

## ÜÇ ANALİZ PROBLEMİ

Yusuf Avcı-Kamil Alınçık-Nurettin Ergun  
İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü, 34459-İSTANBUL

Bu yazıda her biri kendi başına yeterince ilginç ve güzel üç düzeyli analiz probleminin çözümleriyle ilgileneceğiz. Analizin ne olduğu konusunda genel bir bilgi edinmek isteyen okurlar [2] yazısına başvurabilirler. Baştan belirtmekte yarar görüyoruz: Lise düzeyinde değildir bu sorular ama yine de kavrama isteğiyle okuyan tüm ilgili okurların çözümleri kavrayabileceğini düşünüyoruz. Her sorunun başında sorunun ve çözümün anlaşılması için gerekli bilgi ve kavramlar verilmektedir. Bu yazıda kullanılan bazı matematiksel kavram ve akıl yürütmelerin daha kolay kavranabilmesi için [1]'in okunması yararlıdır. Şimdi problemlerimizle tek tek yüzleşelim derseniz.

### Birinci Problem

Bir  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  (gerçel ya da karmaşık) sayılar dizisi verildiğinde ancak ve yalnız

$$s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

kısmi toplamlar dizisinin yakınsak ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$  olması durumunda

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$$

yazılır ve  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  serisine **S toplam değerine yakınsar** denir. Sözü edilen kısmi toplamlar dizisi eğer yakınsamıyorsa bu kez bu seriye **ıraksar** denir.  $x_n$  gerçel sayıları pozitif ise, bu durumda

$$s_1 < s_2 < \dots < s_n < s_{n+1} < \dots$$

gerçekleşeceği apaçiktır. Bu durumda, her monoton artan gerçel sayı dizisi gibi  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  kısmi toplamlar dizisi ancak ve yalnız üstten sınırlıysa yakınsak olabilir. En ünlü pozitif terimli seriler,  $0 < a$  olmak üzere  $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$  geometrik serisi ile  $p$ -serileri olarak bilinen  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  serileridir. Ünlü

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \quad (a \neq 1)$$

eşitliği nedeniyle yukarıdaki geometrik serinin,  $a \neq 1$  olması durumunda kısmi toplamlarının

$$s_n = \sum_{k=1}^n a^k = a(1 + a + \dots + a^{n-1}) = a \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

gerçekleştiğini ve sonuçta, eğer  $0 < a < 1$  ise,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$  nedeniyle bu kısmi toplamların  $\frac{a}{1-a}$  limitine yakınsadıkları, başka bir yazıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a} \quad (0 < a < 1)$$

gerçeklendiği kolayca gözlenir. Buna karşılık  $1 \leq a$  olması durumunda  $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$  serisinin kesinlikle monoton artan kısmi toplamlarının  $n \leq s_n$  gerçekleştiği için üstten sınırlanamadığı

ve sonuçta bu durumda serinin iraksadığı bir başka kolay gözlemdir. Bir  $p$ -serisi ise  $p \leq 1$  iken iraksaktır, çünkü

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \dots + \frac{1}{n^p}$$

kısmi toplamları için

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_n &= \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \dots + \frac{1}{(n+n)^p} \\ &\geq \frac{1}{(n+n)^p} + \frac{1}{(n+n)^p} + \dots + \frac{1}{(n+n)^p} = \frac{n}{(n+n)^p} \geq \frac{1}{2^p} \end{aligned}$$

gerçekleştiğinden  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  kısmi toplamlar dizisi iraksar, neden mi? Bu dizi bir  $l$  gerçel sayısına yakınsasaydı

$$\forall n \geq n_0 \text{ için } |s_n - l| < \frac{1}{3 \cdot 2^p}$$

gerçeklenir ve herhangi bir  $m > n_0$  doğal sayısı yardımıyla

$$\frac{1}{2^p} \leq s_{2m} - s_m = |s_{2m} - s_m| \leq |s_{2m} - l| + |l - s_m| < \frac{2}{3 \cdot 2^p}$$

çelişkisi doğardı. (Eğer **Cauchy dizisi** kavramını biliyorsak, ki bilmeliyiz,  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin bir Cauchy dizisi olmadığını ve dolayısıyla iraksadığını kolaylıkla söyleyebilirdik.) Özel olarak, iraksak  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  serisine **uyumlu (harmonik) seri** denir. Oysa  $1 < p$  ise  $p$ -serisi yakınsaktır, çünkü bu durumda  $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$  kısmi toplamlar dizisi bir Cauchy dizisi olur, yani  $0 < \epsilon$  verildiğinde uygun bir  $n_\epsilon$  doğal sayısı için

$$n_\epsilon \leq n, n_\epsilon \leq m \text{ için } |s_n - s_m| < \epsilon$$

koşulu gerçekleşir. Biraz çaba gerektirir bunu gözlemek.  $n$  ve  $m$  doğal sayıları farklı ve  $\geq 2$  olsun.  $\ln n$  ile doğal logaritma  $n$  yazılsın.

$$N = \left\lceil \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rceil, \quad M = \left\lceil \frac{\ln m}{\ln 2} \right\rceil + 1$$

doğal sayıları tanımlansın,  $n \neq m$  nedeniyle  $n < m$  varsayabiliriz. Kolayca  $2^N \leq n < m \leq 2^M$  bulunur.

