PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

-Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

-Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

-Çözümleri, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA adresine 31 Aralık 1999 tarihine kadar gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.196. $n \in \mathbf{N}$ olmak üzere, 2^n ve 5^n sayılarının onluk sayı sisteminde yazılışlarındaki ilk rakamlarının aynı olduğu bilinmektedir. Bu rakamı bulunuz.

A.197. $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ dizisi aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

$$a_1 = 0, |a_2| = |a_1 + 1|, |a_3| = |a_2 + 1|, ...,$$
$$|a_n| = |a_{n-1} + 1|, ...,$$

Bu durumda, $2(a_1 + a_2 + ... + a_n) \geq -n$ olduğunu gösteriniz.

A.198. $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ olduğu halde ıraksak olan bir sınırlı dizi var mıdır?

A.199. $f : (1, \infty) \to \mathbf{R}$ sürekli bir fonksiyon olup her $x, y > 1$ için $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ eşitliğini sağlamaktadır. f fonksiyonunu bulunuz.

A.200. ABC bir eşkenar üçgen ve P, bu eşkenar üçgenin düzleminde bulunan herhangi bir nokta ise, $|PA| + |PC| \geq |PB|$ olduğunu ispatlayınız.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.196. m ve n 'nin $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$ eşitliğini sağlayan değerlerini bulunuz.

Y.197. Katsayıları tamsayılar olan bir $P(x)$ polinomu, belli bir n tamsayısı için $P(-n) < P(n) < n$ eşitsizliklerini sağlıyor. $P(-n) < -n$ olacağını kanıtlayınız.

Y.198. Her biri üçüncü dereceden ve reel katsayılı $P(x), Q(x)$ ve $R(x)$ polinomlarının her $x \in \mathbf{R}$ için

$$P(x) \leq Q(x) \leq R(x)$$

eşitsizliklerini sağladığını varsayalım. Bununla beraber, $P(x_0) = R(x_0)$ sağlanacak biçimde bir x_0 sayısının varlığını kabul edelim. Bu takdirde, her $x \in \mathbf{R}$ için

$$Q(x) = \alpha(P(x)) + (1 - \alpha)R(x)$$

eşitliği sağlanacak biçimde bir $\alpha \in [0, 1]$ sabitinin varlığını kanıtlayınız.

Y.199. Her reel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayıları için

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i + j - 1} \geq 0$$

olduğunu kanıtlayınız.

Y.200. Bir E düzlemi ile bu düzlemin içinde bir A noktası ve dışında bir B noktası veriliyor. E düzlemi içinde öyle bir C noktası bulunuz ki,

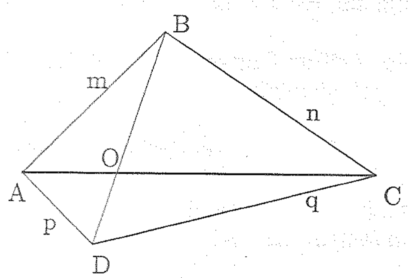
$$\frac{|AB| + |AC|}{|BC|}$$

maksimum olsun.

ÇÖZÜMLER

A.186. Bir konveks dörtgenin köşeleri, bu dörtgeni, alanları tamsayılar olan dört tane üçgene bölmüştür. Söz konusu dört sayının çarpımının bir tam kare olduğunu gösteriniz.

Çözüm.



Üçgenlerin alanlarına m, n, p ve q diyelim (şekile bakınız). AOB ve COB üçgenlerinden, $\frac{m}{n} = \frac{|AO|}{|OC|}$ olduğu görülür. Benzer şekilde, $\frac{p}{q} = \frac{|AO|}{|OC|}$.

Böylece,

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Rightarrow mq = pn \Rightarrow m.n.p.q = (np)^2$$

oluyor ki, bu da $mnpq$ çarpımının bir tam kare olduğunu gösteriyor.

A.187. $x^{24} - x^{19} + x^{14} - x^3 + 1 > 0$ eşitsizliğinin her $x \in \mathbb{R}$ için sağlandığını kanıtlayınız.

