

ÜÇGENİN ELEMANLARI ARASINDAKİ BAZI EŞİTLİK VE EŞİTSİZLİKLER II

Mehmet Şahin

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 06100, Tandoğan-ANKARA

e-posta: sahinm@science.ankara.edu.tr

Öncelikle yazıda kullandığımız bazı gösterimleri tanımlayalım. R : çevrel çember yarıçapı; r : içteğet çember yarıçapı; s : yarı çevre; F : alan; a, b, c : üçgenin BC, AC, AB kenarlarının uzunlukları; α, β, γ : üçgenin iç açıları; r_a, r_b, r_c : dış teğet çemberlerin yarıçapları; h_a, h_b, h_c : üçgenin yükseklikleri; m_a, m_b, m_c : üçgenin kenarortayları; w_a, w_b, w_c : üçgenin açıortayları.

Teorem 1.1. Her üçgende

$$9r \leq h_a + h_b + h_c \leq w_a + w_b + w_c \leq \sqrt{3}s$$

olur. Burada eşitliklerin geçerli olması için gerek ve yeter koşul üçgenin eşkenar olmasıdır.

Kanıt: $2F = ah_a = bh_b = ch_c$ olduğundan

$$h_a + h_b + h_c = 2F \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

'dir. Aritmetik ortalama-harmonik ortalama eşitsizliğine göre

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \text{ olup } h_a + h_b + h_c \geq \frac{9 \cdot 2F}{a+b+c} = \frac{18 \cdot F}{2 \cdot s} = \frac{9 \cdot F}{s}$$

ve $F = r \cdot s$ olduğundan $h_a + h_b + h_c \geq 9r$ bulunur. $h_a \leq w_a, h_b \leq w_b, h_c \leq w_c$, olduğu biliniyor. $p = w_a + w_b + w_c$ diyelim. $p \leq \sqrt{3}s$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad a+c \geq 2\sqrt{ac}, \quad b+c \geq 2\sqrt{bc}$$

eşitsizliklerini kullanacağız.

$$w_a = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}, \quad w_b = \frac{2\sqrt{acs(s-b)}}{a+c}, \quad w_c = \frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}$$

olduğu biliniyor. O halde yukarıdaki eşitsizlikler kullanılarak

$$w_a \leq \sqrt{s(s-a)}, \quad w_b \leq \sqrt{s(s-b)}, \quad w_c \leq \sqrt{s(s-c)}$$

elde edilir.

$$p = w_a + w_b + w_c \leq \sqrt{s(s-a)} + \sqrt{s(s-b)} + \sqrt{s(s-c)}$$

olup $\forall x, y, z > 0$ için $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$ eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} p^2 &\leq \left(\sqrt{s(s-a)} + \sqrt{s(s-b)} + \sqrt{s(s-c)} \right)^2 \\ &\leq 3[s(s-a) + s(s-b) + s(s-c)] \leq 3s^2 \end{aligned}$$

ve böylece $p \leq \sqrt{3}s$ bulunur.

Sonuç: $\triangle ABC$ üçgeninde

$$9r \leq h_a + h_b + h_c \leq \sqrt{3}s,$$

$$9r \leq w_a + w_b + w_c \leq \sqrt{3}s$$

'dir.

Kanıt: $\triangle ABC$ 'de $h_a \leq w_a \leq m_a$, $h_b \leq w_b \leq m_b$ ve $h_c \leq w_c \leq m_c$ olduğundan kanıt açıktır.

Teorem 1.2. $\triangle ABC$ üçgeninin dış teğet çemberlerinin merkezleri O_1, O_2, O_3 , ve $O_1O_2O_3$ ile $\triangle ABC$ üçgenlerinin alanları sırasıyla F_1 ve F_2 ise,

$$\frac{F_1}{F_2} = 2 \frac{R}{r}$$

'dir.

Kanıt: O_1CB üçgeninin alanı S_1 , O_2CA üçgeninin alanı S_2 ve O_3AB üçgeninin alanı S_3 olsun. Bu durumda

$$F_1 = F_2 + S_1 + S_2 + S_3 \quad (0.1)$$

olur.

$$S_1 = \frac{a \cdot r_a}{2}, S_2 = \frac{b \cdot r_b}{2}, S_3 = \frac{c \cdot r_c}{2}$$

olup bu değerler (0.1) 'de yerine yazılırsa,

$$F_1 = F_2 + \frac{a \cdot r_a}{2} + \frac{b \cdot r_b}{2} + \frac{c \cdot r_c}{2}$$

ve

$$r_a = \frac{F_2}{s-a}, r_b = \frac{F_2}{s-b}, r_c = \frac{F_2}{s-c} \quad (0.2)$$

olduğundan

$$F_1 = F_2 + \frac{aF_2}{2(s-a)} + \frac{bF_2}{2(s-b)} + \frac{cF_2}{2(s-c)}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{F_1}{F_2} &= 1 + \frac{a}{2(s-a)} + \frac{b}{2(s-b)} + \frac{c}{2(s-c)} \\ &= \frac{2(s-a)(s-b)(s-c) + a(s-b)(s-c) + b(s-a)(s-c) + c(s-a)(s-b)}{2(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