$$|s_n - s_m| = \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \dots + \frac{1}{m^p}$$

sonlu toplamı apaçıktır ki, daha fazla sayıda pozitif terim toplamına sahip olan

$$\frac{1}{(2^N)^p} + \frac{1}{(2^N+1)^p} + \dots + \frac{1}{(2^M)^p}$$

toplamından ve bu son toplam ise

$$\begin{aligned} &\left( \frac{1}{(2^N)^p} + \frac{1}{(2^N+1)^p} + \dots + \frac{1}{(2^N+2^N-1)^p} \right) + \left( \frac{1}{(2^{2N})^p} + \frac{1}{(2^{2N}+1)^p} + \dots + \frac{1}{(2^{2N}+2^{2N}-1)^p} \right) \\ &+ \dots + \left( \frac{1}{(2^M)^p} + \frac{1}{(2^M+1)^p} + \dots + \frac{1}{(2^M+2^M-1)^p} \right) \end{aligned}$$

toplamından kesin küçük kalır. Bu son toplam ise

$$\frac{2^N}{(2^N)^p} + \frac{2^{2N}}{(2^{2N})^p} + \dots + \frac{2^M}{(2^M)^p} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^N + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{2N} + \dots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^M$$

toplamından küçük kalır. Bu son toplamın, yakınsak olduğu yukarıda gözlenmiş olan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n, \quad 0 < a = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$$

geometrik serisinin kısmi toplamları olan

$$t_n = a + a^2 + \dots + a^n$$

yardımıyla  $|t_M - t_{N-1}|$  olduğu kolayca gözlenecektir. Oysa  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi, yakınsak bir serinin kısmi toplamlar dizisi olduğu için yakınsaktır ve dolayısıyla bir Cauchy dizisidir; bu nedenle

$$\forall n, m \geq n_\epsilon \quad |t_n - t_m| < \epsilon \quad (1)$$

olacak biçimde bir  $n_\epsilon$  doğal sayısı vardır. O halde özel olarak ( $n_\epsilon < 2^{n_\epsilon+1}$  doğal sayısından büyük  $n$  ve  $m$  doğal sayıları için  $|t_n - t_m| < \epsilon$  olur. Oysa  $2^{n_\epsilon+1} \leq n$  ise  $(n_\epsilon + 1) \ln 2 \leq \ln n$  ve sonuçta kolaylıkla hem  $n_\epsilon \leq N - 1$  ve hem de  $n_\epsilon < M$  geçerli olacağından, (1) ve yukarıda bulunan eşitsizlik yardımıyla

$$|s_n - s_m| \leq |t_M - t_{N-1}| < \epsilon \quad (\forall n, m \geq 2^{n_\epsilon+1})$$

bulunur, demek ki  $p$ -serisinin kısmi toplamları bir Cauchy dizisi olur ve yakınsamak zorunda kalır.  $1 < p$  için  $p$ -serisinin yakınsadığını daha kolay bir biçimde şöyle de gözleyebiliriz:

Her  $n$  doğal sayısı için yine  $N = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor$  yazıp, kolayca

$$n \leq 2^{N+1} < 2^{N+2} - 1 = N^*$$

ve dolayısıyla

$$s_n \leq s_{2N+1} \leq s_{N^*} \leq t_{N+2} \leq \frac{2^{p-1}}{2^{p-1} - 1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

gerçeklendiğini görebiliriz, çünkü  $s_{N^*}$  kısmi toplamında 1'den sonra gelen terimlerin sırasıyla önce  $2^1$  tanesini, sonra  $2^2$  tanesini ,..., toplayarak

$$s_n < s_{N^*} = 1 + \sum_{i=1}^{N+2} \sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1} \frac{1}{k^p} < 1 + t_{N+2}$$

elde ederiz, çünkü her bir  $i$  indisi için,  $2^i$  terimin toplamı olan aşağıdaki toplam için

$$\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{(2^i)^p} + \frac{1}{(2^i+1)^p} + \dots + \frac{1}{(2^{i+1}-1)^p}$$

$$< \frac{2^i}{(2^i)^p} = \left( \frac{1}{2^{p-1}} \right)^i = a^i$$

geçerlidir; burada yine

$$a = \frac{1}{2^{p-1}}, \quad t_n = a + a^2 + \dots + a^n$$

yazılmıştır. Oysa  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  monoton artan kısmi toplamlar dizisi üstten  $\frac{a}{1-a}$  sayısı ile sınırlı olduğundan,  $p$ -serisinin monoton artan kısmi toplamları da üstten  $1 + \frac{a}{1-a} = \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}$  sayısı ile sınırlı olur ve sonuçta  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  serisi yakınsak olur; üstelik  $1 < p$  iken

$$1 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq \frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}$$

elde edilmiş olur. O halde tüm bu gösterilenler nedeniyle

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}}$$

serilerinin ilk ikisi iraksak (neden?), üçüncüsü ise herhangi bir pozitif  $\epsilon$  için yakınsaktır. Buna karşılık

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} \quad (0 < p)$$

serileri ise iraksaktır. Gerçekten her  $3 \leq n$  için  $\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < 3 \leq n$  nedeniyle  $(n+1)^n < n^{n+1}$  ve sonuçta her  $3 \leq n$  için  $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$ , ve sonuçta