Çözüm. (1) $x \leq 0$ olduğunda $(-x^{19}) \geq 0$, $(-x^3) \geq 0$ olur ve eşitsizlik sağlanır.

(2) $0 < x < 1$ olsun. Eşitsizliğin sol tarafını yeniden düzenlersek,

$$x^{24} + x^{14}(1 - x^5) + (1 - x^3) > 0$$

olur.

(3) $x \geq 1$ olsun. Eşitsizliğin sol tarafını uygun şekilde düzenlersek,

$$x^{19}(x^5 - 1) + x^3(x^{11} - 1) + 1 > 0$$

olur.

A.188. Bir sınıftaki öğrencilerden a_1 tanesi ders yılı içindeki sınavlardan en az bir tane 2 almıştır. Öğrencilerden a_2 tanesi en az iki tane 2, ..., a_k tanesi en az k tane 2 almıştır ve k 'dan fazla sayıda 2 alan öğrenci yoktur. Sınıftaki öğrencilerin aldığı 2 'lerin sayısını bulunuz.

Çözüm. Venn şeması çizilerek düşünülürse, sınıfın toplam 2 sayısının

$$(a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \ldots$$

$$+(k-1)(a_{k-1} - a_k) + k.a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

olduğu görülebilir.

A.189. Fibonacci dizisi denilen dizi şöyle tanımlanıyor: $a_1 = a_2 = 1$ ve her $k \geq 1$ için $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$. Bu dizinin a_{1000} ve a_{770} terimlerinin en büyük ortak bölenini bulunuz.

Çözüm. $a_0 = 0$ diyelim ve önce Fibonacci dizisinin bazı önemli özelliklerini kanıtlayalım.

(a) Her $k \geq 0, l \geq 1$ için

$$a_{k+l} = a_k a_{l-1} + a_{k+1} a_l$$

eşitliği sağlanır.

Bu, k 'ya göre tümevarım uygulanarak ispatlanabilir. $k = 0$ için eşitlik açıktır. $k = 1$ için ise $a_{l+1} = a_{l-1} + a_l$ eşitliği elde edilir ki, bu da doğru eşitliktir.

Şimdi, yukarıdaki eşitliğin bir k ve $k - 1$ için sağlandığını varsayalım. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} a_{k+1+l} &= a_{k+l} + a_{k+l-1} \\ &= a_k a_{l-1} + a_{k+1} a_l + a_{k-1} a_{l-1} + a_k a_l \\ &= a_{l-1}(a_k + a_{k-1}) + a_l(a_{k+1} + a_k) \\ &= a_{l-1} a_{k+1} + a_l a_{k+2} \end{aligned}$$

(b) Her n ve k için a_{kn}, a_k ile bölünür. Bu özellik, (a) şıkkındaki özellik kullanılarak, ispatlanabilir.

(c) Fibonacci dizisinin herhangi iki komşu terimi aralarında asal sayılardır.

Gerçekten, bir a_k ve a_{k+1} 'in ortak böleni $l \neq 1$ olsaydı, $a_{k-1} = a_{k+1} - a_k$ eşitliğinden l 'nin a_{k-1} 'i de böldüğünü; $a_{k-2} = a_k - a_{k-1}$ eşitliğinden l 'nin a_{k-2} 'yi de böldüğünü ve benzerlerini söyleyebiliriz. Sonuçta, l, 1 'i de bölmelidir.

Şimdi, problemin çözümüne dönelim. (a) özelliğine göre,

$$a_{1000} = a_{770} a_{229} + a_{771} a_{230} .$$

a_{1000} ve a_{770} 'in ortak böleni r ise, yukarıdaki eşitlikten ve (c) 'deki özellikden, a_{230} 'un da r 'ye bölüneceğini söyleyebiliriz. Öte yandan,

$$a_{770} = a_{690}\, a_{79} + a_{691} a_{80}$$

eşitliğine bakarsak, (b) şıkkındaki özelliğe göre, a_{690} sayısı a_{230} 'a bölüneceğinden r 'ye de bölünecektir ve buna göre de a_{80} sayısı da r ile bölünmelidir.

