ÜÇ ÇEMBER TEOREMİ

Mehmet Bumin Yenmez
İzmir Özel Yamanlar Lisesi, İZMİR

Üç çember teoreminin ispatında kullanılacak olan, "bir noktanın bir çembere göre kuvveti" ve "iki çemberin kuvvet ekseni" ile ilgili şu bilgilerimizi hatırlayalım:

1. $(0, R)$ bir çember, P bir nokta, P 'den geçip çemberi iki noktadan kesen farklı iki doğrudan ayrılmış kirişler $[AB]$, $[CD]$ ve P 'den çembere çizilen teğetin değme noktası T ile gösterilmek üzere,

(a) $|PA|.|PB| = |PT|^2$ (P, çemberin dışında)

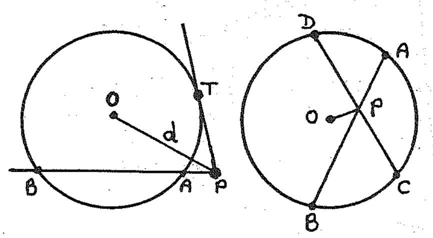
(b) $|PA|.|PB| = |PC|.|PD|$ (P, çemberin içinde)

$|OP| = d$ denirse,

(a') $|PA|.|PB| = d^2 - R^2$

(b') $|PA|.|PB| = R^2 - d^2$

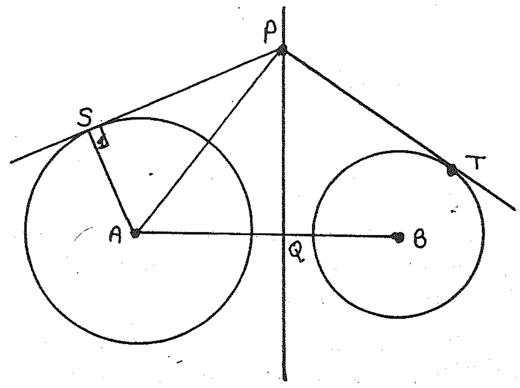
olur.



2. Düzlemde verilen iki çembere göre kuvvetleri eşit olan noktaların üzerinde bulundukları doğruya, bu iki çemberin kuvvet ekseni denir.

Teorem 1. Düzlemde (merkezleri farklı) iki çembere, eşit uzunluktaki teğetlerin çizilebildiği noktalar (kümesi), bir doğru üzerinde bulunur. (Çemberler kesişiyorsa, bu doğru ortak kirişi taşıyan doğru; çemberler birbirinin dışında ise, bu doğru bu iki çemberin merkezler doğrusuna dik olan bir doğrudur.)

İspat.



Bir P noktasından (A, R_1) ve (B, R_2) çemberlerine çizilen eşit uzunluklu iki teğet

$$[PS] \quad \text{ve} \quad [PT]$$

olsun. $|PS| = |PT|$,

$$|PS|^2 = |PA|^2 - R_1^2 \quad (1)$$

P noktasından geçerek $[AB]$ 'na dik olan d doğrusu ile $[AB]$ 'nın kesişim noktası Q olmak üzere

$$|PA|^2 = |PQ|^2 + |QA|^2 \quad (2)$$

dir. (1) ve (2) 'den,

$$|PS|^2 = |PQ|^2 + |QA|^2 - R_1^2 \quad (3)$$

benzer biçimde,

$$|PT|^2 = |PQ|^2 + |QB|^2 - R_2^2 \quad (4)$$

bulunur. $|PS| = |PT|$ ile (3) ve (4) 'ten,

$$|AQ|^2 - |BQ|^2 = R_1^2 - R_2^2 \quad (5)$$

elde edilir. $[AB]$ doğru parçasının orta noktası C ile gösterildiğinde,

$$|AQ| - |BQ| = |AC| + |CQ| - |CB| + |CQ| = 2|CQ|$$

bulunur.