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} \quad (\forall n \geq 3)$$

geçerlidir. Pozitif terimli uyumlu serinin kısmi toplamları iraksadığından, dolayısıyla üstten sınırlanamadığından,  $\sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$  serisinin kısmi toplamları da üstten sınırlanamaz ve sonuçta bu seri iraksar. Benzer gerekçeyle ve

$$\ln n = (p+1) \ln n^{\frac{1}{p+1}} < (p+1) \ln(1 + n^{\frac{1}{p+1}}) < (p+1)n^{\frac{1}{p+1}}$$

eşitsizlikleri nedeniyle, kısaca  $\alpha = \frac{p}{p+1}$  yazarak,

$$\frac{1}{(p+1)^p \cdot n^\alpha} < \frac{1}{(\ln n)^p} \quad (\forall n \geq 2)$$

geçerli olduğundan, logaritma serisinin de tüm pozitif  $p$ 'ler için iraksadığı anlaşılır. Şimdi artık sorumuza geçebiliriz. Her biri yakınsak olan

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_1(n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_2(n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_3(n), \quad \dots$$

sayılabilir sonsuz tane gerçel (ya da karmaşık) sayı serisi var olsun. Başka bir deyimle

$$x_1(1), x_1(2), x_1(3), x_1(4), \dots$$

$$x_2(1), x_2(2), x_2(3), x_2(4), \dots$$

$$x_3(1), x_3(2), x_3(3), x_3(4), \dots$$

.....

sonsuz satırımız var olsun ve her bir satırdaki gerçel (ya da karmaşık) sayıların toplamı yakınsak bir seri olsun. Her bir sütun sırasıyla

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

gerçel (ya da karmaşık) sayılarına yakınsasın, kısaca her bir  $n$ -inci sütun için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(n) = a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

gerçekleşsin. Acaba bu limitlerin toplamı  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  yakınsak bir seri olur mu? Bu sorunun yanıtının “hayır” olduğunu göstereceğiz. Aslında çok daha güçlü bir hipotez altında sorulduğunda bile bu sorunun yanıtı “hayır” ’dır. Bu güçlü hipotezden söz etmeden önce yukarıdaki dizilere, gerekli olduğu için, birer “isim” verelim.  $k$ -ıncı dizimiz

$$x_k = (x_k(1), x_k(2), \dots) = \{x_k(n)\}_{n=1}^{\infty} \quad (k \in \mathbb{N})$$

biçiminde, onların sütun dizilerinin var olan limit değerlerinin oluşturduğu dizi ise

$$a = (a_1, a_2, \dots) = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

ile yazılsın. Matematikte bir  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  diziler dizisinin bir  $a$  dizisine **düzgün yakınsaması** demek, kısaca, her pozitif  $\epsilon$  sayısına karşılık var olan uygun bir  $k_\epsilon$  doğal sayısı yardımıyla

$$\forall k \geq k_\epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad |x_k(n) - a_n| < \epsilon \quad (2)$$

gerçeklenmesi demektir. Evet asıl sorumuzu sorabiliriz artık:

**Birinci Problem:** Her biri birer yakınsak seri oluşturan  $x_k = \{x_k(n)\}_{n=1}^{\infty}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) gerçel ya da karmaşık sayı dizilerinin düzgün yakınsak limiti olan  $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi de acaba yakınsak bir seri oluşturur mu?

Şimdi yanıtın “hayır” olduğunu kanıtlayan bir karşı örnek tanımlayalım. Öncelikle

$$x_k = \left(1, \frac{1}{2^{1+\frac{1}{k}}}, \frac{1}{3^{1+\frac{1}{k}}}, \dots\right) = \left\{\frac{1}{n^{1+\frac{1}{k}}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

dizilerinin terimlerinin yakınsak  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{k}}}$  serisini oluşturduğunu kolayca gözleyebiliriz.

Şimdi de  $x_k$  dizilerinin  $x_0 = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$  dizisine düzgün yakınsadığını gösterelim.  $x_0$  dizisinin  $n$ -inci teriminin,  $x_k$  dizilerinin  $n$ -inci terimlerinin limiti olduğu, kısacası

$$\frac{1}{n} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{k}}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

gerçeklendiği ve ayrıca  $x_0$  dizisinin terimlerinin oluşturduğu serinin, iraksak olduğunu daha önce gözlediğimiz ünlü uyumlu seri olduğunu sanırım kolayca gözleyebiliriz. Şimdi  $0 < \epsilon$

verildiğinde (2) koşulunun yani uygun bir  $k_\epsilon$  doğal sayısı yardımıyla

$$\forall k \geq k_\epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad |x_k(n) - \frac{1}{n}| < \epsilon \quad (2')$$

gerçeklendiğini gösterebiliriz. Bunun için

$$|x_k(n) - \frac{1}{n}| \leq 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{3}} \quad (\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N})$$

geçerli olduğunu söyleyen **ara iddiayı** göstermemiz yeterli olacaktır.  $g(x) = x^{1+\epsilon}$  üstel fonksiyonu apaçiktır ki herhangi bir  $0 < \epsilon$  için pozitif  $x$  gerçel sayılarında sürekli ve türetilebilirdir. Herhangi bir  $3 \leq n$  doğal sayısı için, özel olarak  $\epsilon = \frac{1}{k}$  alınırsa

$$\frac{1}{3^{\frac{k}{\sqrt[k]{3}}}} - \frac{1}{n^{\frac{k}{\sqrt[k]{n}}}} = g\left(\frac{1}{3}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{k}\right) c^{\frac{1}{k}}$$

ve  $\frac{1}{n} < c < \frac{1}{3}$  gerçekleşecek biçimde bir  $c$  gerçel sayısının var olduğunu ve ayrıca her  $k$  doğal sayısı için