Buradan a_{240} 'ın r 'ye bölüneceğini söyleyebiliriz. Şimdi,

$$a_{240} = a_{230} a_9 + a_{231} a_{10}$$

eşitliğine bakarsak, a_{10} sayısının r 'ye bölüneceğini söyleyebiliriz.

Öte yandan, (b) 'ye göre, a_{1000} ve a_{770}, a_{10} ile bölünür. Demek ki, $a_{10} = 55$ sayısı a_{1000} ve a_{770} 'in OBEB 'idir.

NOT: İspat etmek mümkündür ki, her m,n $\in$ N için $(a_m, a_n) = a_{(m,n)}$ 'dir.

A.190. O, A, B, C, D noktaları uzayda ($\mathbf{R}^3$) farklı noktalar olmak üzere,

$$A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = D\hat{O}A = \gamma \quad (\gamma \text{ dar açı})$$

veriliyor $A\hat{O}C + B\hat{O}D$ 'nin en küçük ve en büyük değerlerini bulunuz.

Çözüm. O noktası başlangıç olmak üzere OA, OB, OC, OD 'nin birim vektörleri a, b, c, d olsun. Bu durumda iç çarpımdan,

$$a.b = b.c = c.d = d.a = \cos\gamma \qquad (1)$$

ve buradan $(a-c)(b-d) = 0$ elde edilir. (1) denklemi $a = c$ veya $b = d$ iken veya $a - c$ vektörü $b - d$ vektörüne dik iken sağlanır. Eğer $a = c$ ise, O, A, C doğrusal ve $A\hat{O}C = 0$, $b = d$ ise, O, B, D doğrusal ve $B\hat{O}D = 0$ olur. Bu açıların ikisi aynı zamanda sıfır olursa, $A\hat{O}C + B\hat{O}D$ 'nın minimum değeri elde edilir. $a-c$ ile $b-d$ birbirine dik iken de, birim vektörlerden

$$(a+c)(a-c) = (a+c)(b-d) = 0$$

$$(b+d)(b-d) = (b+d)(a-c) = 0$$

yazılabilir. Bu, $a+c$ ve $b+d$ 'nin $a-c$ ve $b-d$ 'ye dik olması, dolayısıyla da, $a+c$ ile $b+d$ 'nin doğrusal olması demektir. O halde,

$$(a+c)(b+d) = |a+c||b+d|$$

'dir. Bu kullanılarak

$$\begin{aligned} 4\cos\gamma &= 2\sqrt{(1+\cos A\hat{O}B)(1+\cos B\hat{O}D)} \\ &= 4\cos\frac{A\hat{O}B}{2}\cos\frac{B\hat{O}D}{2}, \end{aligned}$$

maksimum için $A\hat{O}B = B\hat{O}D$ olması gerekir: $2\arccos(2\cos\gamma - 1)$ olur.

Y.186. İkişer ikişer birbirine dik olan Ox, Oy, Oz ışınları bir E düzlemini A, B, C noktalarında kesiyorlar. Oluşan $OABC$ piramidinin tüm ayrıtlarının uzunlukları toplamı m ise, bu piramidin hacminin maksimum değeri nedir?

Çözüm. $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ olsun; $AC^2 = a^2 + c^2, BC^2 = b^2 + c^2, AB^2 = a^2 + b^2$ olduğundan

$$m = a + b + c + \sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{a^2+b^2}$$

olur. $V = \frac{abc}{6}$ 'nın maksimum değerini bulmak istiyoruz. $A.O. - G.O.$ eşitsizliğinden,

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \text{ ve } b^2 + c^2 \geq 2bc$$

ve bunlar yardımıyla,

$$m \geq 3\sqrt[3]{abc} + \sqrt{2bc} + \sqrt{2ac} + \sqrt{2ab}$$

elde edilir. İkinci yanda son üç terime $A.O.-G.O.$ eşitsizliği uygulanarak,

$$m \geq 3(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{abc}$$

$$m \geq 3(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{6V}$$

ve dolayısıyla, $V_{max} = \frac{(5\sqrt{2}-7)m^3}{162}$ bulunur. (Bu $a = b = c$ iken gerçekleşir.)
(Çözenler: *Murat Ak (Antalya), Alper Çay (Kayseri), Mehmet Erhan Ünal (Isparta), Ali Çivril (Isparta)*).

