BİR MATEMATİKSEVERİN ÜÇ GEOMETRİ PROBLEMİ

Cem Tezer
ODTÜ, Matematik Bölümü,
06531-ANKARA

Bu kısa yazıda, tıp, edebiyat ve fikir hayatımıza hizmet vermiş ve bugün sıhhi sebeplerden dolayı verimli çalışması mümkün olmayan Dr. Cemil Uğurlu'yu tanıtmak istiyorum.

Dr. M. Cemil Uğurlu, 1926 yılında doğmuş, tıp tahsilini müteakip fizik tedavi sahasında ihtisas yapmıştır. Fizik tedavi, histoloji ve deontoloji dallarında yürüttüğü çalışmaların yanısıra gazete ve dergilerde yayınlanan muhtelif fikir ve inceleme yazıları kaleme almıştır. Bir şiir kitabı basılmıştır.

Bir kaç ay önce bir konuşma yapmak maksadıyla Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi'nde bulunduğum sırada, meslektaşım Prof. Dr. Öner Çakar bana perişan evrak halinde bazı metinler vererek incelememi rica etti. Bunlar, hayranlıkla bağlı olduğu M. K. Atatürk hakkındaki yazılarından ismen tanıdığım Dr. M. Cemil Uğurlu tarafından 1946 yılında, yani liseyi henüz bitirdiği bir çağda tanzim edilmiş ve kısmen çözülmüş dört geometri problemini ihtiva etmekteydi. Bu çalışma, nasıl bakılırsa bakılsın olağanın çok dışında bir istidadın deliliydi. Yayınlamak için Dr. Uğurlu 'dan izin aldım. Bu problemlerden üçünü aşağıda sunuyorum.

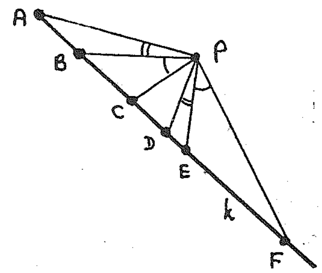
Bu yazıyı yazmaktan maksadım okuyuculara ilginç bir kaç geometri problemini sunmak, bir o kadar da, ne yazık ki değerlendirilememiş bir kabiliyetin hazin hikayesini anlatmaktır.

PROBLEM 1

Bir k doğrusu ve k üzerinde bulunmayan bir P noktası verilsin. k üzerinde alınan birbirinden farklı A, B, C, D, E, F noktaları $A\hat{P}D = B\hat{P}E = C\hat{P}F = 90°$ şartını sağlıyorsa,

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA} = -1$$

olduğunu gösteriniz.



Çözüm: P noktası, k doğrusu ve k üzerindeki noktalar şekilde görüldüğü konumlarda (*Şekil 1*) alınırsa elde edilecek olan

$$(A\hat{P}B) = (D\hat{P}E)$$

$$(B\hat{P}C) = (E\hat{P}F)$$

$$(A\hat{P}F) + (C\hat{P}D) = 180°$$

bağıntıları muvacehesinde,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{|PA|\cdot|PB|\cdot\sin(A\hat{P}B)}{|PB|\cdot|PC|\cdot\sin(B\hat{P}C)}$$

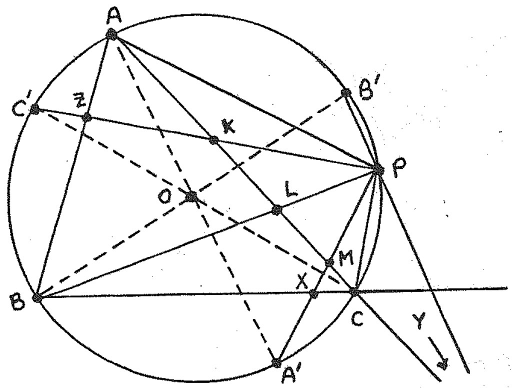
$$\frac{CD}{DE} = \frac{|PC|\cdot|PD|\cdot\sin(C\hat{P}D)}{|PD|\cdot|PE|\cdot\sin(D\hat{P}E)}$$

$$\frac{EF}{FA} = \frac{|PE|\cdot|PF|\cdot\sin(E\hat{P}F)}{|PF|\cdot|PA|\cdot\sin(F\hat{P}A)}$$

eşitliklerinin taraf tarafa çarpılmasıyla istenilen netice elde edilir.

