PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

-Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

-Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

-Çözümleri, Akdeniz üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA adresine 29 Şubat 2000 tarihine kadar gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.201. $x^3 - x + 1 = 0$ denkleminin her bir kökünün tersi, $x^5 + x + 1 = 0$ denkleminin bir köküdür; kanıtlayınız.

A. 202. Toplamları ve çarpımları tam kareler olan doğal sayı ikilileri bulmak için bir yöntem gösteriniz.

A. 203. Kenar uzunlukları a, b, c, d olan bir dörtgenin alanının $\frac{ac+bd}{2}$ 'den fazla olamayacağını gösteriniz.

A. 204. Sıfırdan başka tüm rakamların bulunduğu ve 5 ile biten bir 9 basamaklı sayı tamkare olamaz; kanıtlayınız.

A. 205. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin AH yüksekliği, BD kenarortayı ve CN iç açıortayı aynı bir noktadan geçiyorsa, a, b, c (kenar uzunlukları) arasında hangi bağıntı vardır?

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.201. $a_0, a_1, ..., a_{n-3}$ reeel sayılar olmak üzere,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-3}x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

denkleminin köklerinden en az birinin reel olamayacağı; yani, karmaşık olacağını kanıtlayınız.

Y.202. $\frac{20}{60} < \sin 20^0 < \frac{21}{60}$ eşitsizliğini ispatlayınız.

Y.203. Bir $k \in \mathbf{N}$ sayısının şu özelliği vardır: k ya bölünen herhangi bir sayının rakamları ters sırada dizilerek elde edilen sayı da k ya bölünmektedir. k nın 99 'u böldüğünü kanıtlayınız.

Y.204. $\sqrt{2}$, 2 ve $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sayıları verilmiştir. Bu sayılardan herhangi ikisinin yerine, onların toplamının $\sqrt{2}$ ye bölümünü ve farkının$\sqrt{2}$ 'ye bölümünü koymaya izin veriliyor. Bu işlemler bir kaç defa yapılarak, 1, $\sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$ üçlüsünü elde etmek mümkün müdür?

Y.205. Bir P noktasından geçen S_1, S_2, S_3 çemberleri birbirleriyle ayrıca A, B, C noktalarında kesişiyorlar. Eğer A, B, C noktaları P 'den gecmeyen bir doğrunun üzerinde ise, bu çemberlerin merkezlerinden geçen çemberin P noktasından da geçeceğini ispatlayınız.

ÇÖZÜMLER

A.191. Düzlem üzerinde 1111 tane nokta, rasgele alınmış herhangi 3 nokta yarıçapı 1 'e eşit olan bir dairenin üzerinde bulunacak biçimde işaretlenmiştir. Bu durumda, noktaların hepsinin yarıçapı 1 olan dairenin üzerinde olduğunu ispat ediniz.

Çözüm. İşaretlenmiş noktaların hepsini üzerinde bulunduran en küçük çaplı daireye bakalım. Bu dairenin çemberi üzerinde ya merkeze göre simetrik 2 işaretlenmiş nokta bulunacaktır, ya da dar açılı bir üçgenin işaretlenmiş noktalardan oluşan köşeleri bulunacaktır. Fakat, işaretlenmiş üç noktayı üzerinde bulunduran minimal yarıçaplı dairenin yarıçapı ≤ 1 olduğundan, işaretlenmiş noktaların hepsini içeren minimal dairenin yarıçapı da ≤ 1 olacaktır.

A.192. $x + xy + y = x^2 + y^2$ denkleminin tüm tamsayı çözümlerini bulunuz.

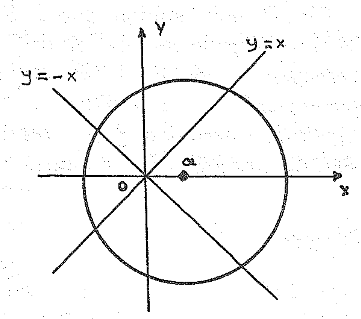
Çözüm. Denklemin her iki yanı 2 ile çarpıldıktan ve uygun düzenlemeler yapıldıktan sonra onu aşağıdaki denk biçime getirmek mümkündür:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 = 2\,.$$

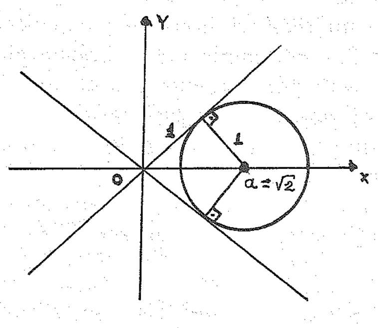
Sonuncu denklemin ise tüm tamsayı çözümlerinin $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$ olduğunu görmek zor değildir.