'dir.

$$F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \quad (0.3)$$

olduğundan

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\frac{2F_2^2}{s} + s^2(a+b+c) - s[a(b+c) + b(a+c) + c(a+b)] + 3abc}{\frac{2F_2^2}{s}} \quad (0.4)$$

'dir. $a+b+c = 2s$ olduğundan $b+c = 2s-a$, $a+c = 2s-b$, $a+b = 2s-c$ ve $F_2 = rs$, $abc = 4RF_2$ 'dir.

([2], Önerme 1.1) 'den $ab+ac+bc = r^2 + s^2 + 4Rr$ olduğundan $a^2 + b^2 + c^2 = 2s^2 - 2r^2 - 8Rr$ 'dir. Bu değerler (0.4) 'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{F_1}{F_2} &= \frac{2r^2s + 2s^3 - s[a(2s-a) + b(2s-b) + c(2s-c)] + 3.4RF_2}{2r^2s} \\
&= \frac{2r^2s + 2s^3 - 2s^2(a+b+c) + s(a^2 + b^2 + c^2) + 12RF_2}{2F_2r} \\
&= \frac{2r^2s + 2s^3 - 2s^2 \cdot 2s + s(2s^2 - 2r^2 - 8Rr) + 12RF_2}{2F_2r} \\
&= \frac{12RF_2 - 8Rrs}{2F_2r} = \frac{12RF_2 - 8RF_2}{2F_2r} = \frac{4RF_2}{2F_2r} = 2\frac{R}{r}
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 1.3. Her üçgende

$$\frac{ar_a + br_b + cr_c}{a + b + c} = 2R - r$$

'dir.

Kanıt:

$$r_a = \frac{F}{s-a}, r_b = \frac{F}{s-b}, r_c = \frac{F}{s-c},$$

$ab + ac + bc = r^2 + s^2 + 4Rr$, $abc = 4RF$ ve $F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ eşitlikleri kullanılarak gösterilebilir.

Teorem 1.4. $\triangle ABC$ üçgeninde

$$3\sqrt{3}r \left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{1}{3}} \leq h_a \tan \frac{\alpha}{2} + h_b \tan \frac{\beta}{2} + h_c \tan \frac{\gamma}{2} \leq s$$

'dir. Burada eşitliklerin geçerli olması için gerek ve yeter koşul üçgenin eşkenar olmasıdır.

Kanıt:

$$p = h_a \tan \frac{\alpha}{2} + h_b \tan \frac{\beta}{2} + h_c \tan \frac{\gamma}{2}$$

diyelim.

$$h_a = \frac{2F}{a}, h_b = \frac{2F}{b}, h_c = \frac{2F}{c}$$

ve

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}, \tan \frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b}, \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}$$

eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
p &= \frac{2F}{a} \frac{r}{s-a} + \frac{2F}{b} \frac{r}{s-b} + \frac{2F}{c} \frac{r}{s-c} \\
&= 2Fr \left[\frac{1}{a(s-a)} + \frac{1}{b(s-b)} + \frac{1}{c(s-c)} \right]
\end{aligned}$$

Aritmetik ortalama-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$p \geq 3.2.Fr \frac{1}{[abc(s-a)(s-b)(s-c)]^{\frac{1}{3}}} \quad (0.5)$$

ve $abc = 4RF, F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ olduğundan

$$p \geq 6Fr \frac{1}{(4RF \frac{F^2}{s})^{1/3}} = \frac{6r}{(\frac{4R}{s})^{1/3}}$$

'dür. ([1].(9)) 'dan $s^2 \geq 27r^2$ olduğundan $s \geq 3\sqrt{3}r$ olup

$$p^3 \geq \frac{6^3 r^3 s}{4R} \geq \frac{6^3 r^3 3\sqrt{3}}{4R} \Rightarrow p \geq 3\sqrt{3}r \left(\frac{2r}{R}\right)^{1/3}$$

Eşitsizliğin diğer yanı aşağıdaki eşitlik ve eşitsizliklerden gösterilir:

$$s^2 \geq 27r^2, F = rs, ab + ac + bc = r^2 + s^2 + 4Rr.$$

Teoremin ifadesinde eşitlik $a = b = c$ için sağlanır.

