DİRİCHLET 'NİN BİR TEOREMİ HAKKINDA

Nurettin Ergun
İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü, İSTANBUL

Bu yazı bir anlamda bu dergide daha önce yayınlanan **Üç Analiz Problemi** başlıklı yazıdaki üçüncü problemin ayrıntılı çözümüyle ilgilenecektir. Buna karşın ondan **bağımsız** kendi içinde yeterli bir bütünlüğe sahiptir ve söz konusu yazı okunmadan, kavrama isteğiyle okunduğunda yeterince ilginç ve yararlıdır. Yine de kaynaklarda belirtilen [1] ve [2] yazılarının kavranarak okunması kolaylaştırıcıdır.

Şimdi öncelikle "Üç Analiz Problemi" başlıklı yazıda da kısaca değindiğimiz gibi, gerçel sayıların şu yalın ve temel özelliğini gözleyelim. x ve y gerçel sayıları farklı ve sözgelimi $x < y$ olsun. $0 < \epsilon < y - x$ gerçekleyen her pozitif ϵ sayısının uygun bir tamsayı katı x ile y arasında yer alır; gerçekten

$$\frac{x}{\epsilon} < k = [\frac{x}{\epsilon}] + 1 \leq \frac{x}{\epsilon} + 1 < \frac{y}{\epsilon}$$

olduğundan, bu k tamsayısı için $x < k\epsilon < y$ bulunur. Oysa, gerçel sayıların Arşimet özelliği nedeniyle $1 < n(y-x)$ gerçeklenecek biçimde bir n doğal sayısı var ve dolayısıyla, $0 < \frac{1}{n} < y - x$ geçerli olduğundan uygun bir $k' \in \mathbf{Z}$ sayesinde $r = \frac{k'}{n}$ rasyonel sayısı için $x < r < y$ gerçeklendiğini gözleriz. Demek ki, her farklı gerçel sayı çifti arasında en az bir tane (ve sonuçta sonsuz tane, aşağıya bakınız) rasyonel sayı vardır. Oysa, herhangi iki tamsayı arasında en az bir irrasyonel sayı bulunduğundan (gerçekten k_1 ve k_2 tamsayıları için $k_1 < k_2$ geçerli ise, $k_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ irrasyonel sayısı bu iki tamsayı arasında yer alır), sonuçta herhangi farklı iki rasyonel sayı arasında (Dikkat: $r_1 = \frac{k_1}{n_1}$ rasyonel sayısının $r_2 = \frac{k_2}{n_2}$ rasyonel sayısından küçük olması için gerek ve yeter koşul $k_1 n_2 < k_2 n_1$ gerçeklenmesidir, çünkü paydalar pozitif tamsayıdır.) ve dolayısıyla, farklı herhangi iki gerçel sayı arasında en az bir tane (ve sonuçta sonsuz tane) irrasyonel sayı bulunur (nasıl?). Gerçel sayıların, tüm farklı gerçel sayı çiftinin arasında en az bir eleman bulunduran özel bir altkümesine $\mathbf{R}$ 'nin **yoğun altkümesi** denir. Demek ki, $x < y$ ise, (x, y) açık aralığında yoğun kümenin en az bir elemanı (ve aslında sonsuz elemanı) vardır. O halde, $\mathbf{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ve $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ irrasyonel sayılar kümesi $\mathbf{R}$ 'nin yoğun altküme örnekleridir. Dikkat edilirse, herhangi bir p asal sayısı için, rasyonel sayıların özel

$$A_p = \{k + \frac{m}{p^n} : k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{N}, 0 \leq m < p^n\}$$

altkümesi de $\mathbf{R}$ 'nin bir başka yoğun küme örneğidir, çünkü özellikle $0 < x < y < 1$ ise uygun bir n doğal sayısı sayesinde $0 < \frac{1}{p^n} < \frac{1}{n} < y - x$ gerçeklendiğini gözlemek yeterlidir; öyle değil mi, sevgili okurlar? Daha önemlisi, p ve q gibi farklı iki asal sayı için A_p ve A_q kümelerinin ayrık olduğunu gözlemektir; gerçekten

