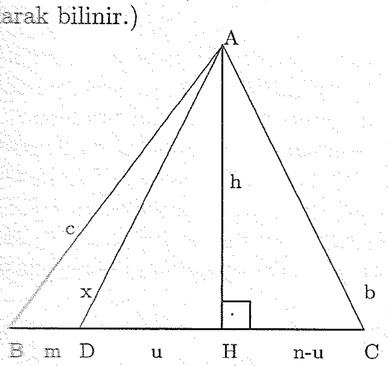
BİR ÖSS SORUSU ÜZERİNE NOTLAR

Fikri Gökdal
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-ANTALYA

İddia: Bir ABC üçgeni ve $[BC]$ 'nin D ile gösterilen bir iç noktası verildiğinde, A noktasının B, D, C noktalarına uzaklığı, sırayla c, x, b ile; B noktasının D, C noktalarına uzaklığu, sırasıyla m, a ile ve D noktasının C noktasına uzaklığı da n ile gösterilmek üzere a, b, c, m, n, x arasında,

$$ax^2 = mb^2 + nc^2 - mna \qquad (*)$$

bağıntısı vardır. (Bu bağıntı, Stewart bağıntısı olarak bilinir.)



İspat. A noktasından BC doğrusuna indirilen dikmenin ayağı H ile gösterildiğinde; ABH, ADH ve AHC dik üçgenleri oluşur. $c > b$ ve $|DH| = u$ kabul edilip Pisagor Teoremi uygulandığında;

$$c^2 = (m+u)^2 + h^2 \qquad (1)$$

$$x^2 = u^2 + h^2 \qquad (2)$$

$$b^2 = (n-u)^2 + h^2 \qquad (3)$$

elde edilir. (1) ve (2) 'den,

$$\begin{aligned} c^2 - x^2 &= (m+u)^2 + u^2 \\ &= (m+u-u)(m+u+u) \\ &= m(m+2u) \end{aligned}$$

ve buradan,

$$x^2 = c^2 - m^2 - 2mu \qquad (4)$$

(2) ve (3) 'ten,

$$\begin{aligned} b^2 - x^2 &= (n-u)^2 - u^2 \\ &= (n-u+u)(n-u-u) \\ &= n(n-2u) \end{aligned}$$

ve buradan da,

$$x^2 = b^2 - n^2 + 2nu \qquad (5)$$

(4) ve (5) 'ten,

$$\begin{aligned} nx^2 + mx^2 &= n(c^2 - m^2 - 2mu) \\ &\quad + m(b^2 - n^2 + 2nu) \\ (m+n)x^2 &= nc^2 - nm^2 - 2nmu \\ &\quad + mb^2 - mn^2 + 2mnu \\ (m+n)x^2 &= mb^2 + nc^2 - mn(m+n) \end{aligned}$$

$$ax^2 = mb^2 + nc^2 - mna \qquad (*)$$

bulunur. Bu bağıntı,

(i) $b = c$ iken,

$$\begin{aligned} ax^2 &= mb^2 + nb^2 - mna \\ ax^2 &= ab^2 - mna \end{aligned}$$

$$x^2 = b^2 - mn \qquad (6)$$

biçimini,

(ii) $b = x$ iken,

$$\begin{aligned} ax^2 &= mx^2 + nc^2 - mna \\ (a-m)x^2 &= nc^2 - mna \\ nx^2 &= nc^2 - mna \end{aligned}$$

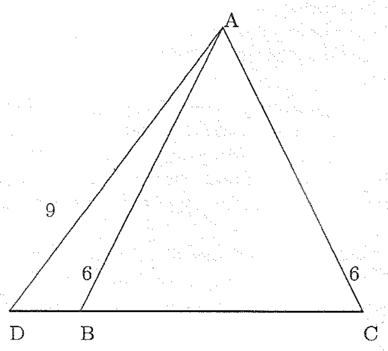
$$x^2 = c^2 - ma \qquad (6)$$

biçimini alır.