$|AQ| + |QB| = |AB|$ olduğundan,

$$2|CQ|.|AB| = R_1^2 - R_2^2$$

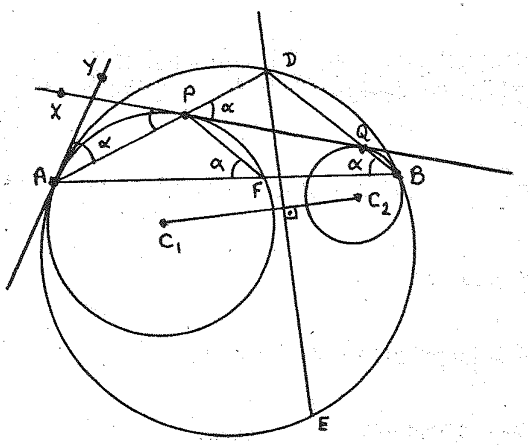
ve

$$|CQ| = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2|AB|}$$

($|AB| \neq 0$ için) elde edilir ki, bu, P 'nin d doğrusu üzerindeki yerinden bağımsız olarak $|CQ|$ 'nın sabit olması demektir.

O halde, P noktasının geometrik yeri bu biçimde belirlenmiş Q noktasında AB doğrusuna dik olan doğrudur.

Teorem 2. (Üç Çember Teoremi) Bir C çemberine içten teğet olan C_1 ve C_2 çemberlerinin değme noktaları A, B; kuvvet ekseninin C çemberiyle keşişim noktaları D, E; $[DA]$ 'nın C_1 çemberiyle ve $[DB]$ 'nın C_2 çemberiyle kesişim noktaları P ve Q ile gösterilmek üzere, PQ doğrusu C_1 ve C_2 çemberlerinin ortak teğetidir.



İspat.

D noktası, kuvvet ekseni üzerinde olduğundan,

$$|DP||DA| = |DQ||DB|$$

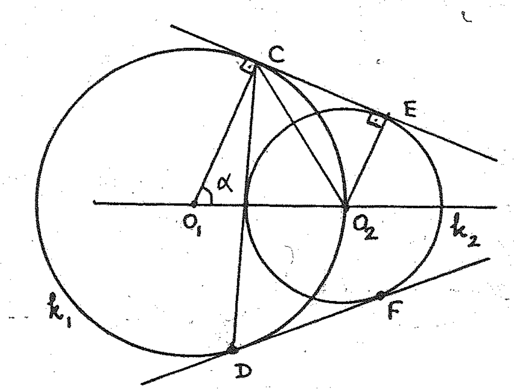
'dir. Buradan,

$$\frac{|DP|}{|DQ|} = \frac{|DB|}{|DA|} .$$

$\widehat{PDQ}$, $\overset{\triangle}{PDQ}$ ve $\overset{\triangle}{BDA}$ üçgenlerinde ortak olduğundan $\overset{\triangle}{PDQ} \sim \overset{\triangle}{BDA}$ (A.A) olup, $D\widehat{B}A = D\widehat{P}Q = \alpha$ 'dır. AB doğrusunun C_1 çemberi ile ikinci kesişim noktası F ve A 'daki teğet AY olsun, $\alpha = D\widehat{B}A = Y\widehat{A}D = P\widehat{F}A$ ve $D\widehat{P}Q = X\widehat{P}A = \alpha$ olur. $X\widehat{P}A = P\widehat{F}A \Rightarrow XP$ doğrusu C_1 çemberine teğettir. Benzer biçimde XP doğrusunun C_2 çemberine teğet olduğu gösterilir. O halde PQ doğrusu C_1 ve C_2 çemberlerine teğettir.

Bu teoremin uygulanabileceği bir çok problem kurulabilir.

1. Örnek. (1999 Uluslararası Matematik Olimpiyadı, 5. soru) Bir k çemberi ile bu çembere sırasıyla M ve N noktalarında içten teğet olan k_1 ve k_2 çemberleri, k_1 çemberi k_2 çemberinin merkezinden geçmek üzere veriliyor. k_1 ile k_2 'nin kuvvet ekseninin k çemberi ile kesişim noktaları A ve B, MA ile MB doğrularının k ile kesişim noktaları C ve D ile gösteriliyor. CD doğrusunun k_2 çemberine teğet olduğunu gösteriniz.



