AÇIK FONKSİYONLAR HAKKINDA

Nurettin Ergun
İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü,
İSTANBUL

Bu yazı, baştan belirtmeli, vektör uzayı, metrik uzay, topolojik vektör uzayı ve Banach uzayı denilen kavramları biraz olsun bilenler için yazılmıştır ve bu konularda ilginç bir iki sonucu onların dikkatlerine sunmayı amaçlamaktadır. Ülkemizdeki üniversitelerin Matematik Bölümlerinin öğretim üye ve yardımcıları arasında bu derginin okuru olanlara yöneliktir öncelikle bu yazı, ama anılan kavramları biraz olsun tanımış ve kavrama isteğiyle okuyan okurların da bu yazıdan yararlanabilmeleri için yazı boyunca belirli ölçüde açıklayıcı olunmaya çalışılacaktır. O halde daha baştan bu yazının okurlarının, örneğin, bir d metriği ile donatılmış bir X metrik uzayında boştan farklı herhangi bir A kümesi için, $x \in \overline{A}$ ile $d(x, A) = 0$ iddialarının eşdeğer olduklarını ve dolayısıyla şu çok yalın ve yararlı

$$\overline{A} \subseteq S_d(A, \varepsilon) = \{x \in X \;:\; d(x, A) < \varepsilon\}$$

kapsamasını kolayca gözleyebildiklerini varsayıyoruz; $\overline{A}$ elbette A 'nın kapanış kümesini göstermektedir. Yine okurlarımızın, azalarak sıfıra yakınsayan bir $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif gerçel sayılar dizisi yardımıyla, böyle bir metrik uzayda, her $n \in \mathbf{N}$ için $d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon_n$ gerçekleyen bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin, bir Cauchy dizisi olduğunu zorlanmadan gözleyebileceklerini varsayıyoruz. Öte yandan bir **topolojik vektör uzayı**, bilindiği gibi, vektör uzayındaki iki temel cebirsel işlemi, yani toplama ve skalerle çarpım işlemlerini sürekli kılacak bir topolojiyle donatılmış özel bir vektör uzayına denir ve yine iyi bilindiği gibi bir vektör uzayının elemanlarına ise **vektör** denir. O halde toplama işleminin sürekliliği nedeniyle bir X topolojik vektör uzayının x_0 ve y_0 vektörleri ne olursa olsun $x_0 + y_0$ toplam vektörünün herhangi bir G komşuluğu, bu vektörlerin sırasıyla uygun birer U_{x_0} ve V_{y_0} komşuluğuna ait vektör çiftlerinin toplamlarını ihtiva eder, kısacası $x \in U_{x_0}$ ve $y \in V_{y_0}$ vektörleri ne olursa olsun $x + y \in G$ gerçekleşir, kısa yazılışla $U_{x_0} + V_{y_0} \subseteq G$ geçerli olur. Skalerle çarpım işlemi, α gerçel ya da karmaşık sayısı ile x vektörünün oluşturduğu ikiliye αx işareti ile gösterilen vektörü eşleştirir ve bu işlemin bir (α_0, x_0) ikilisinde sürekli olması, bilindiği gibi $\alpha_0 x_0$ vektörünün herhangi bir U komşuluğu alındığında α_0 gerçel ya da karmaşık sayısının $\mathbf{R}$ ya da $\mathbf{C}$ üzerinde tanımlı topolojik uzaydaki uygun bir komşuluğundaki tüm α skalerleri ile x_0 vektörünün uygun bir U_{x_0} komşuluğundaki tüm x vektörlerinin αx çarpımlarının $\alpha x \in U$ gerçeklemesi demektir. Yine iyi bilindiği gibi sabit bir x_0 vektörü ile **öteleme** (tüm $x \in X$ vektörlerine $h_{x_0}(x) = x + x_0$ vektörünü eşleştiren fonksiyon) ve sabit ve sıfırdan farklı bir α_0 skaleri ile çarpma (tüm $x \in X$ vektörlerine $\alpha_0 x$ vektörünü eşleştirme) X topolojik vektör uzayından kendisine tanımlanan birer topolojik eşyapı fonksiyonu (homeomorfizma) oldukları ve dolayısıyla iç ve kapanış gibi topolojik işlemleri korudukları için (biliyorsunuz h bir topolojik eşyapı fonksiyonu ise gerçekten

$$\text{iç } h(A) = h(\text{iç } A) \text{ ve } \overline{h(A)} = h(\overline{A})$$

gerçekleşir) sonuçta, X topolojik vektör uzayında yine çok yalın ve yararlı

$$\text{iç}(x_0 + A) = x_0 + \text{iç } A,\; \overline{x_0 + A} = x_0 + \overline{A}$$

ve benzer nedenlerle

$$\overline{\alpha_0 A} = \alpha_0 \overline{A},\quad \text{iç}(\alpha_0 A) = \alpha_0(\text{iç } A)$$

