

## ROLLE TEOREMİNİN BİR GENELLEŞMESİ ÜZERİNE

Uygar Sümbül

Bilkent Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, ANKARA

Analizde, aşağıda ifade ettiğimiz ve klasik Rolle Teoremine denk olan teorem çok meşhurdur:

**Teorem :**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  fonksiyonu sürekli ve  $(a, b)$  açık aralığında türevlenebilir olsun. Eğer  $f(a) = 0 = f(b)$  ise,  $f'(x_0) = 0$  olacak biçimde en az bir  $x_0 \in (a, b)$  noktası vardır.

Geometrik olarak, Rolle Teoremi, yukardaki koşulları sağlayan fonksiyonun grafiğinin  $(a, b)$  açık aralığındaki en az bir noktada apsis eksenine paralel teğete sahip olacağını söyler.

Şimdi, Rolle teoreminin aşağıdaki bir genelleşmesini verip ispatlayalım:

**Teorem 1.**  $f$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında sürekli ve açık  $(a, b)$  aralığında türevlenebilir olsun. Ayrıca,  $f(a) = 0 = f(b)$  eşitliği sağlansın. Bu takdirde, herhangi bir  $P(x)$  sürekli fonksiyonu verildiğinde,

$$f'(x_0) = f(x_0) \cdot P(x_0) \quad (1)$$

sağlanacak biçimde bir  $x_0 \in (a, b)$  noktası vardır.

**Sonuçlar:**

(1)  $P(x) \equiv 0$  alırsak, Rolle Teoremine denk olan yukarıdaki teorem elde edilir.

(2)  $P(x) \equiv 1$  alırsak,  $f'(x_0) = f(x_0)$  sağlanacak biçimde bir  $x_0 \in (a, b)$  noktası vardır.

(3)  $P(x) = f(x)^{1998}$  alırsak,  $f'(x_0) = f(x_0)^{1999}$  sağlanacak biçimde bir  $x_0 \in (a, b)$  noktası vardır.

**Teorem 1'in İspatı:**  $P(x) = Q'(x)$  eşitliğini sağlayan bir  $Q(x)$  fonksiyonu alalım. ( $Q(x)$ 'e, bilindiği gibi,  $P(x)$ 'in ilkel fonksiyonu veya belirsiz integrali denilir.) Şimdi şöyle bir  $F(x)$  fonksiyonu tanımlayalım:

$$F(x) = f(x)e^{-Q(x)} \quad (2)$$

$f(a) = 0 = f(b)$  olduğuna göre  $F(a) = 0 = F(b)$  'dir. O halde klasik Rolle Teoremine göre,

$$F'(x_0) = 0 \quad (3)$$

sağlanacak biçimde en az bir  $x_0 \in (a, b)$  bulunacaktır.  $F$  fonksiyonunun (2) 'deki ifadesini (3) 'de gözönüne alırsak,

$F'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) \cdot e^{-Q(x_0)} - f(x_0) \cdot Q'(x_0) \cdot e^{-Q(x_0)} = 0$  olur.  $e^{-Q(x_0)} \neq 0$  olduğuna göre yukarıdaki eşitliğin her iki yanını  $e^{-Q(x_0)}$  ile bölebiliriz. O halde,  $Q'(x_0) = P(x_0)$  olduğuna göre,

$$f'(x_0) - f(x_0) \cdot Q'(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) = f(x_0) \cdot P(x_0)$$

eşitliğini elde ederiz.

Aşağıdaki teorem, Teorem 1 'in koşullarını zayıflatmakla elde edilir:

**Teorem 2.**  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  fonksiyonu  $[a, b]$  aralığında sürekli,  $(a, b)$  'de türevlenen ve bir  $C$  sabiti için  $f(a) = C = f(b)$  koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde herhangi bir  $P(x)$  sürekli fonksiyonu için,

$$f'(x_0) = (f(x_0) - C) \cdot P(x_0)$$

sağlanacak biçimde bir  $x_0 \in (a, b)$  noktası vardır.

**İspat:**  $\varphi(x) = f(x) - C$  diyelim.  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$  olur. O halde Teorem 1'e göre

$$\varphi'(x_0) = \varphi(x_0) \cdot P(x_0)$$

sağlanacak biçimde bir  $x_0 \in (a, b)$  vardır. Bu sonuncu eşitlikten ise ( $\varphi(x)$  yerine  $f(x) - C$  koymakla)

$$f'(x_0) = (f(x_0) - C) \cdot P(x_0)$$

elde edilir.

Teorem 1'in bir sonucunu daha söyleyelim:

**Sonuç:**  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$  sürekli ve  $(a, b)$  açık aralığında türevlenebilir iki fonksiyon olsunlar. Ayrıca, her  $x \in (a, b)$  için  $f(x) \neq g(x)$  olsun. Bu takdirde, eğer  $f(a) = g(a)$  ve  $f(b) = g(b)$  ise, herhangi sürekli  $P(x)$  verildiğinde

$$\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{f(x_0) - g(x_0)} = P(x_0)$$

eşitliği sağlanacak biçimde bir  $x_0 \in (a, b)$  vardır.

**İspat:**  $\varphi(x) = f(x) - g(x)$  diyelim.  $f$  ve  $g$  üzerine konulmuş koşullardan  $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$  olur. O halde Teorem 1'e göre  $\varphi'(x_0) = \varphi(x_0) \cdot P(x_0)$  sağlanacak biçimde bir  $x_0 \in (a, b)$  vardır. Buradan da,

$$f'(x_0) - g'(x_0) = (f(x_0) - g(x_0)) \cdot P(x_0) \quad \text{ve} \quad \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{f(x_0) - g(x_0)} = P(x_0)$$

elde edilir.

**Teşekkürler:** Bu çalışmanın ortaya çıkmasında, değerli yardımlarından dolayı, Doç. Dr. İlham Aliyev'e şükranlarımı sunuyorum.

### SAYIN OKURLARIMIZ...

Önceden yayınlanmış olan "Matematik Dünyası" dergisinin sayıları, tanesi 500.000,- TL karşılığında, satışa sunulmuştur. Bu sayıları edinmek isteyen okurlar, tutarını Türkiye İş Bankası Antalya Şubesi 6200/30000/2203551 no'lu Prof. Dr. Halil İbrahim Karakaş hesabına yatırıp, dekontun bir örneği ile istedikleri sayıları bize gönderdikleri takdirde, sözkonusu sayılar adreslerine postalanacaktır.

Elimizde Bulunan Sayılar:

Cilt 1	Sayı: 1,2,3,4	;	Cilt 2	Sayı: 1,2,3,4,5
Cilt 3	Sayı: 5	;	Cilt 4	Sayı: 1,3,4,5
Cilt 5	Sayı: 1,5	;	Cilt 6	Sayı: 1,2,3,4,5
Cilt 7	Sayı: 1,2,3,4,5	;	Cilt 8	Sayı: 1,2,3,4