$$k_1 + \frac{m_1}{p^{n_1}} = k_2 + \frac{m_2}{q^{n_2}} \quad \text{ise,} \quad k_1 = k_2$$

bulunur, çünkü $k_1 \neq k_2$ ve örneğin bu tamsayılar için $k_1 < k_2$ geçerli olsa

$$1 \leq k_2 - k_1 = |\frac{m_1}{p^{n_1}} - \frac{m_2}{q^{n_2}}| < 1$$

çelişkisi doğardı, neden? Demek ki, yukardaki eşitlik bir an için geçerli olsa, $\frac{m_1}{p^{n_1}} = \frac{m_2}{q^{n_2}}$ gibi kesinkes olanaksız bir sonuçla yüzleşiriz, çünkü bu iki rasyonel sayının her birisinin ortak asal çarpanlarının kısaltılması işlemi sonunda pay ve paydalarının aralarında asal hale indirgenmiş oldukları varsayılabileceğinden, önce $m_1 q^{n_2} = m_2 p^{n_1}$ eşitliği ve sonra da zorunlu olarak q asal sayısının m_2 'nin bir böleni olmak zorunda kaldığını, bunun ise q ve m_2 'nin aralarında asallığı nedeniyle olanaksız olduğunu gözleriz. Demek ki, p ve q asal sayıları farklı ise, gerçekten $A_p \cap A_q = \emptyset$ olur ve sonuçta $\mathbf{R}$ 'nin ikişerli ayrık olan sonsuz tane yoğun altkümesinin varlığını gözlemiş oluruz. Şimdi de $\mathbf{R}$ 'nin yoğun bir A altkümesinin, farklı iki gerçel sayı arasında, aslında sonsuz sayıda elemanının bulunduğunu gözleyelim dilerseniz. Gerçekten, $x < y$ ise ve A kümesinin x ile y arasında yalnızca sonlu tane, örneğin m tane elemanı bulunsaydı ve bunlar sözgelimi $a_1, a_2, \cdots, a_m$ olsaydı ve yine sözgelimi, büyüklük sırasına göre bunlar için

$$x < a_1 < a_2 < \cdots < a_m < y$$

geçerli olsaydı, x ile a_1 gerçel sayıları arasında yoğun A kümesinden hiç eleman bulunmazdı, bu olanaksızdır. O halde, eğer A altkümesi $\mathbf{R}$ 'de yoğun ise, **her** x gerçel sayısına, A kümesinin elemanlarından oluşturulan ve tüm terimleri ikişer ikişer farklı olan en az bir yakınsak dizi yakınsar. Şaşırmayın lütfen; bunu gözlemek de güç değildir. Önce $a_1 \in A \cap (x-1, x+1)$ gibi bir eleman seçeriz; ikinci adımda, boş olmayan her açık aralıkta A 'nın sonsuz tane elemanının var olduğunu söyleyen yukardaki gözlemimiz nedeniyle $a_2 \neq a_1$ ve $a_2 \in A \cap (x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2})$ gerçekleyen bir elemanını seçeriz; $n+1$ -inci adıma gelindiğinde ve önceki adımlardan ikişer ikişer farklı $a_1, a_2, \cdots, a_n$ elemanları belirlendiğinde, aynı nedenden ötürü

$$a_{n+1} \in A \cap (x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1}) \quad \text{ve} \quad a_{n+1} \notin \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

gerçekleyen bir elemanını seçeriz. Tümevarımla tanımlanan ve tüm terimleri ikişer ikişer farklı olan (çünkü $n \neq m$ ve örneğin, $n < m$ ise, $a_m \notin \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots, a_{m-1}\}$ nedeniyle $a_m \neq a_n$ geçerlidir) bu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi

$$\forall n \in \mathbf{N} \ \text{ için } \ |x - a_n| < \frac{1}{n}$$

sağladığından, sonuçta $\lim_{n\to\infty} |x - a_n| = 0$ ve dolayısıyla, aynı şey demek olan $x = \lim_{n\to\infty} a_n$ bulunur.