ve özellikle x_0 vektörü yerine $-x_0$ vektörü alınırsa,

$$\text{iç}(A - x_0) = (\text{iç}A) - x_0$$

bağıntılarının geçerli olduğu anlaşılır, çünkü örneğin $x_0 + A$ kümesi, yukarıda tanımlanan $h_{x_0}(A)$ görüntü kümesinden başka bir şey değildir. Bir vektör uzayında A ve B altkümeleri ne olursa olsun $A + B$ işareti ile

$$\{x + y : x \in A, y \in B\}$$

kümesinin gösterildiğini anımsatalım. $A - B$ kümesi de benzer biçimde tanımlanır ve elbette α skaleri ne olursa olsun αA kümesi de

$$\{\alpha x : x \in A\}$$

'dır. Bir X topolojik vektör uzayında daima

$$\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A + B} \;,\; \overline{A} - \overline{B} \subseteq \overline{A - B}$$

kapsamaları geçerlidir. Bunlar toplama ve (her x ve y vektör ikilisine $x - y = x + (-y)$ vektörünü eşleştiren) çıkarma işlemlerinin sürekli oluşunun kolay sonuçlarıdır; peki çıkarma işlemi neden süreklidir?

Bu yazı üç sonucun kanıtlandığı üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci Sonuç

Şimdi bu yazıdaki ana amaca, Fonksiyonel Analiz 'in öncüsü ve büyük ustası Polonyalı Stefan Banach 'ın en olağanüstü sonuçlarından birisi olan **Açık Fonksiyon Teoreminin** (bak. ikinci bölüm) özgün ve ilk kanıtındaki nedenlemenin bir bakıma topolojik kökeni sayılabilecek temel ve bağımsız bir önermeyi kanıtlayarak girelim. Dolayısıyla bu bölümde salt metrik uzaylarla ilgileneceğiz. Bir X kümesi üzerinde tanımlı bir d metriğinin belirlediği topolojik uzayda, iyi bilindiği gibi, bir $x \in X$ noktasının yerel taban üyeleri

$$S_d(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(y,x) < \varepsilon\}$$

açık yuvarlarıdır, kısacası ancak ve yalnız uygun bir $0 < \varepsilon$ sayesinde $S_d(x,\varepsilon) \subseteq G$ gerçekleyen bir G açık kümesi $x \in X$ noktasını ihtiva edebilir ve d metriğinin belirlediği metrik uzay kısaca (X,d) işareti ile gösterilir. Bu metrik uzayda $S_d(A,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,A) < \varepsilon\}$ kümesinin, $d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$ tanımı kullanılarak $\cup\{S_d(a,\varepsilon) : a\varepsilon A\}$ birleşimine eşit olduğunu gözlemek güç değildir. Bilindiği gibi tüm Cauchy dizilerinin yakınsaklığının güvence altında olduğu özel bir metrik uzaya **tam metrik uzay** denir. (X,d) ve (Y,ρ) metrik uzayları arasında tanımlı bir $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ fonksiyonu ancak ve yalnız, $0 < \varepsilon$ verildiğinde

$$\exists\delta > 0 \quad , f(S_d(x,\delta)) \subseteq S_\rho(f(x),\varepsilon)$$

koşulu gerçeklenirse $x \in X$ **noktasında süreklidir** denir; bu tanımda sözü edilen pozitif δ sayısı genellikle hem ε ve hem de x 'e bağlıdır. Yeri gelmişken şunları anımsatalım: ε verildiğinde bu δ sayısını sürekliliğin incelendiği x elemanına bağlı olmaksızın belirleyebiliyorsak, kısacası aynı bir δ_ε , **tüm** $x \in X$ elemanlarının süreklilik tanımında, yukarıda yazılı $f(S_d(x,\delta_\varepsilon)) \subseteq S_\rho(f(x),\varepsilon)$ kapsamasında kullanılabiliyorsa, ya da eşdeğer bir yazışla, eğer bir x, y çifti için $d(x,y) < \delta_\varepsilon$ gerçeklenmesi $\rho(f(x),f(y)) < \varepsilon$ gerektiriyorsa, işte bu özel durumda f fonksiyonuna bu iki metrik uzay arasında **düzgün sürekli fonksiyon** denir, yalnızca ε tarafından belirlenen δ_ε pozitif sayısına ise ε 'nun belirlediği **düzgün süreklilik sabiti** denir. Örneğin $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $(0,1)$ aralığından $(0,\infty)$ aralığına tanımlı ve sürekli bir fonksiyondur, ama düzgün sürekli değildir, çünkü $\varepsilon = 0,1$ için hiç bir δ pozitif sayısı düzgün süreklilik sabiti görevini göremeyecektir; gerçekten δ verildiğinde $0 < \delta' < \min\{\delta, \frac{1}{2}\}$ gerçekleyen pozitif δ' yardımıyla tanımlanan $x = \frac{\delta'}{2}$ ve $y = \frac{\delta'}{3}$ gerçel sayıları için d Öklit metriğini göstermek üzere $d(x,y) = |x-y| = \frac{\delta'}{6} < \delta' \leq \delta$ olur, ama $2 \leq \frac{1}{\delta'} = |f(x) - f(y)|$ nedeniyle apaçıktır ki $|f(x) - f(y)| < 0,1$ gerçeklenmemektedir. Düzgün süreklilik kavramı özellikle ikinci bölümde kullanılacaktır. Şimdi ana önermemizi görelim. Ama önce anımsatalım: Tanımlandığı uzayda **her noktada** sürekli olabilen bir fonksiyona **sürekli fonksiyon** denir.