(7) bağıntısı, ÖSS'99 sınavında sunulmuş olan:

"ADC bir üçgen,
$|AD| = 9\ cm$, $|AB| = |AC| = 6\ cm$.

Şekil 1



Yukardaki verilere göre, $|DB||DC|$ çarpımının sayısal değeri kaçtır?" sorusunun çözümünde kullanılabilir.

(7) bağıntısındaki x, c ve ma 'nın bu sorudaki karşılıkları sırasıyla 6, 9 ve $|DB||DC|$ 'dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} x^2 &= c^2 - ma \\ 6^2 &= 9^2 - |DB|.|DC| \end{aligned}$$

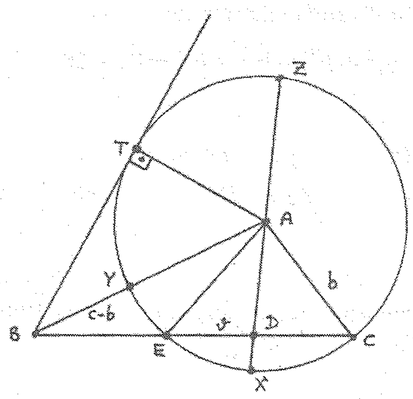
ve buradan,

$$|DB|.|DC| = 45$$

bulunur.

Adlandırmalar aynı kalmak üzere (*) bağıntısı

Şekil 2



çemberden yararlanılarak elde edilebilir: Merkezi A, yarıçapı b olan çember ile $[BC]$ 'nin kesişim noktası E ile, B noktasından çembere çizilen teğetlerden birinin çembere değdiği nokta T ile gösterildiğinde, B noktasının bu çembere göre kuvveti,

$$|BT|^2 = |BE|.|BC|$$

ve BTA dik üçgeninde Pisagor Teoreminden dolayı

$$|BT|^2 = c^2 - b^2$$

'dir. O halde,

$$|BE|.|BC| = c^2 - b^2 \qquad (8)$$

'dir. Diğer taraftan AD doğrusunun çemberle kesişim noktaları X ve Z ile gösterilmek üzere,

$$|DE|.|DC| = |DX|.|DZ| = (b-x)(b+x)$$

$$|DE|.|DC| = (b^2 - x^2) \qquad (9)$$

bulunur $|BE| = |BD| - |DE| = m - v$, $|BC| = a$ yazılarak (8) 'den,

$$a(m-v) = c^2 - b^2$$

ve (9) 'dan

$$v(a-m) = b^2 - x^2$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} a(m-v) &= c^2 - b^2 \\ m - v &= \frac{c^2 - b^2}{a} \\ v &= m - \frac{c^2 - b^2}{a} \\ v &= \frac{ma - c^2 + b^2}{a} \end{aligned}$$

'dır. v 'nin bu değeri $v(a-m) = b^2 - x^2$ eşitliğinde yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} (\frac{ma - c^2 + b^2}{a})(a-m) &= b^2 - x^2 \Rightarrow \\ (ma - c^2 + b^2)(a-m) &= ab^2 - ax^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$ma(a-m) - c^2(a-m) + b^2(a-m) = ab^2 - ax^2$$

olur. $m + n = a$ olduğundan bu ifade,

$$man - c^2n + b^2n = ab^2 - ax^2$$

biçimini alır. Buradan,

$$\begin{aligned} ax^2 &= ab^2 - nb^2 + nc^2 - mna \\ &= (a-n)b^2 + nc^2 - mna \end{aligned}$$

$$ax^2 = mb^2 + nc^2 - mna \qquad (*)$$

elde edilir. Bağıntının elde edilmesinde uygulanan bu metot az önce sözü edilen ÖSS sorusunun çözümünde kullanılabilir:

Şekil 2 'deki D ve E noktaları çakıştığında B noktasının çembere göre kuvveti,

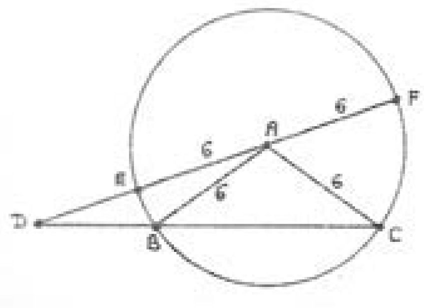
$$|BD|.|BC| = c^2 - b^2$$

olacağından, söz konusu sorunun çözümü $c = 9$ ve $b = 6$ için

$$|BD|.|BC| = 9^2 - 6^2 = 45$$

olarak elde edilir.

Şekil 3



Bu yaklaşım, basit bir çözümün elde edilmesini sağlar: A merkezli ve 6 yarıçaplı çemberin AD doğrusu ile kesişim noktaları E ve F ile gösterilmek üzere, D noktasının bu çembere göre kuvveti yazılarak (Şekil 3),

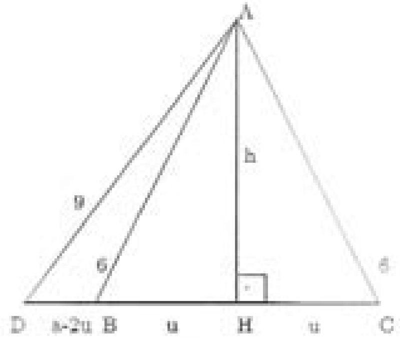
$$|DB|.|DC| = |DE|.|DF|$$
$$= (9-6)(9+6) = 3.15 = 45$$

bulunur.

Bir ikiz kenar üçgende, tepeden tabana indirilen dikmenin ayağı (olan nokta) tabanın orta noktasıdır. Sözü edilen soru bu bilgi kullanılarak da çözülebilir:

ABC ikizkenar üçgen ve $|AB| = |AC| = 6$ olduğundan, A 'dan BC kenarına indirilen dikmenin ayağı olan H noktası $[BC]$ 'nin orta noktasıdır.

Şekil 4



$|AH| = h$ ve $|BH| = |HC| = u$ kabul edilip ADH ve ABH üçgenlerine Pisagor Teoremi uygulandığında,

$$(a-u)^2 + h^2 = 81\ , \quad u^2 + h^2 = 36$$

bulunur. Taraf tarafa çıkarma ile,

$$[(a-u)^2 + h^2] - [u^2 + h^2] = 81 - 36$$
$$(a-u)^2 - u^2 = 45$$
$$(a-u-u)(a-u+u) = 45$$
$$(a-2u)a = 45 \Rightarrow |DB|.|DC| = 45$$

elde edilir.

Yine, söz konusu sorunun çözümü, $B\hat{A}C$ açısının ölçüsüne göre basitleştirilebilir:

1. $B\hat{A}C = 60^\circ$ alınabilir. Bu durumda ABC üçgeni eşkenar üçgen ve bu üçgenin herhangi bir yüksekliği $3\sqrt{3}$ olacağından $|DB| = m$ kabul edilerek;

$$81 = (3+m)^2 + (3\sqrt{3})^2$$
$$36 = 3^2 + (3\sqrt{3})^2 \Rightarrow$$
$$45 = (3+m)^2 - 3^2 = m(m+6) = |DB|.|DC|$$

elde edilir.

2. $B\hat{A}C = 0^\circ$ alınabilir. Bu durumda $B \equiv C = H$ olur ve ADH dik üçgeninden $|DB|.|DC| = |DH|^2 = 9^2 - 6^2 = 45$ bulunur.

3. $B\hat{A}C = 90^\circ$ ve $|DB| = m$ alınarak,

$$(m + 3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 81$$

$$(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 36$$

'dan, taraf tarafa çıkarma ile,

$$m(m + 6\sqrt{2}) = 45$$

bulunur.