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < 3 < \frac{1}{c}, \quad \left(1 + \frac{1}{k}\right) c^{\frac{1}{k}} < 1$$

gerçeklendiğini anımsarsak, bu sonuçlar nedeniyle önce

$$\frac{1}{3^{\frac{k}{\sqrt[k]{3}}}} - \frac{1}{n^{\frac{k}{\sqrt[k]{n}}}} < \frac{1}{3} - \frac{1}{n}$$

ve dolayısıyla sonuçta

$$|x_k(n) - \frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{n}}\right) < \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{3}}\right) < 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{3}}$$

eşitsizlikleri her  $k$  doğal sayısı ve  $3 \leq n$  gerçekleyen her  $n$  doğal sayısı için geçerli olur. Oysa  $x_k(1) = 1$  ve

$$|x_k(2) - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{2}}\right) < 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{2}} < 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{3}}$$

geçerli olduğundan, yukarıdaki ara iddiada yazılı eşitsizliklerin gerçekten her  $k$  ve her  $n$  doğal sayıları için doğru olduğu gösterilmiş olur. Oysa  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{3}} = 1$  olduğundan, uygun bir  $k_\epsilon$  doğal sayısı sayesinde

$$\forall k \geq k_\epsilon \quad \text{için} \quad 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{3}} < \epsilon$$

gerçekleştikten,  $x_k$  dizilerinin  $x_0$  dizisine düzgün yakınsadığını söyleyen (2') iddiası kanıtlanmış olur. Demek ki her biri yakınsak seri oluşturan sayılabilir sonsuz tane gerçel sayı dizisinin düzgün yakınsadığı bir dizinin yakınsak bir seri oluşturması gerekmemektedir. Ve ilgili okurlara bir not: Yukarıdaki karşı örnek, Analiz'in önemli bir dalı olan Fonksiyonel Analiz'de, sıfır karmaşık sayısına yakınsayan tüm karmaşık sayı dizilerinin oluşturduğu Banach uzayı  $c_0$ 'da

$$X_0 = \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in \mathbf{C}\}$$

vektörel alt uzayının kapalı bir küme olmadığını ve dolayısıyla bir Banach uzayı olmadığını kanıtlamaktadır.

### İkinci Problem

Gerçel değişkenli ve gerçel değerli bir  $f$  fonksiyonunun  $x \rightarrow +\infty$  için  $l$  asimptotik değerine yaklaşması demek, sanırım pek çok okuyucunun iyi bildiği gibi, kısaca  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  işareti ile gösterilen ve her pozitif  $\epsilon$  sayısına karşılık

$$f([M_\epsilon, \infty)) \subseteq (l - \epsilon, l + \epsilon) \quad (3)$$

koşulu gerçekleşecek biçimde bir  $0 < M_\epsilon$  sayısının var olması biçiminde tanımlanan kavramdan bahsetmek demektir. Örneğin iyi bilindiği gibi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$$

gerçekleşir. Gerçel değişkenli ve gerçel değerli fonksiyonlarda asimptotik değerleri belirlemek için dizi karakterizasyonlarından yararlanmak akıllıcadır.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  gerçekleşebilmesi için gerek ve yeter koşul,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  gerçekleyen her  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi için  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$  gerçekleşmesidir. Gerçekten (3) gerçekleşiyorsa ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  ise,  $0 < \epsilon$  verildiğinde, (3) koşulunda sözü edilen ve var olan  $M_\epsilon$  sayesinde her  $n \geq n_\epsilon$  için  $M_\epsilon < x_n$  yani  $x_n \in [M_\epsilon, \infty)$  olacağından  $f(x_n) \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$  bulunur. Bu ise  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$  demektir. Tersine  $x_n \rightarrow \infty$  gerçekleyen her  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi için  $f(x_n) \rightarrow l$  olsun. Uygun bir  $0 < \epsilon_0$  için (3) koşulunu gerçekleyen hiç bir pozitif  $M$  sayısı var olmasaydı, yani her  $0 < M$  için  $f([M, \infty)) \not\subseteq (l - \epsilon_0, l + \epsilon_0)$  gerçekleşseydi, kısak amacıyla  $I_0 = (l - \epsilon_0, l + \epsilon_0)$  yazarak, öncelikle  $f([1, \infty)) \not\subseteq I_0$  olacağından, öyle bir  $1 \leq x_1$  var olurdu ki  $f(x_1) \notin I_0$  gerçekleşirdi. Oysa  $x_1 + 2 = M_2$  için zorunlu olarak  $f([M_2, \infty)) \subseteq I_0$  varsayıldığından  $M_2 \leq x_2$  gerçekleyen uygun bir  $x_2$  için  $f(x_2) \notin I_0$  gerçekleşirdi.  $f(x_n) \notin I_0$  gerçekleyen  $x_n$  gerçel sayısı belirlendiğinde  $x_n + n + 1 = M_{n+1} \leq x_{n+1}$  gerçekleyen uygun bir  $x_{n+1}$  gerçel sayısı için  $f(x_{n+1}) \notin I_0$  gerçekleşmek zorunda kalırdı. Tümevarımla tanımlanan işte bu  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  gerçekler (neden?), oysa  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$  gerçekleşmez (neden?). Bu çelişkidir. Demek ki (3) koşulunun eşdeğeri olan limit karakterizasyonunu belirlemiş olduk. Peki  $[0, \infty)$  aralığında tanımlı ve aynı aralıkta değerler alan sürekli bir  $f$  fonksiyonu için, acaba, her  $0 < x$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(nx) = 0$  gerçekleşiyorsa,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$  olur mu?