Ana Önerme: (X,d) tam bir metrik uzay ve $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu takdirde aşağıdaki iki koşul eşdeğerdir:

(1) $\forall\varepsilon > 0 \ ,\exists\delta_\varepsilon > 0 \ ,\forall x \in X$ için

$$S_\rho(f(x),\delta_\varepsilon) \subseteq \overline{f(S_d(x,\varepsilon))}$$

(2) $\forall\varepsilon > 0 \ ,\exists\delta^*_\varepsilon > 0 \ ,\forall x \in X$ için

$$S_\delta(f(x),\delta^*_\varepsilon) \subseteq f(S_d(x,\varepsilon))$$

Kanıtlama: Bir küme kapanışı tarafından kapsandığı için (2) koşulu gerçekleniyorsa, δ_ε olarak δ^*_ε alarak (1) koşulunun gerçeklendiğini gözlemek kolaydır. Şimdi tersine f fonksiyonunun (1) koşulunu gerçeklediğini varsayalım ve (2) 'nin gerçeklendiğini göstermeye çalışalım. Herhangi bir $x \in X$ ve $0 < \varepsilon$ alınsın ve tüm kanıtlama boyunca bunlar sabit tutulsun. (1) koşulu nedeniyle

$$\forall x \in X \quad \text{için} \quad S_\rho(f(x),\delta_\varepsilon) \subseteq \overline{f(S_d(x,\varepsilon))} \qquad (3)$$

gerçeklenecek biçimde bir pozitif δ_ε vardır. Şimdi önce her n doğal sayısı için $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ yazıp bu ε_n sayılarına karşılık (3) koşulunu gerçekleyen ve var olan pozitif sayıları δ^*_n işareti ile gösterirsek, bunlar yardımıyla

$$\delta_n = \min\{\delta^*_n, \frac{1}{n}\}$$

pozitif sayılarını tanımlarsak, $\delta_n \leq \delta_n^*$ nedeniyle, (3) kullanılarak

$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in X$ için

$$S_\rho(f(x),\delta_n) \subseteq \overline{f(S_d(x,\varepsilon_n))} \qquad (3')$$

elde edilir. Bundan sonra artık amacımız

$$\forall x \in X \text{ için } S_\rho(f(x),\delta_1) \subseteq f(S_d(x,\varepsilon))$$

gerçeklendiğini göstermek olacaktır. Bu son iddiayı kanıtlamak için Banach 'ın Açık Fonksiyon Teoremindeki özgün kanıtlamasında yararlandığı dahiyane yöntemini kullanacağız. (Böylelikle dahiyane bir yöntemi kullanarak yeni şeylerin kanıtlanabildiğini öğrenmiş olacağız.)

Önce gelişigüzel bir $y \in S_\rho(f(x),\delta_1)$ elemanı seçelim ve gerekli olacağı için x yerine tüm kanıtlama boyunca x_0 yazalım. $(3')$ koşulu nedeniyle

$$y \in S_\rho(f(x_0),\delta_1) \subseteq \overline{f(S_d(x_0,\varepsilon_1))}$$

geçerli olduğundan, $y \in Y$ noktasının her açık yuvarı $f(S_d(x_o,\varepsilon_1))$ görüntü kümesiyle boştan farklı olarak kesişmek zorundadır, bu nedenle

$$S_\rho(y,\delta_2) \cap f(S_d(x_0,\varepsilon_1)) \quad (\neq \emptyset)$$

kesişim kümesinde en az bir eleman vardır; kısacası $S_d(x_0,\varepsilon_1)$ yuvarına ait en az bir elemanın, örneğin belirli ve seçilmiş bir $x_1 \in S_d(x_0,\varepsilon_1)$ elemanının $f(x_1)$ görüntüsü bu kesişimde bulunur. Bu yöntemi ardarda yineleyip, tümevarım yardımıyla X uzayında öyle bir $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ dizisi tanımlayacağız ki