A.193. $x^2 - y^2 = 0$, $(x-a)^2 + y^2 = 1$ denklemler sisteminin tam:
(a) 4 tane; (b) 3 tane; (c) 2 tane
çözüme sahip olması için a parametresinin sağlaması gereken koşulları bulunuz.

Çözüm. Birinci denklemin çözüm kümesi $y = x$ ve $y = -x$ doğruları üzerindeki noktalardır.



İkinci denklemin çözüm kümesi ise, merkezi $(a,0)$ noktasında ve yarıçapı 1 olan çember (a parametresinin $(-\infty,\infty)$ aralığında değiştiğini unutmayın) üzerindeki noktalardır.



Problemi, $a \geq 0$ için inceleyelim (simetriden dolayı, $a < 0$ için de uygun sonuçlar çıkarılabilir). İkinci resimden anlaşılacağı gibi, $a > \sqrt{2}$ için sistemin hiç çözümü yoktur.

$a = \sqrt{2}$ için tam 2 tane çözüm vardır: $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$; ve $a = 1$ için tam 3 tane çözüm vardır: $(0,0), (1,1), (1,-1)$; diğer durumlarda ise (yani, $0 \leq a < 1$ ve $1 < a < \sqrt{2}$ hallerinde) tam 4 tane çözüm vardır.

A.194.

$$\underbrace{((\ldots(((}_{100\ tane\ parantez} x-2)^2-2)^2-\ldots-2)^2-2)^2$$

ifadesinde parantezler açılarak sadeleştirmeler yapıldıktan sonra x^2 'nin önündeki katsayı ne olacaktır?

Çözüm. Verilmiş polinomun serbest terimi $x = 0$ noktasındaki değerine, yani,

$$\left(..\left((4-2)^2-2\right)^2-\ldots)^2-2\right)^2 = (4-2)^2 = 4$$

sayısına eşittir.

Şimdi, probleme genel halde bakarak, k tane parantezin bulunduğu ifadede x 'in katsayısına A_k ve x^2 'nin katsayısına B_k dersek,

$$A_k = 4.A_{k-1} \quad \text{ve} \quad B_k = A_{k-1}^2 + 4B_{k-1}$$

olduğunu kontrol edebiliriz.

Öte yandan, $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ özdeşliğinden dolayı, $A_1 = -4$, $B_1 = 1$ 'dir. Böylece, $A_k = 4.A_{k-1}$ formülünü gözönüne alırsak, her $k = 1,2,3,\ldots$ için $A_k = -4^k$ olur. Bunu $B_k = A_{k-1}^2 + 4B_{k-1}$ formülünde yerine koyarsak,

$$B_k = 4B_{k-1} + 4^{2k-2}, \quad (k = 1,2,\ldots)$$

elde ederiz.

$B_1 = 1$ olduğunu gözönünde tutarak, sonuncu rekürans denklemini çözersek,

$$B_k = 4^{k-1}.\frac{4^k-1}{4-1} = \frac{1}{3}(4^{2k-1} - 4^{k-1})$$

elde ederiz. Özel halde,

$$B_{100} = \frac{1}{3}(4^{199} - 4^{99})$$

olur.

A. 195. İkişer ikişer birbirine dıştan teğet olan A, B, C merkezli ve R_1, R_2, R_3 yarıçaplı üç çember aynı zamanda bir d doğrusuna da teğettir.

A merkezli çemberin d doğrusuna değdiği noktanın A ya göre simetriği P, diğer iki çemberin birbirine değdiği nokta Q ile gösterilmek üzere $PQ \perp CB$ olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. $BK \perp AP$ olsun. $AB = R_1 + R_2$ ve $AK = |R_1 - R_2|$ 'dir. $BK = 2\sqrt{R-1R_2}$, $BP = \sqrt{4R_1^2 + R_2^2}$, $PC = \sqrt{4R_1^2 + R_3^2}$ bulunur. C, Q, B noktadaştır. Kosinüs teoreminden,

$$PB^2 = PQ^2 + R_2^2 - 2PQR_2 \cos \widehat{PQB} = 4R_1^2 + R_2^2$$

$$PC^2 = PQ^2 + R_3^2 - 2PQR_3 \cos \widehat{PQB} = 4R_1^2 + R_3^2$$

$\Rightarrow PB^2 - PC^2 = R_2^2 - R_3^2 - 2PQ.\cos \widehat{PQB}\ (R_2 + R_3) = R_2^2 - R_3^2 \Rightarrow \cos \widehat{PQB} = 0$ elde edilir. O halde, $PQ \perp BC$ 'dir.