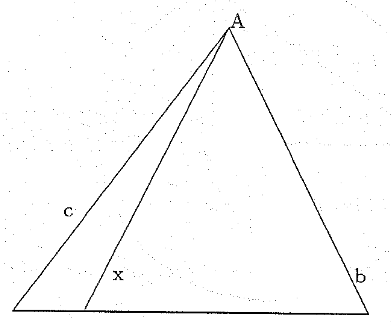
(*) bağıntısı ve dolayısıyla söz konusu problemin çözümü vektörlerin iç çarpımından yararlanılarak elde edilebilir.

Başlangıç noktaları aynı olan $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ gibi iki vektör arasındaki açı $(\vec{a}, \vec{b})$ ile gösterilmek üzere, bu iki vektörün (öklidiyen) iç çarpımı,

$$\vec{a}.\vec{b} = ||a||||b|| \ \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

ile tanımlanır. ($||\vec{x}||$: $\vec{x}$ vektörünün uzunluğunu gösterir.)

Şekil 5



Şekil 5 'ten,

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{AD} + \vec{DB} \\ (\vec{AB})^2 &= (\vec{AD} + \vec{DB})^2 \\ (\vec{AB})^2 &= \vec{AD}^2 + 2\vec{AD}.\vec{DB} + \vec{DB}^2 \end{aligned}$$

ve yine aynı şekilden,

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{AC} + \vec{CB} \\ (\vec{AB})^2 &= (\vec{AC} + \vec{CB})^2 \\ (\vec{AB})^2 &= \vec{AC}^2 + 2\vec{AC}.\vec{CB} + \vec{CB}^2 \end{aligned}$$

bulunur. Karşılıkları yazılarak,

$$x^2 = c^2 - 2cm\cos B + m^2$$

$$x^2 = b^2 - 2bn\cos C + n^2 \ ;$$

buradan birinci eşitlik n, ikinci eşitlik m ile çarpılıp taraf tarafa toplanarak,

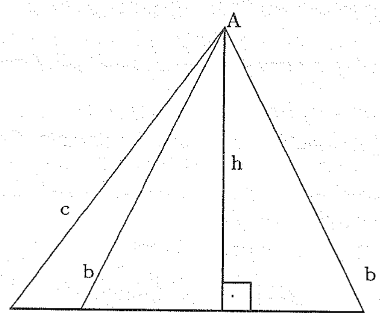
$$\begin{aligned} nx^2 + mx^2 &= nc^2 - 2cmn\cos B + nm^2 + mb^2 \\ &\quad -2bmn\cos C + mn^2, \\ (n+m)x^2 &= nc^2 + mb^2 - 2mn(c\cos B + b\cos C) \\ &\quad +nm(m+n) \ , \end{aligned}$$

$$ax^2 = mb^2 + nc^2 - 2mna + nma$$

$$ax^2 = mb^2 + nc^2 - mna \qquad (*)$$

bulunur.

Şekil 6



Şekil 6 'da $|AB| = |AC|$,

$$\begin{aligned} \vec{DB} \ . \ \vec{DC} &= (\vec{DE} - \vec{BE}).(\vec{DE} + \vec{EC}) \\ &= (\vec{DE})^2 - (\vec{BE})^2 \ , \end{aligned}$$

$|\vec{DE}| = c\cos B$ ve $|\vec{BE}| = b\cos C$ 'dir:

$$\begin{aligned} (\vec{DE})^2 - (\vec{BE})^2 &= c^2(1-\sin^2 B) - b^2(1-\sin^2 C) \\ &= c^2 - b^2\sin^2 C - c^2\sin^2 B = c^2 - b^2. \end{aligned}$$

Değerler, yerlerine yazıldığında sorunun cevabı,

$$\begin{aligned} \vec{DB}.\vec{DC} &= ||\vec{DB}||.||\vec{DC}|| \ \cos 0 \\ &= c^2 - b^2 = 9^2 - 6^2 = 45 \end{aligned}$$

bulunur.

—o—