$\forall n \in \mathbf{N}$ için

$$d(x_{n-1},x_n) < \varepsilon_n, \; \rho(f(x_n),y) < \delta_{n+1} \qquad (4)$$

gerçekleşecektir. Gerçekten de biraz önce seçilen $x_1 \in X$ elemanının

$$d(x_0,x_1) < \varepsilon_1 \quad \text{ve} \quad \rho(f(x_1),y) < \delta_2$$

gerçeklendiği apaçıktır ve sözü edilen dizinin (4) koşulunu gerçekleyen $x_0, x_1, ..., x_n$ terimleri **tanımlanmış** olduğunda $(3')$ yardımıyla

$$S_\rho(f(x_n),\delta_{n+1}) \subseteq \overline{f(S_d(x_n,\varepsilon_{n+1}))}$$

$$\text{ve} \quad \rho(y,f(x_n)) < \delta_{n+1}$$

geçerli olan bilgilerini ve herhangi bir metrik uzaydaki temel $\overline{A} \subseteq S_d(A,\delta)$ kapsamasını kullanarak

$$\begin{aligned} y \in S_\rho(f(x_n),\delta_{n+1}) &\subseteq \overline{f(S_d(x_n,\varepsilon_{n+1}))} \\ &\subseteq S_\rho(f(S_d(x_n,\varepsilon_{n+1})),\delta_{n+1}) \\ &= \bigcup\{S_\rho(z,\delta_{n+1}) : z \in f(S_d(x_n,\varepsilon_{n+1}))\} \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise y elemanının son birleşime katılan δ_{n+1} yarıçaplı yuvarlardan en az birisine ait olmasını gerektirir. Demek ki öyle belirli bir $x_{n+1} \in S_d(x_n,\varepsilon_{n+1})$ vardır ki y elemanı $f(x_{n+1})$ 'in δ_{n+1} yarıçaplı yuvarındadır, kısacası hem $d(x_n,x_{n+1}) < \varepsilon_{n+1}$ ve hem de $\rho(y,f(x_{n+1})) < \delta_{n+1}$ geçerlidir. O halde gerçekten tümevarımla (4) iddialarının doğruluğu gösterilmiş olur. Oysa

$$\forall n \in \mathbf{N} \text{ için } \rho(y,f(x_n)) < \delta_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

nedeniyle, kolayca (Y,ρ) metrik uzayında $y = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ bulunur. Üstelik $\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0$ ve her $n \in \mathbf{N}$ için $d(x_n,x_{n-1}) < \varepsilon_n$ olduğundan, yine zorlanmadan, $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ dizisinin (X,d) metrik uzayında bir Cauchy dizisi olduğu gözlenir ve bu uzay bir tam metrik uzay olduğu için, bu dizi uygun bir $\xi \in X$ limitine yakınsamak zorunda kalacağından hem $d(\xi,x_0) = \lim_{n\to\infty} d(x_n,x_0)$ ve hem de f sürekli fonksiyon olduğu için $y = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi)$ bulunur. Oysa

$$\begin{aligned} d(x_0,x_n) &\leq \sum_{k=1}^{n} d(x_{k-1},x_k) < \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

geçerli olacağından $d(\xi,x_0) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, yani $\xi \in S_d(x_0,\varepsilon)$ ve dolayısıyla $y = f(\xi) \in f(S_d(x_0,\varepsilon))$ bulunur. y elemanını nereden aldığımızı ve $x_0 = x$ yazıldığını anımsayarak, tüm bunların sonunda gerçekten

$$\forall x \in X \text{ için } S_\rho(f(x),\delta_1) \subseteq f(S_d(x,\varepsilon))$$

gerçeklendiğini anlarız. Demek ki f sürekli fonksiyonu (1) koşulunu gerçeklerse, (2) koşulunu gerçeklemektedir, çünkü (2) koşulunda varlığı aranan δ_ε^* olarak δ_1 'in, alınabileceği kanıtlanmıştır. Kısacası tam bir metrik uzayda tanımlı ve sürekli f fonksiyonu için (1) ve (2) koşulları eşdeğerdir.