Y.187 Bir komisyon 40 kez toplandı. Komisyonun her toplantısında 10 üye hazır bulundu ve ayrıca, komisyon üyelerinden herhangi bir ikili düşünüldüğünde, bu ikili, toplantılarda en fazla 1 kez hazır bulundu. Komisyon üyelerin sayısının 60 'tan fazla olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Her toplantıda 10 kişi ve dolayısıyla, $\binom{10}{2} = 45$ ikili bulunmuştur. Her ikili, en fazla bir toplantıda bulunabileceğinden ve toplantı sayısı 40 olduğundan, komisyon üyelerinden oluşturulabilir ikililer sayısı 45.40 = 1800 'den az olmayacaktır. Oysa, 60 (veya daha az) kişiden oluşturulabilir ikililer sayısı $\binom{60}{2} = \frac{60.59}{2}$ sayısından ve dolayısıyla, 1800 'den az olacaktır. ($\frac{60.59}{2} < 1800$ olduğuna dikkat edin.)
(Çözenler: *Mehmet Erhan Ünal (Isparta), Murat Ak (Antalya), Mustafa Sabri Kılıç (Ankara)*).

Y.188. a ve b aralarında asal doğal sayılar olsun. Eğer $a+b$ ve a^2+b^2 sayılarını 1 'den büyük ortak böleni varsa, bunun 2 olduğunu gösteriniz.

Çözüm. d sayısı $a+b$ ve a^2+b^2 sayılarının bir ortak böleni ise, d sayısı $(a+b)^2 - (a^2+b^2) = 2ab$ sayısının da ortak bölenidir. Öyleyse, d sayısı,

$$2a^2 = 2a(a+b) - 2ab \text{ ve } 2b^2 = 2b(a+b) - 2ab$$

sayılarının da ortak böleni olmalıdır. Öte yandan, a^2 ve b^2 aralarında asal olduklarından, d sayısı 2 'nin böleni olmalıdır.
(Çözenler: *Mustafa Sabri Kılıç (Ankara), Alper Çay (Kayseri), Murat Ak (Antalya), Mehmet Erhan Ünal (Isparta), Ali Çivril (Isparta)).*

Y.189 a, b ve c negatif olmayan herhangi sayılar olmak üzere,

$$a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$
$$+a^2bc+b^2ac+c^2ab \geq 0$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm. Eşitsizliğin sol tarafına $f(a,b,c)$ diyelim. Bazı hesaplamalardan sonra $f(a,b,c)$ 'yi şu biçimde yazabiliriz:

$$f(a,b,c)$$
$$=(a+b+c)[abc-(a+b-c)(b+c-a))(c+a-b)].$$

$(a+b-c),(b+c-a)$ ve $(c+a-b)$ sayıları içinde en fazla bir tanesi negatif olabilir (çünkü, örneğin, $a+b-c<0$ ve $b+c-a<0$ olursa, taraf tarafa toplamakla $2b<0$ elde ederiz). Şimdi, eğer bu sayılardan, sadece, bir tanesi negatif ise, onların çarpımı ≤ 0 olacaktır ve bu takdirde $f(a,b,c)\geq 0$ olacağı açıktır. Eğer söz konusu sayıların hiçbirisi de negatif değilse, bu takdirde

$$a^2b^2c^2 \geq [a^2-(b-c)^2].[b^2-(a-c)^2].[c^2-(a-b)^2]$$
$$=(b+c-a)^2(a+c-b)^2(b+a-c)^2$$