PROBLEM 2

ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde bir P noktası alınsın. PA, PB, PC doğrularına P 'den çizilen dikmeler BC, CA, AB doğrularını sırasıyla X, Y, Z noktalarında kessin. X, Y ve Z 'nin çevrel çember merkezinden geçen bir doğru üzerinde kaldığını gösteriniz.



Çözüm: ABC çemberinin çevrel çember merkezini O ile gösterelim. $[A, A']$, $[B, B']$, $[C, C']$ çap olacak şekilde çevrel çember üzerinde A', B', C' noktaları alalım (*Şekil 2*). Tabii ki, X, Y, Z noktaları PA', PB', PC' 'nün sırasıyla BC, CA, AB 'yi kestiği noktalar olacaktır. PC', PB PA' 'nün AC 'yi kestikleri noktaları sırasıyla K, L, M ile gösterelim.
Menelaus Teoremini ABL üçgeni ve KZ kesenine uygulayarak

$$\frac{ZA}{ZB} \cdot \frac{PB}{PL} \cdot \frac{KL}{KA} = 1 \quad ,$$

BLC üçgeni ve MX kesenine uygulayarak da

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{MC}{ML} \cdot \frac{PL}{PB} = 1$$

bulunur. Bu denklemlerin Problem 1 'den elde edilecek olan

$$\frac{AK}{KL} \cdot \frac{LM}{MC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1$$

denklemiyle taraf tarafa çarpılmasıyla

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1$$

bulunur. Bu da Menelaus Teoremi vasıtasıyla X, Y ve Z 'nin doğrudaş olduğunu gösterir.
X, Y, ve Z 'nin üzerinde bulunduğu doğrunun O 'dan geçtiğinin ispatı Dr. Uğurlu'nun notları arasında yok. Benim çözümüm projektif geometri yöntemlerine dayanıyor:

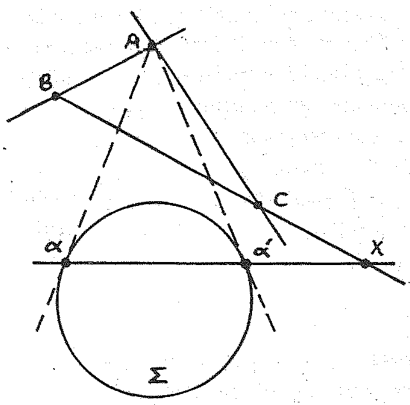
P 'nin çevrel çember üzerinde hareket ettiği farz olunarak X ve Z 'nin sırasıyla BC ve BA doğruları üzerinde projektif bir münasebet içinde oldukları görülür. X 'in B ile çakışması halinde Z de B ile çakışacağından, XZ sabit bir noktadan geçmelidir. X 'in C ile çakışması halinde XZ de CC' ile çakışır. Diğer tarafdan, X 'in AA' ile BC 'nin kesişim noktasıyla çakışması halinde de XZ doğrusu AA' ile çakışır. Demek ki aranılan sabit nokta, AA' ile CC' 'nün kesişim noktası yani O olmalıdır.

PROBLEM 3

Bir Σ çemberi ve köşeleri Σ 'nın dışında kalan bir ABC üçgeni alınsın. A, B, C 'den Σ 'ya çizilen teğetlerin değme noktaları sırasıyla α ve α', β ve β', γ ve γ' olsun. BC ve $\alpha\alpha'$, CA ve $\beta\beta'$, AB ve $\gamma\gamma'$ doğruları sırasıyla X, Y, Z noktalarında kesişsin.

(1) X, Y ve Z noktalarının bir doğru üzerinde kaldığını gösteriniz.

(2) $\beta\gamma'$ ve $\beta'\gamma$ doğrularının BC üzerinde kesiştiğini gösteriniz.