Sonuç: X ve Y birer topolojik uzay (bir metrik ile donatılmış olmaları gerekmez) ve g fonksiyonu X uzayından Y uzayına tanımlı olsun. Bilindiği gibi X uzayındaki tüm açık kümelerin g fonksiyonu altındaki görüntü kümeleri Y uzayında birer açık küme ise, ancak bu koşul gerçeklendiğinde g fonksiyonuna **açık bir fonksiyon** denir. $f(x) = x^3$ fonksiyonu (ve genel olarak $p(x) = x^{2n+1}$ biçimindeki özel polinomlar) $\mathbf{R}^1$ uzayından kendisine tanımlanmış (sürekli ve) açık fonksiyondur. Yukarıdaki ana önermede incelediğimiz ve (1) koşulunu gerçekleyen sürekli f fonksiyonu açık bir fonksiyondur. Gerçekten $G \subseteq X$ altkümesi, önermede sözü edilen (X,d) tam metrik uzayında açık ise, $f(G)$ görüntü kümesi (Y,ρ) metrik uzayında açıktır, çünkü herhangi $x \in G$ için $S_d(x,\varepsilon) \subseteq G$ gerçeklenecek biçimde bir pozitif $\varepsilon = \varepsilon_x$ vardır ve bu sayıya karşılık (1) $\equiv$ (2) koşulu nedeniyle $S_\rho(f(x),\delta_\varepsilon) \subseteq f(S_d(x,\varepsilon)) \subseteq f(G)$ gerçeklenir, yani $f(G)$ kümesi her elemanının ρ metriğinde uygun bir açık yuvarını kapsadığı için açık bir küme olur; gerçekten **herhangi** bir metrik uzayda bir A altkümesi her bir $x \in A$ elemanının uygun bir δ_x yarıçaplı açık yuvarını kapsıyorsa, kolayca

$$A = \cup\{S(x,\delta_x) : x \in A\}$$

gerçeklenir (nasıl?) ve bir takım açık yuvarların birleşimi olan A kümesi açık bir küme olur.

İkinci Sonuç

Şimdi yeniden topolojik vektör uzaylarıyla uğraşmaya dönelim. Bu ikinci bölümün ana sonucu Banach 'ın ünlü **Açık Fonksiyon Teoremi** olacaktır hiç kuşkusuz. X, topolojisi bir d metriği tarafından belirlenen bir topolojik vektör uzayı olsun. Bu uzayda herhangi bir $0 < \varepsilon$ için, çabuk biçimde

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} n \cdot S_d(\theta,\varepsilon)$$

geçerli olduğunu gözleyelim; dikkat X uzayındaki sıfır vektörünü, $\mathbf{R}$ ya da $\mathbf{C}$ cisminde 0 işareti ile gösterilen sıfır skalerinden ayırdetmek için θ işareti ile gösteriyoruz. Gerçekten herhangi bir $x \in X$ vektörü alındığında $\{\frac{x}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ vektör dizisi θ vektörüne yakınsadığı için, uygun bir $n_x \in \mathbf{N}$ yardımıyla (her) $n \geq n_x$ için $\frac{x}{n} \in S_d(\theta,\varepsilon)$ ve sonuçta $x \in n \cdot S_d(\theta,\varepsilon)$ geçerli olacaktır. Eğer böyle bir topolojik vektör uzayında, üstelik toplama işlemi düzgün sürekli oluyorsa, bu takdirde bu özel topolojik vektör uzayına **lineer metrik uzay** denir. O halde lineer metrik uzaylarda, $0 < \varepsilon$ verildiğinde, bu pozitif sayıya karşılık gelen öyle bir δ_ε düzgün süreklilik sabiti vardır ki, x ve y vektörleri ne olursa olsun

$$S_d(x,\delta_\varepsilon) + S_d(y,\delta_\varepsilon) \subseteq S_d(x+y,\varepsilon) \qquad (5)$$

gerçeklenir, çünkü (x,y) ikilisinin çarpım uzayında, δ_ε tarafından belirlenen $S_d(x,\delta_\varepsilon) \times S_d(y,\delta_\varepsilon)$ komşuluğunun toplama fonksiyonu altındaki görüntüsü (5) bağıntısında sol yandaki kümeden başka bir şey değildir. Bu son bağıntıda $y = \theta$ alınıp

$$x + S_d(\theta,\delta_\varepsilon) \subseteq S_d(x,\delta_\varepsilon) + S_d(\theta,\delta_\varepsilon)$$

nedeniyle yalın ama çok yararlı

$$x + S_d(\theta,\delta_\varepsilon) \subseteq S_d(x,\varepsilon) \quad (\forall x \in X) \qquad (6)$$

kapsaması ve bu kez de $y = -x$ alınarak

$$S_d(x,\delta_\varepsilon) \subseteq x + S_d(\theta,\delta_\varepsilon) \quad (\forall x \in X) \qquad (6')$$

kapsaması elde edilir.

Bu bölümün önemli bir başka kavramı **seyrek küme** 'dir; bir topolojik uzayda ancak ve yalnız iç $\overline{A} = \emptyset$ gerçekleyen bir A altkümesine seyrek küme denir. $\mathbf{R}^1$ uzayında $\mathbf{Z}$ tamsayılar kümesi ve $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\}$ kümesi tipik seyrek küme örnekleridir, ama bu uzayda sayılabilir elemanlı ve içi boş olup seyrek olmayan kümelere örnek olarak $\{r \in \mathbf{Q} : 0 \leq r \leq 1\}$ verilebilir; bu son kümenin kapanışı $[0,1]$ ve kapanışının içi ise $(0,1)$ aralıklarıdır. Biraz topoloji bilen ilgili okurlara bir not ekleyelim: Seyrek bir kümenin boş olmayan herhangi bir açık alt uzaya ait noktalarının oluşturduğu altküme, bu açık alt uzayda yoğun olmadığı için, seyrek kümelere **hiç bir yerde yoğun olmayan** (nowhere dense) küme de denir. Kapanışı ana kümeye eşit olan kümelere, bilindiği gibi, **yoğun** denir.