Yoğun altkümelerin ilginç bir başka özelliği, sürekli bir fonksiyon altındaki görüntülerinin, görüntü kümesinde yoğun olmasıdır. Örneğin bu nedenle

$$A = \{0, \mp\sin 1, \mp\sin 2, \mp\sin 3, \cdots\}$$

kümesinin $[-1, 1]$ aralığında yoğun olduğunu, başka bir deyişle bu aralıktaki herhangi iki farklı gerçel sayı arasında, uygun bir n ya da m doğal sayısı yardımıyla $\sin n$ ya da $-\sin m$ gibi bir değerin yer aldığını aşağıda göreceğiz. Okuyucunun, yalnızca tamsayıların değil, genel olarak gerçel sayıların sinüs değerlerinin nasıl tanımlandığı konusunda bilgi sahibi olduğunu ummak istiyorum, bilmem yanılıyor muyum? Yalnızca açıların değil, gerçel sayıların sinüslerinin tanımını da öğrenmek belirli düzeyde olgunlaşmayı gerektirir. İndisi n fakat derecesi $2n-1$ olan, rasyonel katsayılı

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

polinomlarının, herhangi bir x gerçel sayısı için var olan $\lim_{n\to\infty} p_n(x)$ limit değerine sinüs x denilir ve bu değer kısaca $\sin x$ ile yazılır. İyi ama, her $x \in \mathbf{R}$ için bu limitin varlığını güvence altına alan bilgileri bilmedikçe, bu tanımı yalnızca duymuş olmanın bir önemi olabilir mi? Kuşkusuz hayır! Peki bir **pozitif** x gerçel sayısı için, **birim çember** denilen çemberin $P_1 = (1, 0)$ noktasından başlayarak, çember boyunca, saatin işleyişinin ters yönünde tastamam x uzunluğundaki yay kadar dolandığınızda, ulaştığınız P_x çember noktasını $(0, 0)$ noktasına birleştiren doğrunun O_x ekseni ile yaptığı $P_1\widehat{M}P_x$ açısına θ_x dersek (bu açıya, radyan değeri x gerçel sayısı olan merkez açı denir) ve şimdi $\sin x = \sin\theta_x$ diye tanımlarsak, bu tanımı anlayabilir miyiz? "Bu tanımı da sevmedim, ben daha yayların uzunluğunu belirlemeyi bilmiyorum ki, hem neden birim çember boyunca saatin işleyişinin ters yönünde ilerleniyor? Peki, ya x gerçel sayısı negatif olsaydı?" biçimindeki sorgulayan karşı çıkışlarınızı duyar gibiyim. Evet, bunları ve örneğin, yukardaki tanımların eşdeğer olup olmadığını (eşdeğerdirler!) sağlıklı bir biçimde öğrenmek için üniversite öğrencisi olmanız gerekiyor, sevgili okurlar; insanların ancak büyüdüklerinde memelilerin nasıl dünyaya geldiğini öğrenebilmelerine, benzetebiliriz bunu, şaka yapmıyorum. Evet, şimdi yoğun bir kümenin sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü konusuna dönelim dilerseniz. Sürekli bir $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonumuz var olsun ve $A \subseteq \mathbf{R}$ altkümesi $\mathbf{R}$ 'de yoğun olsun. $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ kümesinin $f(\mathbf{R})$ görüntü kümesinde yoğun olduğunu göstereceğiz, yani iki farklı $f(x)$ ve $f(y)$ sayıları arasında uygun bir $a \in A$ sayesinde $f(a)$ gerçel sayısının yer aldığını kanıtlayacağız. Gerçekten $f(x) < f(y)$ ise, ünlü **Ortalama Değer Teoremi** nedeniyle biliyoruz ki, $f(x)$ ile $f(y)$ arasındaki tüm gerçel sayılar f fonksiyonunun en az bir kez eriştiği değerlerdir; yani, herhangi bir $f(x) < c < f(y)$ için $c = f(x')$ gerçeklenecek biçimde en az bir x' gerçel sayısı vardır. O halde, var olan ve $f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$ gerçekleyen x_0 gerçel sayısında f fonksiyonu sürekli olduğundan, $0 < \epsilon_0 < f(y) - f(x)$ gerçekleyen bir pozitif ϵ_0 sayısına karşılık var olan uygun bir $0 < \delta_0$ sayesinde tanımlanan x_0 'ın civarı (komşuluğu)