Teorem 1.5. Her $\triangle ABC$ üçgeninde

$$3^{1+\frac{n}{2}} 2^{n-1} r^n \leq a^n \sin \frac{\alpha}{2} + b^n \sin \frac{\beta}{2} + c^n \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{4} \sqrt{a^{2n+3} + b^{2n+3} + c^{2n+3}}$$

'dür. Burada eşitliklerin geçerli olması için gerek ve yeter koşul üçgenin eşkenar olmasıdır.

Kanıt. $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$ ve $\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ eşitlikleri biliniyor. Aritmetik ortalama-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$a^n \sin \frac{\alpha}{2} + b^n \sin \frac{\beta}{2} + c^n \sin \frac{\gamma}{2} \geq 3 [(abc)^{n-1} r^2 s]^{1/3} \quad (0.6)$$

([2], 4.13) 'den

$$4\sqrt{3} \leq \frac{9abc}{a+b+c} \quad (0.7)$$

olup

$$a^n \sin \frac{\alpha}{2} + b^n \sin \frac{\beta}{2} + c^n \sin \frac{\gamma}{2} \geq 3^{1+\frac{n}{2}} 2^{n-1} r^n$$

bulunur. Şimdi

$$x = a^n \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, y = b^n \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, z = c^n \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

denilip $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$ eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} x+y+z &\leq \sqrt{3} \left[\frac{a^{2n}(s-b)(s-c)}{bc} + \frac{b^{2n}(s-a)(s-c)}{ac} + \frac{c^{2n}(s-a)(s-b)}{ab} \right]^{1/2} \\ &\leq \sqrt{3} \left[\frac{a^{2n+1}(s-b)(s-c) + b^{2n+1}(s-a)(s-c) + c^{2n+1}(s-a)(s-b)}{abc} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (0.8)$$

olur. Şimdi A.O-G.O. eşitsizliğinden

$$\frac{a}{2} = \frac{(s-b) + (s-c)}{2} \geq \sqrt{(s-b)(s-c)}$$

olup $(s-b)(s-c) \leq \frac{a^2}{4}$ ve benzer şekilde $(s-a)(s-c) \leq \frac{b^2}{4}$, $(s-a)(s-b) \leq \frac{c^2}{4}$ bulunur. Bu eşitsizlikler (0.8) 'de kullanılırsa $abc = 4RF$ olup

$$x+y+z \leq \sqrt{3} \left(\frac{a^{2n+3} + b^{2n+3} + c^{2n+3}}{16RF} \right)^{1/2}$$

bulunur. $F = rs$ eşitliği, $R \geq 2r$ ve $s^2 \geq 27r^2$ eşitsizlikleri yardımıyla

$$x + y + z \leq \frac{\sqrt{3}\sqrt{a^{2n+3} + b^{2n+3} + c^{2n+3}}}{4\sqrt{RF}} \leq \frac{\sqrt{3}\sqrt{a^{2n+3} + b^{2n+3} + c^{2n+3}}}{4(108)^{1/4}r\sqrt{r}}$$

$$x + y + z \leq \frac{\sqrt{a^{2n+3} + b^{2n+3} + c^{2n+3}}}{4(12)^{1/4}r\sqrt{r}}$$

bulunur. Üçgenin eşkenar olması durumunda eşitlik sağlanır.

Yazımızı aşağıdaki problemlerle bitirelim:

$\triangle ABC$ üçgeninde aşağıdaki eşitlik ve eşitsizliklerin varlığını kanıtlayınız:

$$1. \frac{r_a}{\tan \frac{\alpha}{2}} + \frac{r_b}{\tan \frac{\beta}{2}} + \frac{r_c}{\tan \frac{\gamma}{2}} = 3s$$

$$2. \frac{a}{\tan \frac{\alpha}{2}} + \frac{b}{\tan \frac{\beta}{2}} + \frac{c}{\tan \frac{\gamma}{2}} = 2(r_a + r_b + r_c)$$

$$3. \frac{h_a+h_b}{a+b} + \frac{h_b+h_c}{b+c} + \frac{h_c+h_a}{c+a} = \frac{s}{R}$$

$$4. \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \leq \frac{r+1}{4r^2}$$

KAYNAKLAR

- [1] Radovan R. Janič, Deux Inégalites Relatives à Un Triangle, Publications de la Faculté d'electro technique de L'Université à Belgrade, No:195 (1967), 75-76.
- [2] Mehmet Şahin, Üçgenin Elemanları Arasındaki Bazı Eşitlikler ve Eşitsizlikler I, Matematik Dünyası, Cilt 8, Sayı 4, (1999), 17-24.