Yardımcı Önerme: Bir lineer metrik uzaydan bir tam metrik uzaya tanımlanan örten (üzerine) bir f lineer fonksiyonu için $0 < \varepsilon$ ne olursa olsun $f(S_d(\theta,\varepsilon))$ kümesi seyrek olamaz.

Kanıtlama: Bir X lineer metrik uzayından Y tam metrik uzayına tanımlı olan f örten ve lineer fonksiyonu, örtenlik nedeniyle, $Y = f(X)$ gerçekler ve üstelik f lineer olduğu için sonuçta

$$Y = f(\bigcup_{n=1}^{\infty} n \cdot S_d(\theta, \varepsilon)) = \bigcup n \cdot f(S_d(\theta, \varepsilon))$$

bulunur. Oysa bir tam metrik uzayda boştan farklı herhangi bir yoğun açık kümenin asla sayılabilir sayıda seyrek kümenin birleşimi olarak yazılamadığı sonucunu veren ünlü ve olağanüstü **Baire Teoremi** nedeniyle, $A_n = n \cdot f(S_d(\theta, \varepsilon))$ kümelerinin tümü seyrek olamaz, kısaca uygun bir n_0 doğal sayısı yardımıyla

$$\emptyset \neq \text{iç}\ \overline{A_{n_0}} = \text{iç}(n_0 \cdot \overline{f(S_d(\theta, \varepsilon))})$$
$$= n_0 \cdot (\text{iç}\overline{f(S_d(\theta, \varepsilon))})$$

bulunur, o halde $f(S_d(\theta, \varepsilon))$ kümesinin kapanışının içi boştan farklıdır, kısacası bu görüntü kümesi seyrek değildir.

Burada Baire Teoreminin ifadesini bilen okurlar için açıklayıcı bir iki şey söyleyip olası ikirciklenmelerini gidermenin gerekli olduğunu düşünüyorum. Ünlü Baire Teoremi aslında bir tam metrik uzayda sayılabilir sayıda açık-yoğun kümenin kesişiminin yoğun bir küme olduğunu söyler ve kanıtlar; böylelikle bir tam metrik uzayda, bir A açık kümesinin sayılabilir sayıda S_n seyrek kümesinin birleşimi olarak yazılması durumunda, apaçıktır ki bu küme $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{S_n}$ birleşimi tarafından kapsanacak ve her açık küme içine eşit ve üstelik daima

$$\text{iç}\ B = X \backslash (\overline{X \backslash B})$$

geçerli olduğundan, sonuçta

$$A = \text{iç}\ A \subseteq \text{iç}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{S_n}) = X \backslash \overline{X \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{S_n}}$$
$$= X \backslash \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} X \backslash \overline{S_n}} = \emptyset$$

elde edilecektir, çünkü $X \backslash \overline{S_n}$ kümeleri hem açık hem yoğun oldukları için (neden?) kesişimleri Baire Teoremi nedeniyle yoğun olacaktır. Bu nedenle yardımcı önermedeki nedenleme doğrudur.

Evet, şimdi bu ikinci bölümün ana sonucunu, ünlü Banach Açık Fonksiyon Teoremini görelim.

Olağanüstü Baire Teoremi olağanüstü bir sonuç türetiyor:

Banach Açık Fonksiyon Teoremi: İki tam lineer metrik uzay arasında tanımlı herhangi bir sürekli lineer ve örten fonksiyon açık bir fonksiyondur.

Kanıtlama: Baştan önemli bir uyarı yapalım: "-" işareti tüm kanıtlama boyunca vektörel çıkarma işlemini gösterecektir. Şimdi X ve Y lineer metrik uzayları tam olsun ve $f : X \to Y$ fonksiyonu söylenen nitelikte olsun. Şimdi amacımız öncelikle

$$\theta_Y \in \text{iç}\ \overline{f(S_d(\theta_X, \varepsilon))} \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

göstermek olacaktır. θ 'ların altlarındaki harfler onların hangi lineer metrik uzayın sıfır vektörü olduğunu ayrımsamak içindir. d metriği ile donatılmış X lineer metrik uzayında vektörel çıkarma işlemi sürekli olduğundan, pozitif ε verildiğinde

$$S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon) - S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon) \subseteq S_d(\theta_X, \varepsilon) \qquad (7)$$