$$\forall \xi \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \text{ için } f(\xi) \in (f(x_0) - \frac{\epsilon_0}{3}, f(x_0) + \frac{\epsilon_0}{3}),$$

ya da başka bir yazışla, $|\xi - x_0| < \delta_0$ ise, $|f(\xi) - f(x_0)| < \frac{\epsilon_0}{3}$ gerçekleyecektir. A kümesi yoğun olduğundan en az bir $a_0 \in A \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ elemanı var olur ve sonuçta $f(a_0) \in f(A)$ gerçel sayısı

$$f(x) < f(x_0) - \frac{\epsilon_0}{3} < f(a_0) < f(x_0) + \frac{\epsilon_0}{3} < f(y)$$

gerçekler yani $f(x)$ ile $f(y)$ arasında yer alır. Evet, artık asıl konuya girebiliriz sanırım. Usta Alman matematikçi Dirichlet 1820 'lerde şu önemli gerçeği gözlemişti:

Dirichlet Teoremi: q sabit bir irrasyonel sayı olsun. $A = \{kq + m : k, m \in \mathbf{Z}\}$ kümesi gerçel sayılarda yoğundur.

Şimdi öncelikle amacımız bu teoremin daha genel bir biçimini kanıtlamak olacaktır. q sabit bir irrasyonel sayı olsun. q ve x gerçel sayı çifti rasyonel sayılar cismi üzerinde lineer bağımsız olsun, yani $r_1 q + r_2 x = 0$ gerçekleyen biricik r_1 ve r_2 rasyonel sayıları $r_1 = r_2 = 0$ olsun, ya da bir başka eşdeğer yazışla x gerçel, sayısı q 'nun tüm rasyonel katlarından farklı olsun. Başka bir deyişle,

$$x \notin q\mathbf{Q} = \{qr : r \in \mathbf{Q}\}$$

gerçekleşsin. Herhangi bir r rasyonel sayısı ile q irrasyonel sayısı bu nitelikte bir çifttir, kolayca gözlemleyebiliyoruz; değil mi sevgili okurlar? Şimdi ana teoremimizi görelim:

Ana Teorem: q sabit bir irrasyonel sayı ve q ile x gerçel sayıları rasyonel sayılar cismi üzerinde lineer bağımsız ise,

$$A_{q,x} = \{kq + mx : k, m \in \mathbf{Z}\}$$

kümesi gerçel sayılarda yoğundur.

Dikkat edilecek olursa, $A_{q,x}$ ve $A_{-q,x}$ kümeleri eşit oldukları için (neden?) burada sözü geçen q irrasyonel sayısını pozitif varsayabilirz. Şimdi her bir n doğal sayısı için

$$k_n = [\frac{nx}{q}] \in \mathbf{Z}$$

tamsayısı sayesinde $k_n q < nx < (k_n + 1)q$ gerçeklendiği; $\delta_n = nx - k_n q$ sayılarının pozitif ve ikişer ikişer farklı oldukları, yani $n \neq m$ için $\delta_n \neq \delta_m$ gerçekleştiği, hep, q ve x 'in rasyonel sayılar üzerinde lineer bağımsız olduklarını söyleyen temel hipotezin kolay gözlenebilen sonuçlarıdır. Üstelik, tüm δ_n sayıları $(0, q)$ aralığındadır ve ayrıca, t herhangi bir tamsayı ve herhangi n ve m doğal sayıları için

$$t(\delta_n - \delta_m) = t(k_m - k_n)q + t(n - m)x \in A_{q,x}$$

gerçeklenir. Gerçel sayıların ünlü Bolzano-Weierstrass özelliği (bak. [1]) nedeniyle $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $[0, q]$ kapalı aralığındaki bir gerçel sayıya yakınsayan bir $\{\delta_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır ve bu alt dizi her yakınsak gerçel sayı dizisi gibi bir **Cauchy dizisidir**, yani her $0 < \epsilon$ için