Evet sevgili okurlar, sezginiz doğrudur, bu sorunun yanıtı "evet" 'tir. Ama  $f$  fonksiyonu sürekliliğin daha zayıf bir türünü bile gerçekleseydi ve bu aralıkta alttan yarı-sürekliliği bile olsaydı bu sorunun yanıtı yine "evet" 'tir. Şimdi dilerseniz önce gerçel değerli bir  $f$  fonksiyonunun bir  $x_0$  gerçel sayısında alttan yarı-sürekliliğinin tanımını verelim. Eğer her pozitif  $\epsilon$  sayısına karşılık

$$\forall x \in (x_0 - \delta_\epsilon, x_0 + \delta_\epsilon) \quad \text{için} \quad f(x_0) - \epsilon < f(x)$$

koşulu gerçekleşecek biçimde bir  $0 < \delta_\epsilon$  tanımlanabiliyorsa (ya da bulunabiliyorsa) ancak bu durumda  $f$  fonksiyonuna  $x_0$  gerçel sayısında alttan yarı-sürekliliği denir. Tanımlandığı aralıkta her noktada alttan yarı-sürekliliği olan bir gerçel değerli fonksiyona bu aralıkta alttan yarı-sürekliliği fonksiyon denir. Bir noktada alttan yarı-sürekliliği olup bu noktada süreksiz gerçel

değerli bir fonksiyon var mıdır? Buna ilişkin en kolay ve en yalın örnek, sanırım

$$g(x) = \chi_{(-\infty, 0)}(x) = \begin{cases} 1; & x < 0 \\ 0; & 0 \leq x \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan “karakteristik” fonksiyonudur. Bu fonksiyon  $x_0 = 0$  noktasında süreksizdir, ama aynı noktada alttan yarı-sürekli. Sanırım kolayca gözleyebilirsiniz. Her rasyonel sayıda 0 ve her irrasyonel sayıda 1 değerini alan fonksiyon ise her yerde süreksizdir (neden?), ama tüm rasyonel sayılarda alttan yarı-sürekli. Evet, sorumuzu sorabiliriz artık:

**İkinci Problem:**  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu alttan yarı-sürekli olsun. Her  $0 < x$  için  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(nx) = 0$  ise,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  gerçekleştiğini gösteriniz.

Açıkça belirtelim, bu soru gerçekten **güçtür**. René Baire isimli Fransız matematikçinin Topoloji ve Fonksiyonel Analizde çok sık kullanılan bir teoreminden yararlanarak çözmek olasıdır bu soruyu, oysa biz belki teknik olarak daha çok çaba gerektiren ama daha yalın ve temel bilgiler kullanarak çözeceğiz onu. Önce çok sık kullanacağımız şu bilgiyi gözleyelim:

**Temel Bilgi:** Eğer  $x$  gerçel sayısı  $y$  gerçel sayısından küçükse,  $\epsilon < y - x$  gerçekleyen herhangi bir  $\epsilon$  pozitif sayısının uygun bir tamsayı katı  $x$  ile  $y$  arasında yer alır, yani  $x < k\epsilon < y$  gerçekleşecek biçimde bir  $k \in \mathbf{Z}$  vardır. Gerçekten de

$$\frac{x}{\epsilon} < k = \left[ \frac{x}{\epsilon} \right] + 1 \leq \frac{x}{\epsilon} + 1 < \frac{y}{\epsilon}$$

gözlemek yeterlidir. Bu bilginin bir sonucu olarak farklı iki gerçel sayı arasında en az bir rasyonel sayının bulunduğunu ve ayrıca  $1 < y - x$  olduğunda  $x$  ile  $y$  arasında en az bir tamsayının yer aldığını kolayca gözlemiş oluruz. Şimdi de şu şaşırtıcı ara iddiayı gösterelim. Eğer  $I_n = [a_n, b_n]$  gerçel sayı aralıkları

$$\left. \begin{aligned} a_n < b_n < a_{n+1} < b_{n+1} \\ 2\delta_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} \leq 2\delta_n = b_n - a_n \\ \text{ve } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \end{aligned} \right\} (n \in \mathbf{N}) \quad \left. \right\} \quad (4)$$

koşullarını gerçeklerse, doğal sayıların öyle iki tane kesin artan  $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$  ve  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  alt dizileri vardır ki