gerçeklenecek biçimde, θ_X vektörüne bağlı olarak belirlenen pozitif bir δ_ε vardır ve bu pozitif sayı yardımıyla, yardımcı önerme kullanılarak

$$y_\varepsilon \in \text{iç}\overline{f(S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon))}$$

gerçekleyen bir $y_\varepsilon \in Y$ vektörünün varlığı anlaşılır ve Y uzayında

$$\theta_Y = y_\varepsilon - y_\varepsilon \in (\ \text{iç}\ \overline{f(S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon))}) - y_\varepsilon$$
$$= \text{iç}\ (\overline{f(S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon))} - y_\varepsilon)$$
$$\subseteq \text{iç}\ (\overline{f(S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon))} - \overline{f(S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon))}\ )$$

bulunur. Oysa

$$\overline{f(A_1)} - \overline{f(A_2)} \subseteq \overline{f(A_1) - f(A_2)}$$
$$= \overline{f(A_1 - A_2)}$$

nedeniyle (çünkü son adımdaki eşitliği yazarken f 'nin lineerliği nedeniyle $f(A_1) - f(A_2) = f(A_1 - A_2)$ geçerli olduğu anımsandı), sonuçta (7) kullanılarak, kolayca öncelikli amaç kanıtlanmış olur.

O halde Y lineer metrik uzayının metriği ρ ile gösterilecek olursa, yukardaki ε sayısına karşılık uygun bir pozitif η_ε sayısı yardımıyla

$$S_\rho(\theta_Y, \eta_\varepsilon) \subseteq \overline{f(S_d(\theta_X, \varepsilon))} \tag{8}$$

elde edilir.

Şimdi bu sonuçtan yararlanalım. (6) nedeniyle, $0 < \varepsilon$ verildiğinde uygun bir pozitif δ_ε yardımıyla

$$x + S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon) \subseteq S_d(x, \varepsilon)$$

kullanılırsa ve (8) bağıntısında ε yerine bu son belirlenen δ_ε alınırsa ve yine (8) bağıntısında $\delta_\varepsilon = \delta$ sayısına karşılık belirlenen η_δ yardımıyla

$$f(x) + S_\rho(\theta_Y, \eta_\delta) \subseteq f(x) + \overline{f(S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon))}$$

$$= \overline{f(x) + f(S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon))}$$

$$= \overline{f(x + S_d(\theta_X, \delta_\varepsilon))} \subseteq \overline{f(S_d(x, \varepsilon))}$$

bulunur. Son olarak da (6′) özelliği kullanılırsa, sonuçta uygun bir δ^*_ε pozitif sayısı sayesinde

$$S_\rho(f(x), \delta^*_\varepsilon) \subseteq \overline{f(S_d(x, \varepsilon))} \quad (\forall x \in X)$$

bulunur. O halde sözü edilen f fonksiyonu ana önermedeki (1) koşulunu gerçekler ve dolayısıyla açık bir fonksiyon olur. Bitti!

Baire Teoremi sayesinde yardımcı önermeyi ve onun yardımıyla Banach 'ın bu ünlü sonucunu kanıtlıyoruz, ayrımsıyoruz değil mi? Son adımda kullandığımız "Ana Önermenin" önemini unutmadan elbette!

Üçüncü Sonuç

Bu son kısımda bu yazının yazarının ilginç olduğunu düşündüğü bir gözlemi yer almaktadır. Bu sonucun başkaları tarafından daha önce gözlenip gözlenmediğini bilmiyorum. İyi bilindiği gibi Banach uzayları çok özel ve çok güçlü lineer metrik uzaylardır, üzerlerindeki metrik bir **norm** sayesinde belirlenir. Bir X vektör uzayı üzerinde $|| \, . \, ||$ işareti ile yazılan bir norm tanımlıysa, $d(x,y) = ||x - y||$ biçiminde tanımlanan d uzaklık fonksiyonu bu küme üzerinde bir metriktir ve eğer (X,d) uzayı üstelik tam bir metrik uzay ise X 'e **Banach uzayı** denir. Tamlık koşulu aranmadan bir normla donatılmış vektör uzayına salt **normlu vektör uzayı** denir. Yazıyı çok uzatmamak için, okurun norm konusunda, en azından