$$k, i \geq k_\epsilon \text{ ise } |\delta_{m_k} - \delta_{m_i}| < \epsilon$$

gerçeklenecek biçimde bir k_ϵ doğal sayısı vardır. Şimdi farklı iki x ve y gerçel sayıları için, örneğin, $x < y$ gerçekleniyorsa, $0 < \epsilon < y - x$ gerçekleyen herhangi bir pozitif ϵ sayısı sayesinde, bu ϵ sayısına karşılık var olan k_ϵ doğal sayısından büyük olan k ve i farklı doğal sayıları için $m_k \neq m_i$ nedeniyle $\delta_{m_k} \neq \delta_{m_i}$ ve sözgelimi $\delta_{m_k} < \delta_{m_i}$ gerçekleşeceğinden, yazının başında gözlenen temel özellik nedeniyle, uygun bir t_0 tamsayısı sayesinde

$$x < t_0(\delta_{m_i} - \delta_{m_k}) \quad (\in A_{q,x}) < y$$

bulunur, çünkü $\delta_{m_i} - \delta_{m_k} = |\delta_{m_i} - \delta_{m_k}| < \epsilon < y - x$ geçerli olmaktadır. Demek ki, $A_{q,x}$ kümesi, gerçekten, $\mathbf{R}$ kümesinde yoğundur.

Dikkat, özel olarak x yerine 1 rasyonel sayısı alınırsa, Dirichlet Teoremi, ana teoremden kolayca elde edilmektedir, gözleyebiliyoruz değil mi?

Uygulamalar

Yukardaki teoremlerin ve sonuçların ardından şunları hemen gözleyebiliriz. $B = \{2k\pi + m : k, m \in \mathbf{Z}\}$ kümesi $\mathbf{R}$ gerçel sayılar kümesinde ve onun sürekli sinüs fonksiyonu altındaki görüntü kümesi olan

$$\sin B = \{\sin m : m \in \mathbf{Z}\} = \{0, \mp \sin 1, \mp \sin 2, \cdots\}$$

ise $[-1, 1]$ aralığında yoğundurlar. 2π irrasyonel sayısının rasyonel bir katı **olmayan** herhangi bir x gerçel sayısı için

$$A_{2\pi,x} = \{2k\pi + mx : k, m \in \mathbf{Z}\}$$
$$B_x = \{\sin mx : m \in \mathbf{Z}\} = \{0, \mp \sin x, \mp \sin 2x, \cdots\}$$

kümeleri ise, ana teoremin bir sonucu olarak, sırasıyla $\mathbf{R}$ ile $[-1, 1]$ 'de yoğundurlar. Başka bir deyimle, x gerçel sayısı 2π 'nin (ve dolayısıyla, π 'nin) bir **irrasyonel katı olduğunda** (Dikkat: Her x gerçel sayısı $x = \pi\frac{x}{\pi}$ nedeniyle, π 'nin bir katıdır, öyle değil mi?), yukardaki sayılabilir sonsuz elemanlı B_x kümesinin elemanlarının belirlediği ve elemanları ikişer ikişer farklı olan tüm yakınsak dizilerin limit noktaları kümesi $[-1, 1]$ aralığıdır. Bu nedenle bu nitelikteki bir x gerçel sayısı için $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi **yakınsak olamaz**, aksi halde B_x kümesinin elemanları yardımıyla belirlenen ve tüm terimleri ikişer ikişer farklı olan tüm yakınsak dizilerin limit noktaları kümesinin en fazla iki elemanı olurdu (neden?). Bu olanaksızdır, çünkü söz konusu limit noktaları kümesi olan $[-1, 1]$ aralığında **sayılamaz sonsuz** sayıda gerçel sayı vardır. Demek ki, x gerçel sayısı π 'nin bir tam katı olmadıkça $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ıraksar (bak. [2] yazısı).

Şimdi de bir başka ilginç karşı örnek olarak

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 g(x)dx \tag{1}$$

koşulunu gerçeklemesine karşın, $[0, 1]$ aralığındaki yoğun bir kümeye ait tüm x gerçel sayıları için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq g(x) \tag{2}$$

olacak biçimde $[0, 1]$ aralığında tanımlı gerçel değerli ve sürekli $f_n = f_n(x)$ fonksiyonları ile aynı aralıkta tanımlı ve sürekli bir $g = g(x)$ fonksiyonunun var olduğunu gösterelim. Gerçekten

