizliğini gözönüne alabilirsiniz.)

Şimdi, n doğru içerisinde paralel olmayanların da bulunduğunu varsayalım. Her bir bölgenin sınırı farklı doğrulara ait doğru parçalarından ve/veya ışınlardan ibarettir. Bu parçalara ve ışınlara, uygun bölgenin kenarları diyelim. Her bölgenin en az 2 kenarı olacağı açıktır. Şimdi tüm boyanmış bölgeleri kenarlarının sayısına göre sınıflandıralım: m_2 ile 2 kenarı olan boyanmış bölgeler sayısını; m_3 ile 3 kenarı olan boyanmış bölgeler sayısını; ... ; nihayet, m_k ile k tane kenarı olan boyanmış bölgeler sayısını gösterelim. Ayrıca, k nın bu sınıflandırmada maksimal sayı olduğunu varsayalım (yani, kenar sayısı k 'dan büyük olan boyanmış bölge yoktur.) Önce $m_2 \leq n$ olduğunu görelim. İki kenarı olan herhangi bölgenin kenarları iki ışından ibarettir ve her bir ışın yalnız bir boyanmış bölgenin sınırı olabilir. Her doğru üzerinde en fazla 2 ışın bulunacağından ışınlar sayısı en fazla $2n$ ve dolayısıyla 2 kenarı olan boyanmış bölgelerin sayısı en fazla n dir; yani, $m_2 \leq n$.

n tane doğrunun her biri en fazla n kısıma (parça veya ışınlara) bölünebileceğinden tüm parça ve ışınların toplam sayısı $n \cdot n = n^2$ sayısından fazla olamaz. Öte yandan bu parça ve ışınların her biri yalnız bir boyanmış bölgenin kenarı olabileceğinden, boyanmış bölgelerin kenarlarının toplam sayısı n^2 'den fazla olamaz. Başka bir ifadeyle,

$$2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + ... + k \cdot m_k \leq n^2 \qquad (*)$$

eşitsizliği sağlanacaktır.

Bizim amacımız, boyanmış bölgeler sayısının (yani, $m_2 + m_3 + m_4 + ... + m_k$ nın) üstten tahminini bulmaktır. (*) eşitsizliğini de gözönüne alarak şunları yazabiliriz:

$$m_2 + m_3 + m_4 + ... + m_k$$

$$= \frac{3m_2 + 3m_3 + 3m_4 + ... + 3m_k}{3}$$

$$\leq \frac{m_2}{3} + \frac{2m_2 + 3m_3 + ... + km_k}{3}$$

$$\leq \frac{n}{3} + \frac{n^2}{3} = \frac{1}{3}(n^2+n).$$