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in X \; : \; d(x,y) = ||x - y|| < \varepsilon\}$$

açık yuvarlarının, şu inanılmaz

$$-B(\theta,\varepsilon) = B(\theta,\varepsilon),$$

$$B(x,\varepsilon) = x + B(\theta,\varepsilon)$$

$$\begin{aligned} B(\theta, 2\varepsilon) &= B(\theta,\varepsilon) \mp B(\theta,\varepsilon) \\ &= B(x,\varepsilon) - B(x,\varepsilon) \end{aligned}$$

bağlantıları gerçeklediğini ya bildiğini ya da kolayca gözleyebileceğini varsayıyorum. Dikkat edilirse ikinci ve üçüncü bağıntıdan kolayca

$$B(x, \frac{\varepsilon}{2}) + B(y, \frac{\varepsilon}{2}) = B(x + y, \varepsilon)$$

elde edilir, dolayısıyla her Banach uzayında toplama işlemi düzgün süreklidir başka bir deyişle Banach uzayları birer lineer metrik uzaydır. Buna karşın, tüm karmaşık sayı dizilerinin kümesi $\mathbf{C}^\omega$ 'nın $\mathbf{C}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğunu, bu küme üzerinde, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ve $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ "elemanları" arasındaki uzaklığın

$$d(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

biçiminde tanımlanan **Fréchet metriğinin** bir lineer metrik uzay belirlediğini ve uzayın bir Banach uzayı olmadığı iyi bilinmektedir. Evet, son gözlemimize geçmeden gerekli son tanımı anımsatalım: İki topolojik uzay arasında tanımlı bir fonksiyona, tanımlandığı uzaydaki tüm kapalı kümelerin görüntülerini kapalı yapabiliyorsa, **kapalı fonksiyon** denir. Tüm polinomlar kapalı fonksiyonlardır (ama dereceleri ≥ 2 olanlar lineer olamazlar).

Önerme: Bir X normlu uzayından bir Y Banach uzayına tanımlanan örten ve lineer bir fonksiyon bir kapalı bir fonksiyon ise, açık bir fonksiyondur.

Evet, şaşırtıcı değil mi? Fonksiyonumuz kapalı bir fonksiyon ise, açık bir fonksiyondur, üstelik süreklilik koşulu aranmaksızın, ama yine lineerlik ve örtenlik yeterince güçlü hipotezlerdir. Kanıtlayalım. Gerçekten $f : X \to Y$ lineer örten fonksiyonu kapalı bir fonksiyon ise, $0 < \varepsilon$ verildiğinde $0 < \delta_2 < \frac{1}{2}\,\delta_1 < \delta_1 < \varepsilon$ gerçekleyen pozitif sayılar yardımıyla

$$B(\theta_X, \delta_2) - B(\theta_X, \delta_2) = B(\theta_X, 2\delta_2)$$
$$\subseteq B(\theta_X, \delta_1)$$

gerçekleştiğinden ve üstelik uygun bir $y_0 \in Y$ vektörü ve uygun bir pozitif δ_0 sayesinde

$$B(y_0, \delta_0) \subseteq \overline{f(B(\theta_X, \delta_2))}$$

gerçekleştiğinden (ikinci bölümdeki yardımcı önerme nedeniyle,

$$y_0 \in \text{iç}\ (\overline{f(B(\theta_X, \delta_2))}\ )$$

gerçekleyen vektörün uygun bir açık yuvarı bu kapanış tarafından kapsanır) ve sonuçta Banach Teoreminin kanıtlanmasındaki akıl yürütmelerinin benzerleriyle

$$B(\theta_Y, \delta_0) \subseteq B(\theta_Y, 2\delta_0) = B(y_0, \delta_0) - B(y_0, \delta_0)$$
$$\subseteq \overline{f(B(\theta_X, \delta_2))} - \overline{f(B(\theta_X, \delta_2))}$$
$$\subseteq \overline{f(B(\theta_X, \delta_1))} \subseteq f(\overline{B(\theta_X, \delta_1)}) \subseteq f(B(\theta_X, \varepsilon))$$

bulunur. Gerçekten son iki adıma geçerken şunlara dikkat edildi. f kapalı bir fonksiyon olduğu için ve özellikle kapanış kümelerinin (ki kapalıdırlar) görüntüleri kapalı olacağından, $f(A) \subseteq f(\overline{A})$ kapsaması apaçıktır ki

$$\overline{f(A)} \subseteq \overline{f(\overline{A})} = f(\overline{A})$$

verecektir ve üstelik $\delta_1 < \varepsilon$ seçimi nedeniyle

$$\overline{B(\theta_X, \delta_1)} = \{x \in X : \|x\| \leq \delta_1\} \subseteq B(\theta_X, \varepsilon)$$

geçerlidir. O halde her iki yana $f(x)$ vektörünü ekleyerek ve f lineer olduğu için

$$B(f(x), \delta_0) = B(\theta_Y, \delta_0) + f(x)$$
$$\subseteq f(B(\theta_X, \varepsilon)) + f(x) = f(B(x, \varepsilon))$$

elde edilir. Bu son sonuç f fonksiyonunun, birinci bölümün sonunda yer alan Sonuçtaki akıl yürütmeler nedeniyle açık bir fonksiyon olduğunu söylemektedir.

—o—

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.
* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
* Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.
* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
* Matematik Dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile ya da PC 'de Latex programı yardımıyla, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üstüste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

Matematik Dünyası

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,

07058-Antalya

adresine gönderilecektir.