Çözüm. NA ve NB doğruları k_2 çemberini E ve F noktalarında kessin, üç çember teoremi gereğince CE ve DF bu çemberlerin ortak teğetleridir. CD doğrusu O_1O_2 doğrusu ile H noktasında kesişsin. CD değme kirişi olduğundan O_1O_2 doğrusuna diktir: $CD \perp O_1O_2$.

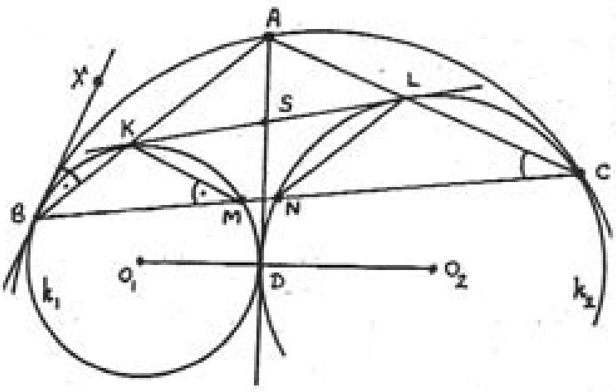
$C\widehat{O_1}O_2 = \alpha$ olmak üzere, $C\widehat{O_2}O_1 = O_1\widehat{C}O_2 =$

$90^0 - \frac{\alpha}{2}$ ve $E\hat{C}O_2 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow C\hat{O_2}E = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ 'dir.

$$C\overset{\triangle}{O_2}E \cong C\overset{\triangle}{O_2}H \Rightarrow O_2E = O_2H \ .$$

O halde CD doğrusu k_2 çemberine teğettir.

2. Örnek. (1997 Balkan Matematik Olimpiyadı, 3. soru). Birbirine bir D noktasında dıştan ve bir t çemberine de sırasıyla B ve C noktalarında içten teğet olan k_1, k_2 çemberleri veriliyor. k_1 ile k_2 'nin kuvvet ekseninin t çemberi ile kesişim noktalarından biri A; AB ve AC 'nin k_1 ve k_2 çemberleriyle kesişim noktaları sırasıyla K ve L; BC doğrusuyla k_1 ve k_2 'nin kesişim noktaları da, sırasıyla M ve N ile gösterilmek üzere; AD, KM ve LN doğrularının aynı noktadan geçtiğini ispatlayınız.



Çözüm. Üç Çember Teoremine göre, KL, k_1 ve k_2 'nin ortak teğetidir. AD ile KL 'nin kesişim noktası S, B 'deki teğet BX ile gösterilmek üzere,

$$A\hat{C}B = A\hat{B}X = K\hat{M}B \Rightarrow KM \ // \ AL \ ,$$

benzer biçimde, $AK \ // \ LN$.

KM ile LN doğrularının kesişim noktası R ile gösterilmek üzere $AKRL$ bir paralelkenardır. Bu paralelkenarda S, köşegenlerin kesişim noktası olduğundan $KS = SR = SL \Rightarrow R, AD$ üzerindedir.

Yazımı, "Üç Çember Teoremi" yardımıyla kolayca çözeceğinizi umduğum, şu soru ile bitiriyorum:

Soru. (1992 Uluslararası Matematik Olimpiyadı, öneri): C_1 ve C_2 çemberleri, birbirine E noktasında dıştan; bir S çemberine de içten teğettir. E 'den geçen teğetin S çemberiyle kesişim noktaları A ve D, C_1 ve C_2 'nin D 'ye yakın ortak teğetinin yine S çemberiyle kesişim noktaları B ve C olmak üzere, E noktasının ABC üçgenine ait iç teğet çemberin merkezi olduğunu ispatlayınız.
