GEOMETRİ VE TRİGONOMETRİNİN CEBİRDE BAZI UYGULAMALARI (2)

Diba Yılmaz-Ali Cevahir
Akdeniz Koleji Fen Lisesi, ANTALYA

Bu yazıda, Matematik Dünyası 'nın önceki sayısında yer alan yazımızın devamını sunuyoruz.

2. Trigonometrik Yöntemlerin Bazı Cebir Problemlerine Uygulanması

Aşağıda bakacağımız cebir problemlerini, doğrudan cebirsel işlemler yaparak çözmek olanaksız gibi gözüküyor. Oysa trigonometrik fonksiyonların devreye girmesi işimizi çok kolaylaştırır. Değişik problem örneklerinden de görülebileceği gibi, bize yardımcı olan esas "teknik araçlar"

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}, \qquad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \qquad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \qquad (*)$$

vs. gibi iyi bilinen trigonometrik özdeşlikler olacaktır. İlk örnek olarak, reel sayılar kümesinde

$$y = x(xy+2), \quad z = y(yz+2), \quad x = z(zx+2)$$

denklemler sistemini çözelim. Bu sistemin,

$$y = \frac{2x}{1-x^2}, \qquad z = \frac{2y}{1-y^2}, \qquad x = \frac{2z}{1-z^2}$$

biçimine indirgenebildiğini görmek kolaydır. Sağ taraftaki ifadeler $\tan 2\alpha$ 'nın açılımına benzediğinden $x = \tan\alpha$ diyelim . O halde $y = \tan 2\alpha$, $z = \tan 4\alpha$, $x = \tan 8\alpha$ olur. Buradan ise,

$$\tan 8\alpha = \tan\alpha \iff \tan 8\alpha - \tan\alpha = 0 \iff \frac{\sin 7\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos 8\alpha} = 0$$

$$\iff \sin 7\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{n\pi}{7} \quad (n\in \mathbf{Z}).$$

Böylece, $x = \tan\frac{n\pi}{7}$, $y = \tan\frac{2n\pi}{7}$, $z = \tan\frac{4n\pi}{7}$ olur.

Aşağıdaki problem 7.dereceden bir polinomun köklerini bulmakla ilgilidir ve doğrudan cebirsel yöntemler kullanmanın bir sonuç vermeyeceği apaçıktır.

$$(8x^4 - 8x^2 + 1)(1-2x^2)\cdot x = 1/8$$

Sol tarafta $1-2x^2$ çarpanı bulunduğundan (*) 'daki $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ formülünü göz önüne alarak $x = \cos\alpha$, $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ diyelim. O halde denklemin sol tarafı,

$$(8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1)(1-2\cos^2\alpha)\cdot\cos\alpha = \cos\alpha\cdot(-\cos 2\alpha)\cdot[8\cos^2\alpha(\cos^2\alpha - 1) + 1]$$

$$= \cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot(-2\sin^2 2\alpha + 1)$$

olur. Buradan $-8\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha = 1$ elde edilir. Eşitliğin her iki yanını $\sin\alpha$ ile çarparsak, ve $2\sin t\cdot\cos t = \sin 2t$ formülünü kullanırsak,

$$-\sin 8\alpha = \sin\alpha \iff \sin 8\alpha + \sin\alpha = 0 \iff 2\sin\frac{9}{2}\alpha\cdot\cos\frac{7}{2}\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{9}k\pi\,, \ (k \in \mathbb{Z}) \ \text{veya} \ \alpha = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7}\cdot n\,, \ (n \in \mathbb{Z}) \ \text{buluruz.}$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ koşulunu da göz önüne alırsak, α için 4 tane değer buluruz:

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{9}, \quad \alpha_2 = \frac{4\pi}{9}, \quad \alpha_3 = \frac{\pi}{7}, \quad \alpha_4 = \frac{3\pi}{7}.$$

Böylece verilen denklemin 4 reel kökünü bulmuş oluruz: $x_1 = \cos\frac{2\pi}{9}, x_2 = \cos\frac{4\pi}{9}, \ x_3 = \cos\frac{\pi}{7},$ $x_4 = \cos\frac{3\pi}{7}$.

Bir tane de "irrasyonel" ifadelerin bulunduğu bir denklemi trigonometrik dönüşümler uygulayarak çözelim:

$$\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x$$

$|x| \le 1$ olacağından $x=\cos\alpha$, $(0 \le \alpha \le \pi)$ diyebiliriz. Bu takdirde, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ formülünü kullanarak

$$\sin\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3x \quad \Leftrightarrow \quad \sin\alpha = \cos 3\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 3\alpha - \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 0$$

elde ederiz. Sonuncu denklemden

$$\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ve} \quad \alpha = \frac{3}{4}\pi + \pi\cdot n, \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad \text{buluruz.}$$

$0 \le \alpha \le \pi$ olduğundan, α için 3 tane değer buluyoruz: $\alpha_1 = \frac{\pi}{8}, \ \alpha_2 = \frac{5\pi}{8}, \ \alpha_3 = \frac{3\pi}{4}$. Sonuçta, $x=\cos\alpha$ formülünden denklemin 3 çözümünü elde ederiz.

Bu bölümü de [5] yazımızın girişinde verdiğimiz ikinci problemin çözümü ile bitirelim. Herhangi 13 tane reel sayı verildiğinde, bunların içinde

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < 2 - \sqrt{3}$$

eşitsizliğini sağlayan en az ikisinin varlığını kanıtlamalıyız.

Verilen sayılara $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$ diyelim. Her $i=1,2,\ldots,13$ için $a_i = \tan x_i$ olacak biçimde $x_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ sayıları vardır. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığının uzunluğu π ve x_i sayıları 13 tane olduğundan onlar içerisinde $0 < x_i - x_j < \frac{\pi}{12}$ eşitsizliğini sağlayan en az ikisi vardır. Bu takdirde $0 < \tan(x_i - x_j) < \tan\frac{\pi}{12}$ olur. $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ formülünü ve $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ eşitliğini kullanarak $\tan\frac{\pi}{12}$ 'yi hesaplamak zor değildir: $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

Böylece $0 < \tan(x_i - x_j) < 2 - \sqrt{3}$ olur. Buradan ise ,

$$0 < \frac{\tan x_i - \tan x_j}{1 + \tan x_i \cdot \tan x_j} < 2 - \sqrt{3}$$