Çözüm:
Bu problemin çözümü de Dr. Uğurlu'nun notları arasında bulunamadı. Aslında Σ çemberi yerine herhangi bir koni kesiti (elips, hiperbol, parabol) alınabileceği gibi A, B, C noktalarının Σ 'ya göre konumları da oldukça serbestçe seçilebilir (*Şekil 3*). Aslında $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ doğruları sırasıyla A, B, C 'nin Σ 'ya göre kutupluk doğruları ("polar line", "polaire", "Polare", "kutbiyye") olarak

tarif edilmelidir. Böylece, Σ verildiğinde, problemin manalı olabilmesi için A, B ve C noktalarının kutupluk doğrularının sırasıyla BC, CA ve AB doğrularından farklı olmaları kafidir. (Paralel olmaları halinde kesişme noktalarını "sonsuzda" addetmek yetecektir.) Bu şekilde olgunlaştırdıktan sonra problemi homojen koordinatlar yardımıyla çözebiliriz:

(1) Her nokta sıfırdan farklı 3×1 bir matrisle, yani bir sütun vektörle, gene her doğru 1×3 bir matrisle, yani bir satır vektörle gösterilecektir. Transpozisyon işlemi üst olarak yazılan bir T harfiyle belirtildiği takdirde Σ 'nın denklemi $P^T \Omega P = 0$ şeklinde olacaktır. Burada

$$\Omega = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

bakışık bir matris olup, determinantı sıfırdan farklıdır. Kolaylık olması için

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yazmak suretiyle BC, CA, AB doğrularının da sırasıyla

$$[1,0,0]\ ,\ [0,1,0]\ ,\ [0,0,1]$$

olduğu görülür. Bu şartlar altında A, B, C 'nin kutupluk doğruları, yani $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ doğruları

$$A^T\Omega = [a_{11}, a_{12}, a_{13}]\ ,\ B^T\Omega = [a_{21}, a_{22}, a_{23}]\ ,$$

$$C^T\Omega = [a_{31}, a_{32}, a_{33}]$$

olarak verilecektir. $BC \neq \alpha\alpha'$, $CA \neq \beta\beta'$, $AB \neq \gamma\gamma'$ olduğundan, $(a_{12}, a_{13}) \neq (0,0)$, $(a_{21}, a_{23}) \neq (0,0)$, $(a_{31}, a_{32}) \neq (0,0)$ dir. Bu yüzden, BC ve $\alpha\alpha'$ 'nün kesiştiği nokta olarak

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{13} \\ a_{12} \end{bmatrix}$$

benzer şekilde de

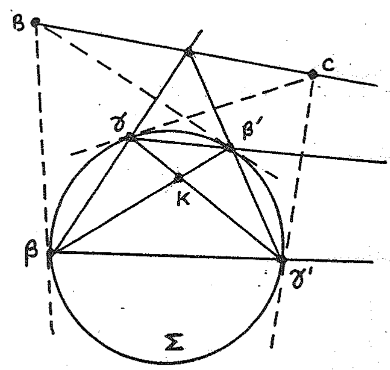
$$Y = \begin{bmatrix} a_{23} \\ 0 \\ -a_{22} \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} a_{33} \\ -a_{31} \\ 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Nihayet

$$det[X,Y,Z] = det \begin{bmatrix} 0 & a_{23} & a_{33} \\ -a_{13} & 0 & -a_{31} \\ a_{12} & -a_{22} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= a_{13}(a_{21}a_{32}) + a_{12}(-a_{23}a_{31}) = 0$$

bulunarak X, Y, Z 'nin doğrudaş olduğu görülür.



(2) K noktası $\beta\beta'$ ve $\gamma\gamma'$ doğrularının kesişim noktası olsun. Böylece K noktasının kutupluk doğrusu BC 'dir (*Şekil 4*). Projektif geometrinin temel teoremlerinden birisi neticesinde, bir taraftan $\beta\gamma'$ ve $\beta'\gamma$ diğer tarafdan da $\beta\gamma$ ve $\beta'\gamma'$ doğru çiftleri BC üzerinde kesişmelidirler.

Yukardaki problemlerin bazı kısımlarını ancak projektif geometri yöntemleri kullanarak çözebildiğim için mütessirim. Okuyucuların daha sade çözümler arayarak eğleneceklerini ümid ederim.

NOT: Birinci problem, dergimizin Nisan 1998, 7. Cilt, 2. Sayısının 29.sayfasında yayınlanmıştı. Yazının bütünlüğünün korunması düşüncesiyle, aynen yayınlıyoruz. **Matematik Dünyası**