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a_{n_k}}{m_k}, \frac{b_{n_k}}{m_k} \right] \neq \emptyset$$

gerçekleşir ve burada kesiştirilen aralıklar kesin azalandır, yani

$$I_{k+1} = \left[ \frac{a_{n_{k+1}}}{m_{k+1}}, \frac{b_{n_{k+1}}}{m_{k+1}} \right] \subsetneq \left[ \frac{a_{n_k}}{m_k}, \frac{b_{n_k}}{m_k} \right] = I_k \quad (k \in \mathbf{N})$$

gerçekleşir. Şimdi öncelikle işe

$$m_1 = 1 = n_1$$

tanımlayarak başlayalım.  $a_n \rightarrow +\infty$  olduğundan, genelliği bozmaksızın tüm  $a_n$  (ve dolayısıyla  $b_n$ ) sayılarını pozitif varsayabiliriz.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  olduğundan  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin terimleri engel tanımadan  $\infty$ ’a doğru koşarlar. O halde

$$a_1 < a_1 + \frac{(a_1 + 2\delta_1)}{2\delta_1} < a_{n_2} \quad (2n_1 < n_2)$$

gerçeklenecek biçimde bir  $a_{n_2}$  terimi vardır. O halde kolayca

$$1 < \frac{2\delta_1(a_{n_2} - a_1)}{a_1(a_1 + 2\delta_1)}$$

olur ve dolayısıyla  $b_{n_2} = a_{n_2} + 2\delta_{n_2}$  ve  $\delta_{n_2} \leq \delta_1$  olduğundan

$$\frac{a_{n_2}}{a_1} - \frac{b_{n_2}}{b_1} = \frac{a_{n_2}}{a_1} - \frac{a_{n_2} + 2\delta_{n_2}}{a_1 + 2\delta_1} \geq \frac{a_{n_2}}{a_1} - \frac{a_{n_2} + 2\delta_1}{a_1 + 2\delta_1} = \frac{2\delta_1(a_{n_2} - a_1)}{a_1(a_1 + 2\delta_1)} > 1$$

bulunur ve sonuçta yukarıdaki temel bilgi nedeniyle

$$\frac{b_{n_2}}{b_1} < m_2 < \frac{a_{n_2}}{a_1}$$

gerçekleyen bir  $m$  doğal sayısı vardır. Dikkat (4) 'ün birinci koşulu nedeniyle  $a_1 < a_{n_2}$  olduğundan  $b_1 < a_{n_2} < b_{n_2}$  geçerlidir ve dolayısıyla yukarıda bulunan  $m_2$  doğal sayısı  $m_1 = 1$  'den kesin büyüktür ve üstelik

$$\frac{a_{n_1}}{m_1} = a_1 < \frac{a_{n_2}}{m_2} < \frac{b_{n_2}}{m_2} < b_1 = \frac{b_{n_1}}{m_1}$$

ve dolayısıyla

$$I_2 = \left[ \frac{a_{n_2}}{m_2}, \frac{b_{n_2}}{m_2} \right] \subsetneq \left[ \frac{a_{n_1}}{m_1}, \frac{b_{n_1}}{m_1} \right] = I_1$$

geçerli olmaktadır. Şimdi  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  ve  $m_1 < m_2 < \dots < m_k$  doğal sayılarının tanımlı olduğunu ve bunlar yardımıyla tanımlanan aralıkların iç içe geçerek azaldığını varsayalım. Kısalık amacıyla

$$A_k = \frac{a_{n_k}}{m_k} < B_k = \frac{b_{n_k}}{m_k}$$

yazıp,  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin

$$M_k = a_{n_k} + \frac{a_{n_k}(a_{n_k} + 2\delta_{n_k})}{2\delta_{n_k}} < a_{n_{k+1}} \quad (2n_k < n_{k+1})$$

koşulunu gerçekleyen  $a_{n_{k+1}}$  terimini belirleyelim.  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin terimleri arasında, indisi  $2n_k$  doğal sayısından büyük olan en az bir terimi, yukarıda tanımlanan  $M_k$  pozitif sayısından büyük olmasaydı, her  $n \geq 2n_k$  için  $a_n \leq M_k$  elde edilir ve bu ise  $a_n \rightarrow +\infty$  gerçeğiyle çelişirdi. O halde az önce yapıldığı gibi var olan bu  $a_{n_{k+1}}$  ve  $b_{n_{k+1}} = a_{n_{k+1}} + 2\delta_{n_{k+1}}$  çifti için  $\delta_{n_{k+1}} \leq \delta_{n_k}$  ve  $a_{n_k} < a_{n_{k+1}}$  geçeklendiğini unutmadan

$$\begin{aligned} \frac{a_{n_{k+1}}}{A_k} - \frac{b_{n_{k+1}}}{B_k} &\geq \frac{m_k \cdot a_{n_{k+1}}}{a_{n_k}} - \frac{m_k \cdot (a_{n_{k+1}} + 2\delta_{n_k})}{a_{n_k} + 2\delta_{n_k}} \\ &\geq \frac{a_{n_{k+1}}}{a_{n_k}} - \frac{a_{n_{k+1}} + 2\delta_{n_k}}{a_{n_k} + 2\delta_{n_k}} = \frac{2\delta_{n_k}(a_{n_{k+1}} - a_{n_k})}{a_{n_k}(a_{n_k} + 2\delta_{n_k})} > 1 \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan da