eşitsizliğinin her iki yanından karekök alarak

$$abc \geq (b+c-a)(a+c-b)(b+a-c) \Rightarrow f(a,b,c)\geq 0$$

elde ederiz. (Çözenler: *Murat Ak (Antalya), Alper Çay (Kayseri)).*

Y.190. $x_1,x_2,\cdots,x_m$ ve $y_1,y_2,\cdots,y_n$ sayıları öyle seçilmişler ki, $x_1+x_2+\cdots+x_m$ ve $y_1+y_2+\cdots+y_n$ toplamları birbirine eşitler ve

$$S=x_1+x_2+\cdots+x_m=y_1+y_2+\cdots+y_n$$

sayısı için $S<m.n$ eşitsizliği sağlanmaktadır. İspat ediniz ki,

$$x_1+x_2+\cdots+x_m=y_1+y_2+\cdots+y_n$$

eşitliğinde bir kaç sayıyı, eşitlik korunacak biçimde silmek mümkündür.

Çözüm. $S=x_1+x_2+\cdots+x_m=y_1+y_2+\cdots+y_n$ sayısı 2 'den az olamaz. (Aksi durumda, $S<m.n$ şartından $1<1.1$ çelişkisi çıkar.) $m=n=2$, $2\leq S\leq 3$ durumunda problemin hükmü kolayca kontrol edilebilir. Şimdi, $m+n=k$ diyelim ve $k\geq 4$ için problemi, k 'ya göre tümevarım uygulayarak çözelim. Genelliği bozmadan, $x_1=\max_{i=\overline{1,m}} x_i, y_1=\max_{j=\overline{1,n}} y_j$ ve $x_1<y_1$ olsun. ($x_1=y_1$ durumunda eşitliğin her iki yanında bu iki sayıyı sileriz ve problem çözülmüş olur). $x_1+x_2+\cdots+x_m=y_1+y_2+\cdots+y_n$ eşitliğini

$$(x_1-y_1)+x_2+\cdots+x_m=y_2+\cdots+y_n \quad (*)$$

biçiminde yazalım. $x_1-y_1=x_1'$ dersek, eşitliğin her iki yanında toplam $m+n-1=k-1$ terim olacaktır. Tümevarım adımını uygulayabilmemiz için $S'=y_2+\cdots+y_n$ toplamı $m.(n-1)$ sayısından küçük olmalıdır. $y_1=\max_{i=\overline{1,n}} y_j$ olduğundan $y_1>S/n$ 'dir ve dolayısıyla,

$$S'=S-y_1<S-\frac{s}{n}=S.\frac{n-1}{n}$$

$$<mn.\frac{n-1}{n}=m(n-1)\Rightarrow S'<m(n-1)$$

Böylece, tümevarım varsayımına göre, $(*)$ 'da bazı terimleri sildikten sonra eşitliği korumak mümkündür. Öyleyse, $x_1+x_2+\cdots+x_m=y_1+y_2+\cdots+y_n$ eşitliğinde de bazı terimleri sildikten sonra eşitliğin korunmasını sağlamak mümkündür. (Çözenler: *Murat Ak (Antalya)).*

MATEMATİKSEL ÖZDEYİŞLER

Galilei, Galileo (1564-1642): "Ölçülebilir olan şeyi ölç, olmayanı da ölçülebilir kıl."

Galton, Francis (1822-19111): "Olanak bulduğunuzda ölçünüz."

Gauss, Karl Friedrich (1777-1855): "Mıknatıs demiri çektiği gibi kuram da uygulamayı çeker."

Hadamard, Jacques: "Gerçel bölgede iki gerçek arasındaki en kısa yol karmaşık bölgeden geçer."

Halmos, Paul R.: "Yalnızca okumayınız; onunla savaşınız! Kendi sorularınızı sorunuz, kendi kanıtlarınızı keşfediniz. Acaba varsayımlar gerekli mi? Acaba tersi doğru mu? Klasik özel durumda acaba neler oluyor? Dejenere durumlarda neler var? Varsayımlar kanıt içinde nerelerde kullanılıyor?"