$$f_n(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \sin 2^n\pi(x - \frac{k}{2^n})\chi_{I_{k,n}}(x) \qquad (x \in [0, 1])$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında süreklidirler ve istenen tüm koşulları gerçeklerler; burada her $0 \leq k \leq 2^n - 1$ tamsayısı için $I_{k,n}$ aralığı

$$I_{k,n} = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}) \subsetneq [0, 1]$$

biçiminde tanımlanmıştır ve dikkat edilecek olursa, k ve i birinci indisleri farklı ve örneğin, $k < i$ ise, $\frac{k+1}{2^n} \leq \frac{i}{2^n}$ gerçekleştiği için kolayca görüleceği gibi $I_{k,n}$ ve $I_{i,n}$ aralıkları ayrıktır ve ayrıca $\chi_{I_{k,n}}$ karakteristik fonksiyonu, yine bilindiği gibi, $[0,1]$ aralığında $I_{k,n}$ alt aralığına ait gerçel sayılarda 1, olmayanlarda 0 değeri almaktadır. Dolayısıyla, bu karakteristik fonksiyon apaçıktır ki, $\frac{k}{2^n}$ ve $\frac{k+1}{2^n}$ uç noktalarında süreksizdir. Oysa, tanımlarında bu karakteristik fonksiyonları kullanan f_n fonksiyonları $[0,1]$ aralığındaki tüm noktalarda süreklidir. Gerçekten, öncelikle,

$$\forall x \in I_{k,n} \text{ için } f_n(x) = \tfrac{\pi}{2} \sin 2^n\pi(x - \tfrac{k}{2^n}) \tag{3}$$

gözlemeliyiz. Ayrıca, yazımda yalınlık amacıyla, kısaca $r_{k,n} = \frac{k}{2^n}$ yazarsak

$$0 = f_n(r_{k,n}) = f_n(r_{k+1,n}) = \lim_{x \to r_{k,n}} f_n(x) = \lim_{x \to r_{k+1,n}} f_n(x)$$

gerçeklendiğini gözleyebiliriz. Örneğin, x gerçel sayıları $r_{k,n}$ rasyonel sayısına sağdan, yani $I_{k,n}$ aralığı içinden yaklaşırlarken, (3) gözlemi nedeniyle, sinüs fonksiyonu sürekli olduğu için

$$\lim_{x \to r_{k,n}^+} f_n(x) = \frac{\pi}{2} \lim_{x \to r_{k,n}^+} \sin 2^n\pi(x - r_{k,n}) = \frac{\pi}{2} 0 = 0$$

ve x gerçel sayıları $r_{k,n}$ sayısına soldan, yani bu kez $I_{k-1,n}$ aralığı içinde kalarak yaklaşırlarken $f_n(x) = \sin 2^n\pi(x - \frac{k-1}{2^n})$ gerçekleştiğinden, apaçıktır ki, aranan sol limit değeri $\sin 2^n\pi\frac{1}{2^n} = \sin\pi = 0$ olacaktır. Demek ki, gerçekten, f_n fonksiyonunun $r_{k,n}$ noktasındaki limit değeri var ve $0 = f_n(r_{k,n})$ değerine eşittir. f_n fonksiyonu apaçıktır ki, $I_{k,n}$ aralığının tüm öteki noktalarında zaten süreklidir (bak. (3) tanımı). Üstelik $A_{k,n}$ ile yazacağımız aşağıdaki Riemann tümlev (integral) değeri için

$$A_{k,n} = \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} \sin 2^n\pi(x - \frac{k}{2^n})dx = \int_0^{1/2^n} \sin 2^n\pi u du = \frac{2}{2^n\pi}$$

bulunacağından, kolayca,

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} f_n(x)dx = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} A_{k,n} = 1$$

elde edilir. O halde, $[0,1]$ aralığında sürekli olan her $x \in [0,1]$ için $g(x) = 1$ sabit fonksiyonu için