$$\frac{b_{n_{k+1}}}{B_k} < m_{k+1} < \frac{a_{n_{k+1}}}{A_k}$$

gerçekleyen bir  $m_{k+1}$  doğal sayısının varlığı sonucuna ulaşılır. Dikkat edilirse  $n_k < n_{k+1}$  nedeniyle  $b_{n_k} < b_{n_{k+1}}$  ve

$$m_k < m_k \cdot \frac{b_{n_{k+1}}}{b_{n_k}} = \frac{b_{n_{k+1}}}{B_k} < m_{k+1} \quad ,$$

$$A_k < \frac{a_{n_{k+1}}}{m_{k+1}} < \frac{b_{n_{k+1}}}{m_{k+1}} < B_k$$

ve dolayısıyla  $I_{k+1} \subsetneq I_k$  sonuçları geçerlidir. O halde hem doğal sayıların kesin artan  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  ve  $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$  alt dizilerinin ve hem de iç içe geçmiş ve azalan  $I_k$  aralıklarının tümevarımla tanımlanması işlemi bitmiştir.  $I_k$  kapalı ve sınırlı aralıkları iç içe geçtiğinden ve uzunlukları ( $= 2\delta_{n_k}/m_k$ ) sıfıra yakınsadığından (neden?) ünlü **Cantor azalan aralıklar özelliği** nedeniyle (bak. [1]) gerçekten de tüm  $I_k$  aralıklarına ait olan **tek bir**  $x_0$  gerçel sayısı vardır. İkinci problemin çözümünde artık adım adım sona yaklaşıyoruz. Şimdi çözüme geçmeden son olarak şu iyi bilinen gerçeği yineleyelim. Bir  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  gerçel sayı dizisi, ancak ve yalnız

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_{\epsilon} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_{\epsilon}, \quad y_n \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$$

koşulunu gerçeklediğinde  $l$  limitine yakınsar. O halde bu dizinin  $l$  gerçel sayısına **yakınsayamaması** için gerek ve yeter koşul

$$\exists \epsilon_0 > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists n^* > n, \quad y_{n^*} \notin (l - \epsilon_0, l + \epsilon_0)$$

'dir. Bu ise, bu dizinin uygun bir  $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  alt dizisinin tüm terimlerinin  $I_0 = (l - \epsilon_0, l + \epsilon_0)$  aralığına ait olamaması demektir. Gerçekten uygun bir  $1 < n_1$  doğal sayısı için  $y_{n_1} \notin I_0$  olur, uygun bir  $2n_1 < n_2$  doğal sayısı için  $y_{n_2} \notin I_0$  olur, vb. ... Evet, artık ikinci problemin çözümüne geçebiliriz. Problemdaki koşulları sağlayan alttan yarı-sürekli  $f$  fonksiyonunun  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  gerçeklemediğini varsayalım ve bir çelişkiyle yüzleşelim. Demek ki  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  ve fakat  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq 0$  gerçekleyen bir  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  gerçel sayı dizisinin varlığını kabulleniyoruz. Üstelik bu diziyi iyi bilinen nedenlerden ötürü kesinlikle artan alabiliriz. Son gözlemimiz nedeniyle sıfır gerçel sayısının uygun bir  $(-\epsilon_0, \epsilon_0)$  civarı (dolayı, komşuluğu),  $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin uygun bir alt dizisinin hiç bir terimini içermez. Alt dizileri yazarken yeterince teknik karışıklık olduğundan (ya da başka bir deyimle yalın ve kolay yazılıştan uzaklaşmış olduğundan), genelliği bozmaksızın,  $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin kendisinin, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $f(x_n) \notin (-\epsilon_0, \epsilon_0)$  gerçeklediğini varsayabiliriz. Fakat  $f$  fonksiyonu negatif olmayan değerler aldığından, bu da kısaca

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad \epsilon_0 \leq f(x_n)$$

demektir. Şimdi her  $n$  doğal sayısı için  $0 < \epsilon_n < f(x_n) - \frac{\epsilon_0}{2}$  gerçekleyen pozitif  $\epsilon_n$  sayılarını seçerek ve dolayısıyla  $\frac{\epsilon_0}{2} + \frac{\epsilon_n}{2} < f(x_n) - \frac{\epsilon_n}{2}$  gerçekleştiğine dikkat ederek ve  $f$  fonksiyonunun  $x_n$  gerçel sayısında alttan yarı-sürekli olduğunu kullanarak

$$\forall x \in (x_n - \delta'_n, x_n + \delta'_n) \quad \text{için} \quad f(x_n) - \frac{\epsilon_n}{2} < f(x)$$

gerçeklenecek biçimde pozitif  $\delta'_n$  sayıları belirlenir.  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi kesinlikle artan olduğu için, genelliği bozmaksızın  $\delta'_n \leq \frac{1}{3}(x_{n+1} - x_n)$  varsayılabilir. Bunlardan yararlanarak  $\delta_n$  pozitif gerçel sayılarını tümevarımla

$$\delta_1 < \delta'_1, \quad \delta_{n+1} = \min\{\delta'_{n+1}, \frac{\delta_n}{2}\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

biçiminde tanımlarsak, kolayca her  $n$  doğal sayısı için

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} &\leq \delta_n < \delta'_n, \\ x_n + \delta_n &< x_{n+1} - \delta_{n+1}, \\ \forall x \in [x_n - \delta_n, x_n + \delta_n] \quad \text{için} \quad \frac{\epsilon_0}{2} &< f(x) \end{aligned}$$

gerçekleşir. O halde yukarıda, aralıklara ilişkin (4) koşulları  $a_n = x_n - \delta_n$  ve  $b_n = x_n + \delta_n$  gerçel sayıları için sağlandığından