Y.191. Pozitif sayılardan oluşan (a, b, c, d) sıralı dörtlüsünden her sayı bir sonraki ile ve dördüncü sayı ise birinci sayı ile çarpılarak elde edilen sayıların sıralanmasıyla (ab, bc, cd, da) sıralı dörtlüsü elde ediliyor; sonra aynı işlem bu yeni dörtlüye uygulanıyor ve üçüncü sıralı dörtlü oluşturuluyor, ve bu işlem sürdürülüyor. Böylece elde edilen dörtlüler dizisinde (a, b, c, d) dörtlüsüne ikinci kez rasgelebilmek için gerek ve yeter koşul, $a = b = c = d = 1$ olmasıdır. Kanıtlayınız.

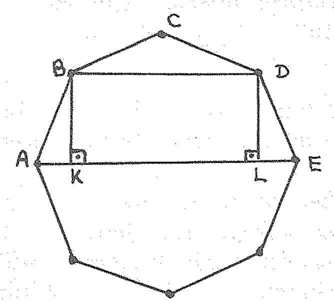
Çözüm. Yeterlilik açıktır. Koşulun gerekliliğini kanıtlayalım. Varsayalım ki, dörtlüler dizisinde (a, b, c, d) 'ye ikinci kez rast gelinmiştir (yani, dörtlüler dizisi bir periyodik dizidir). Bu takdirde, önce $abcd = 1$ olması gerektiğini gösterelim. $abcd = p$ olsun. Bu durumda ikinci dörtlüdeki sayıların çarpımı p^2, üçüncüdeki sayıların çarpımı p^4, dördüncüdekilerin çarpımı p^8, ... olur. $p = 1$ değilse, $p, p^2, p^4, p^8, \ldots$ sayılarının hepsi farklı olur ve dolayısıyla, dörtlüler dizisinde iki aynı terim olamaz. Şimdi, ikinci dörtlüye bakalım: (ab, bc, cd, da). $abcd = 1$ olduğundan, dördüncü dörtlü $(b^2c^2, c^2d^2, d^2a^2, a^2b^2)$ olacaktır (kontrol ediniz!). Yani, dördüncü dörtlüyü elde etmek için ikinci dörtlünün "girdilerinin" karesini alıp, uygun yerdeğiştirme yapmak lazımdır. Benzer şekilde, altıncı dörtlü, dördüncü dörtlünün "girdilerinin" karelerinin yerdeğiştirmesinden elde edilir: $(c^4d^4,\ d^4a^4,\ a^4b^4,\ b^4c^4)$. Benzer yol izlenerek, dizinin sekizinci, onuncu ve diğer terimleri bulunabilir.

Şimdi iddia ediyoruz ki, ikinci dörtlünün tüm "girdileri" 1 'e eşittir: $ab = bc = cd = da = 1$. Gerçekten, eğer bu "girdilerin" hepsi 1 'e eşit değilse, onların en büyüğü 1 'den büyük olacaktır. Örneğin, diyelim ki, $ab > 1$ 'dir. O halde $(ab)^2$, $(ab)^4$, $(ab)^6$, ... sayısal dizisi sınırsız artıyor. Bu ise dörtlüler dizisinin periyodik oluşuyla çelişiyor (periyodik bir dizi (fonksiyon) sınırlı olmak zorundadır). Böylece, $ab = bc = cd = da = 1 \Rightarrow a = b = c = d = 1$.

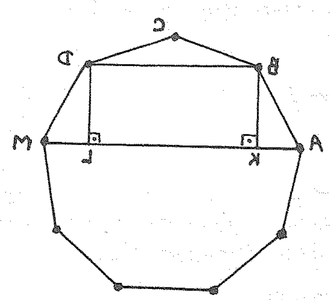
Y.192. $n > 5$ olmak üzere, bir düzgün n-gende, en büyük ve en küçük köşegenlerin farkı $n-$genin kenar uzunluğuna eşit ise, n sayısını bulunuz.

Çözüm. n-genin kenar uzunluğuna a_n, büyük ve küçük kümelerinin uzunluğuna da, sırası ile, D_n ve d_n diyelim. Hangi n ler için $a_n = D_n - d_n$ olduğunu bulmak istiyoruz.

$n = 8$ **durumu**



$n = 9$ **durumu**



$n = 6$ veya $n = 7$ için $D_n - d_n < a_n$ olduğu kolayca görülebilir (kontrol ediniz !).

$n = 8$ durumunda küçük köşegen olan BD 'nin uçlarından büyük köşegen olan AE 'ye BK ve

DL diklerini indirelim.

$$A\hat{B}K = L\hat{D}E = 22,5^o < 30^o$$

olduğundan, $|AB| = a_8 > 2.|AK| = D_8 - d_8 \Longrightarrow |AB| = a_8 > D_8 - d_8$ olur.

$n = 9$ durumunda $A\hat{B}K = L\hat{D}E = 30^0$ olduğundan $|AB| = a_9 = 2|AK| = D_9 - d_9$ olur. Yani, düzgün dokuzgende $a_9 = D_9 - d_9$ olur.