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1 = \int_0^1 g(x)dx$$

gerçekleneceğinden, apaçıktır ki, yukarıda yazılı olan (1) koşulu gerçeklenir. Oysa, $r = \frac{k}{2^n}$ biçimindeki özel ve sabit tutulmuş rasyonel sayısı için $\lim_{n\to\infty} f_n(r) = 0 \neq g(r)$ gerçeklenir, çünkü

$$r = \frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{2^2k}{2^{n+2}} = \cdots$$

nedeniyle, kolayca

$$r \in I_{k,n} \cap I_{2k,n+1} \cap I_{4k,n+2} \cap I_{8k,n+3} \cap \cdots$$

ve dolayısıyla, kolayca

$$0 = f_n(r) = f_{n+1}(r) = f_{n+2}(r) = f_{n+3}(r) = \cdots$$

elde edilir. Oysa, $\frac{k}{2^n}$ biçimindeki özel rasyonel sayıların kümesi, daha önce gözlendiği gibi, $[0,1]$ aralığında yoğundur. O halde, (2) koşulu da gerçeklenmiş olur. Peki, bu özel rasyonel sayılardan farklı bir $x \in [0,1]$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ var mıdır; varsa değeri nedir? $g(x)$ midir? Ne dersiniz?

Bu yazıda son olarak dışbükey (konveks) fonksiyonlara ilişkin ve özellikle matematik olimpiyat kamplarına katılmış okurların çok seveceği türden bir soruyla ilgilenelim. Çözüm yine $[0,1]$ aralığında yoğun bir kümenin nitelikleriyle yakından ilgilidir. Tanım aralığına ait her x, y çifti için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \quad (0 < \alpha < 1)$$

koşulunu gerçekleyen gerçel değerli ve gerçel değişkenli bir f fonksiyonuna **dışbükey fonksiyon** denir. Apaçıktır ki, $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ için bu koşul kolayca gerçeklenecektir. İkinci türevi negatif olmayan her gerçel değerli fonksiyon (sözgelimi, $f(x) = e^x$ ve $g(x) = x^{2n}(n \in \mathbf{N})$ fonksiyonları) bu niteliktedir. Bu tür fonksiyonların grafiği, grafiğe her noktada çizilen teğetlerin oluşturduğu teğetler zarfının hep üstünde kalırlar. Bu dergide bu tür fonksiyonlar üstüne çeşitli ilginç yazılar yayınlanmıştır. İlgileneceğimiz son soru şu olacaktır:

Bir $[a,b]$ aralığında tanımlı, gerçel değerli ve sürekli bir f fonksiyonunun dışbükey olabilmesi için gerek ve yeter koşul, bu aralığa ait her x, y çifti için

$$f(\tfrac{x+y}{2}) \leq \tfrac{1}{2}f(x) + \tfrac{1}{2}f(y) \tag{4}$$

koşulunun gerçeklenmesidir, gösteriniz.

Yanlış anlaşılmasın, f sıradan bir gerçel değerli fonksiyon değil, sürekli bir fonksiyondur. Apaçıktır ki, dışbükey bir f fonksiyonu, yukarıdaki dışbükeylik koşulunda $\alpha = \frac{1}{2}$ alınırsa (4) koşulunu gerçekleyecektir. Tersine, (4) koşulunu gerçekleyen sürekli f fonksiyonu neden dışbükeydir? Bir kez daha $[0,1]$ aralığında yoğun olan

$$A = \{\frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \cdots, \frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^n}{2^n} : n \in \mathbf{N}\}$$

kümesinden yararlanacağız. Paydalarında 2^n bulunan, $\frac{k}{2^n}(k = 0, 1, \cdots, 2^n)$ biçimindeki özel $2^n + 1$ tane rasyonel sayıya n-inci diadik kesirler, A kümesinin elemanlarına ise yalnızca **diadik kesirler** denir. Şimdi, ilk aşamada, (4) koşulunu gerçekleyen f fonksiyonunun, n-inci diadik kesirler için

$$f(\tfrac{k}{2^n}a + (1-\tfrac{k}{2^n})b) \leq \tfrac{k}{2^n}f(a) + (1-\tfrac{k}{2^n})f(b) \tag{5}$$

gerçeklediğini n doğal sayısı üzerinden tümevarım kullanarak göstermek istiyoruz. Bu iddia (4) nedeniyle, apaçıktır ki, $n = 1$ için geçerlidir. Bu iddia n-inci diadik kesirler için geçerli olsun. f fonksiyonunun herhangi bir $(n+1)$-inci diadik kesir yardımıyla tanımlanan gerçel sayıdaki değeri,