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a_{n_k}}{m_k}, \frac{b_{n_k}}{m_k} \right]$$

gerçekleyen bir  $x_0$  gerçel sayısı var olur ve her  $k \in \mathbb{N}$  için  $m_k x_0 \in [x_{n_k} - \delta_{n_k}, x_{n_k} + \delta_{n_k}]$  gerçekleştiği için

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad \frac{\epsilon_0}{2} < f(m_k x_0)$$

bulunur. Bu ise, hipotez nedeniyle,  $\{f(n x_0)\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin ve dolayısıyla onun tüm alt dizilerinin sıfıra yakınsadığını söyleyen gerçeğe çelişir. Demek ki ikinci problemin hipotezleri zorunlu olarak  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  sonucunu vermelidir; evet, bu zorlu ikinci problemin çözümü sonunda bitirilmiş, rahat bir soluk alabiliriz.

### Üçüncü Problem

$x_0$  sabit gerçel sayısı  $\pi$ 'nin bir tamsayı katı olmadığı sürece  $\{\sin n x_0\}_{n=1}^{\infty}$  dizisi iraksaktır. Eğer  $x_0$  gerçel sayısı, **tam olmayan** bir  $r_0$  rasyonel sayısı sayesinde  $\pi r_0$  biçiminde ise bunu kanıtlamak güç değildir. Gerçekten pay ve paydası aralarında asal olmak üzere  $r_0$  tam olmayan rasyonel sayısı  $\frac{m_0}{n_0}$  ise,  $a_n = \sin n x_0 = \sin n \pi r_0$  olmak üzere,  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin

$$a_{n_0}, a_{2n_0}, a_{3n_0}, a_{4n_0}, \dots$$

terimlerinden oluşan alt dizisinin tüm terimleri ve sonuçta limiti 0 olur; oysa buna karşılık

$$a_{2n_0+1}, a_{4n_0+1}, a_{6n_0+1}, a_{8n_0+1}, \dots$$

terimlerinden oluşan alt dizisi ise, keskin sifirdan farklı  $\sin \pi r_0$  sayısına yakınsayacaktır. Farklı iki limite yakınsayan iki alt diziye sahip olduğu için  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  dizisinin iraksadığı anlaşılır. Peki ya  $x_0$  gerçel sayısı  $\pi$ 'nin bir rasyonel katı değilse? Bu durumu irdeleyerek çözen ve bu yazının üçüncü yazarı tarafından yazılan **Dirichlet'in Bir Teoremi Hakkında** başlıklı yazıyı okumanızı öneririz. O halde **Matematik Dünyası**'nin ilerki sayılarında buluşmak dileğiyle, iyi çalışmalar sevgili okurlar.

### KAYNAKLAR

- [1] N. Ergun, Gerçel sayılarda dokuz temel eşdeğerlik, *Matematik Dünyası*, Aralık 1994, 6-10.
- [2] A. Ülger, Analiz nedir?, *Matematik Dünyası*, Haziran 1999, 9-12.

## SONSÖZ

Korkunç Marmara depreminin ardından, bu ulusun, artık, konut, kent, sanayi inşa ederken bilimin açık ve seçik biçimde yaptığı öngörü ve uyarıları dikkate almayı, kısacası akılcı olmayı, öğrenmesini diliyoruz. Sağ kalanlar için bir ermiş deyimini anımsatmak istiyoruz:

Sursum Corda,

“yürekli olunuz, yaşamın zorluklarına karşı direniniz!”

## EN KÜÇÜK “MATEMATİKSEVERLER” İÇİN...

1. Ahmet ve Ayşe kardeşlerdir. Ahmet 'in kız kardeşlerinin sayısı erkek kardeşlerin sayısına eşittir. Ayşe 'nin kız kardeşlerinin sayısı erkek kardeşlerinin sayısının yarısı kadardır. Bu ailede kaç çocuk vardır?

(Yanıt: 4 erkek, 3 kız çocuk)

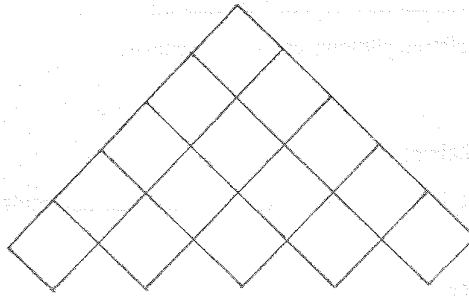
2. 5 tane simiti 6 arkadaş arasında eşit şekilde öyle bölünüz ki, simitlerden hiçbiri 6 parçaya bölünmesin.

(Yanıt: Simitlerden 3 tanesinin herbirini iki eşit parçaya, diğer 2 simitin herbirini de üç eşit parçaya bölmeli.)

3. Bir köfte 10 dakikada pişiyor. Tavaya aynı anda en çok iki köfte sığıdığına göre, 3 köfteyi pişirmek için en az kaç dakika geçecektir?

(Yanıt: 15 dakika)

4. Resimde kaç tane kare vardır?



(Yanıt: 32)