Şimdi $n > 9$ olsun. Bu takdirde $D_n \geq D_9, d_n \leq d_9$ ve $a_n < a_9$ olduğundan,

$$D_n - d_n \geq D_9 - d_9 = a_9 > a_n \Rightarrow D_n - d_n > a_n$$

eşitsizliği sağlanır. Yani, problemin koşulunu sağlayan n sayısı 9 'a eşittir.

Y.193. Bir subay her gece, 33 asker içinden seçtiği bir takımı nöbete göndermektedir. Takımdaki asker sayısı bazı geceler 9, bazı geceler ise 10 olmaktadır. Bütün askerlerin aynı sayıda nöbet tutmuş olmaları için en az kaç gece geçmelidir?

Çözüm. 9 tane askerin nöbet tuttuğu gece sayısı k ve 10 askerin nöbet tuttuğu gece sayısı da l olsun. Bundan başka , her askerin tam m gece nöbet tuttuğunu varsayalım. Bu takdirde, aşağıdaki denklem elde edilir: $9k + 10l = 33m$. $m = 1$ için denklemin doğal sayı çözümü yoktur. $m = 2$ için tek çözüm $k = 4$, $l = 3$ 'tür.

Dolayısıyla, bütün askerlerin aynı sayıda nöbet tutmuş olmaları için en az $4 + 3 = 7$ gece geçmelidir.

(**Çözenler:** *Eray Kanpak (Yozgat)*)

Y. 194. n bir pozitif tamsayı olmak üzere $x^3 - 3xy^2 + y^3 = n$ denkleminin tamsayılarda bir çözümü varsa, o çözümden başka iki tane daha çözümü bulunduğunu gösterinz.

Çözüm. Denklemin sol tarafına $P(x, y)$ diyerek, onu şu biçimde yazalım:

$$P(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y-x)^3 - 3x^2y + 2x^3 = (y-x)^3 - 3(y-x)x^2 - x^3 = P(y-x, -x).$$

Böylece, her (x, y) ikilisi için $P(x,y) = P(y-x, -x) = P(-y, x-y)$ olur. Bu eşitliklerden eğer (x, y) çifti verilen denklemin çözümü ise, $(y - x, -x)$ ve $(-y, x-y)$ çiftlerinin de birer çözümü olduğu görülür. Bu çözümler, farklı çözümlerdir; çünkü aksi halde $x = y = 0$ olur ve buradan da $n = 0$ olması gerekir. Halbuki, varsayıma göre $n \neq 0$ 'dır.

(**Çözenler:** *Eray Kanpak (Yozgat)*)

Y. 195. Merkezleri A ve B ile gösterilen, birbirlerinin dışında bulunan K_1, K_2 küreleri veriliyor. Tepe noktası K_2 küresi üzerinde bulunan ve K_1 küresine teğet olan koninin bu küreye değdiği noktaların oluşturduğu çemberin merkezi gözönüne alınıyor. Tepe noktası K_2 üzerinde değiştiği zaman sözü edilen merkezin geometrik yerini belirleyiniz.

Çözüm. AB doğrusundan geçen bir D düzlemi ile K_1 ve K_2 nin arakesiti olan çemberler a ve b olsun. b çemberinin bir T noktasında tepesi olan koninin kürede belirlediği çemberin T den geçen iki teğeti, D ile koninin arakesiti olan TT_1, TT_2 doğrularıdır. $[T_1, T_2]$ 'nin orta noktası O olmak üzere, O noktası sözü edilen çemberin merkezidir. Buradan $AT.AO = AT_1^2$ bulunur. AB 'nin K_2 küresini kestiği noktalar P, Q olmak üzere tepesi bu noktalar olan konilerle elde edilen çemberlerin merkezleri de O_1, O_2 olsun. $AP.AO_1 = AT_1^2$, $AQ.AO_2 = AT_1^2$ 'den yararlanıp ilk bağıntı da kullanıldığında $\frac{AT}{AQ} = \frac{AO_2}{AO}$,

dolayısıyla $A\hat{O}O_2 \sim A\hat{Q}T$ ve $A\hat{O_2}O = A\hat{T}Q$ elde edilir. Benzer biçimde, $A\hat{O_1}O = A\hat{T}P$ bulunur.

$$O_1\hat{O}O_2 = A\hat{O_2}O - A\hat{O_1}O = A\hat{T}Q - A\hat{T}P = P\hat{T}Q$$
$$= 90^o$$

'dir.

T, $[PQ]$ çaplı çemberi çizerken, O noktası da O_1O_2 çaplı çemberi çizer. D düzleminde geometrik yer bir çemberdir. AB 'den geçen her düzlem için D 'deki durum benzer olarak ortaya çıkarılacağından O noktasının geometrik yeri $[O_1O_2]$ çaplı küredir.