$$f(\frac{k}{2^{n+1}}a + (1-\frac{k}{2^{n+1}})b),$$

eğer k çift ve $k = 2m$ ise kolaylıkla, n-inci adım varsayımı kullanılarak

$$\begin{aligned} &= f(\frac{m}{2^n}a + (1-\frac{m}{2^n})b) \leq \frac{m}{2^n}f(a) + (1-\frac{m}{2^n})f(b) \\ &= \frac{k}{2^{n+1}}f(a) + (1-\frac{k}{2^{n+1}})f(b) \end{aligned}$$

gerçekler; yok eğer $k = 2m + 1$ biçiminde tek bir tamsayı ise, bu kez yukardaki değer için, (4) kullanılarak önce

$$\begin{aligned} &= f[\frac{1}{2}((\frac{m}{2^n}a + (1-\frac{m}{2^n})b + (\frac{m+1}{2^n}a + (1-\frac{m+1}{2^n})b))] \\ &\leq \frac{1}{2}f(\frac{m}{2^n}a + (1-\frac{m}{2^n})b) + \frac{1}{2}f(\frac{m+1}{2^n}a + (1-\frac{m+1}{2^n})b) \end{aligned}$$

ve sonra n-inci adım varsayımı kullanılarak

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2}(\frac{m}{2^n}f(a) + (1-\frac{m}{2^n})f(b)) + \frac{1}{2}(\frac{m+1}{2^n}f(a) + (1-\frac{m+1}{2^n})f(b)) \\ &= \frac{k}{2^{n+1}}f(a) + (1-\frac{k}{2^{n+1}})f(b) \end{aligned}$$

geçerli olur. Demek ki, (5) eşitsizlikleri **tüm** n-inci diadik kesirleri için geçerlidir. O halde, şunu kanıtlamış bulunuyoruz: Herhangi bir α diadik kesri için

$$f(\alpha a + (1-\alpha)b) \leq \alpha f(a) + (1-\alpha) f(b)$$

olur. Bu kanıtlamada kullanılan akıl yürütmelerin tümünü, herhangi $x, y \in [a, b]$ çifti için yinelersek, bu kez herhangi bir α diadik kesri için

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \tag{5'}$$

elde edilir. Şimdi herhangi bir (diadik kesir olması gerekmeyen) $\alpha \in (0,1)$ alınsın. A kümesi $[0,1]$ aralığında yoğun olduğu için (bu gerçek yukarda gözlenmişti, anımsıyoruz, değil mi?) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ gerçekleyen, tüm terimleri diadik kesirler olan yakınsak bir $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi var olduğundan, f sürekli olduğu için, $x, y \in [a, b]$ ne olursa olsun,

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1-\alpha)y) &= \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n x + (1-\alpha_n)y) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (\alpha_n f(x) + (1-\alpha_n) f(y)) \\ &= \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) \end{aligned}$$

dışbükeylik koşulu geçerli olur. Son eşitsizliğin, (5′) koşulunun dışında, geçerli olması için gerekçesini sanıyorum biliyorsunuz. Evet, yoğun kümelerle yeterince ilgilendik. İyi çalışmalar sevgili okurlar.

KAYNAKLAR

[1] N. Ergun; Gerçel sayılarda dokuz temel eşdeğerlik, Matematik Dünyası, Aralık 1994, 6-10.

[2] Y. Avcı-K. Alnıaçık-N. Ergun; Üç analiz problemi, Matematik Dünyası, Eylül 1999, 2-12.

EĞLENCELİ MATEMATİK SORUSUNUN ÇÖZÜMÜ...

Matematik Dünyası'nın 7.cildinin 3.sayısının 24.sayfasında aşağıdaki eğlenceli matematik sorusunu sormuştuk:

Farklı harfler farklı rakamları ve aynı harfler aynı rakamları göstermek üzere,

$$\frac{fut}{bol} = 0, golgolgol\ldots$$

eşitliğini gerçekleyen rakamları bulunuz.

Okuyucularımızdan *Ali Cevahir* (Antalya) bize bir yanıt gönderdi:

$$\frac{476}{918} = 0,518518518\ldots\ .$$
