BEŞİNCİ ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI BİRİNCİ SEÇME SINAVI

Halil İ. Karakaş-İlham Aliyev-
Fikri Gökdal-Doğan Çoker
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-Antalya

Matematik Dünyası 'nın 9. cilt, 2. sayısında, Beşinci Antalya Matematik Olimpiyadı Birinci Seçme Sınavının soruları ve cevap anahtarları yayınlanmıştı. Bu sayımızda, söz konusu sınav sorularının kısa çözümlerini veriyoruz. Sorular her iki kategoride de A grubundaki sıralanışlarına göre ele alınacaktır.

Lise I, Soru 1. $(x_1 + x_2 + \cdots + x_{19} + x_{20})^3$ ifadesinin açılımında, benzer terimler toplandıktan sonra ortaya çıkan ifade kaç terimlidir? (Örnek: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ifadesi dört terimlidir.)

A) 1550 B) 1540 C) 1570 D) 400 E) 8000

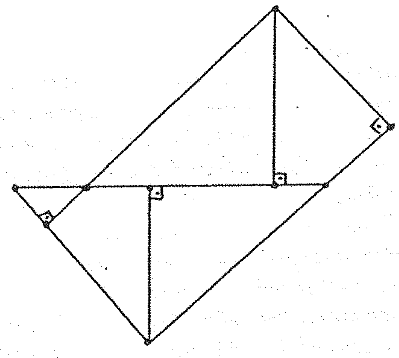
Yanıt. Verilen ifade açılıp benzer terimler (bir araya) toplandıktan sonra, x_i^3, $(1 \le i \le n)$, biçiminde 20 tane, $x_i^2x_j$, $(1 \le i,j \le n)$, $i \ne j$, biçiminde $19.20 = 380$ tane, $x_ix_jx_k$, $(1 \le i,j,k \le n$; i,j,k farklı), biçiminde $\binom{20}{3} = 1140$ tane terim ortaya çıkar. Dolayısıyla, söz konusu ifade, $20 + 380 + 1140 = 1540$ terimlidir. Doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise I, Soru 2. Bir f fonksiyonu her a ve b reel sayıları için $f(a+b) = f(ab)$ ve $f(1999) = 1999$ koşullarını sağlamaktadır. Buna göre, $f(2000)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1999 B) 2000 C) 1000 D) 999 E) hiç biri

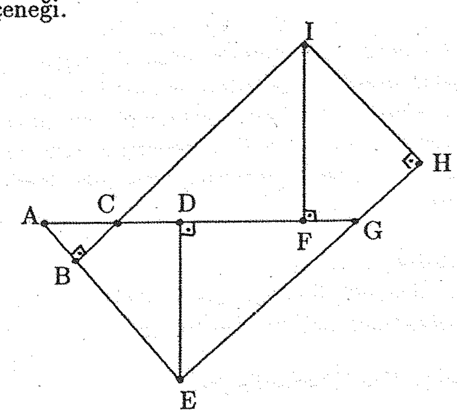
Yanıt. $b = 0$ alınırsa, her a reel sayısı için $f(a) = f(0)$ elde edilir. Bu nedenle, $f(0) = f(2000) = f(1999) = 1999$; doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise I, Soru 3. Aşağıdaki şekilde işaretlenmiş noktaların en az dördünden geçen kaç çember vardır?



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) en az 4

Yanıt. İşaretlenmiş noktalar aşağıdaki gibi isimlendirilirse, şu dörtlülerin her biri çemberseldir: $ABFI$, $BCDE$, $BIHE$, $FIHG$. Doğru yanıt, E seçeneği.



Lise I, Soru 4. 5, 10, 15, ..., 995, 1000 aritmetik dizisinin tüm terimlerinin çarpımı olan sayının sondan kaç basamağında sıfır bulunur?

A) 200 B) 199 C) 198 D) 197 E) 196

Yanıt. Tüm terimlerin çarpımı,

$$n = (5.1).(5.2).(5.3).\cdots.(5.200) = 5^{200}(200!)\ ,$$

$$200! = 2^k.A;$$

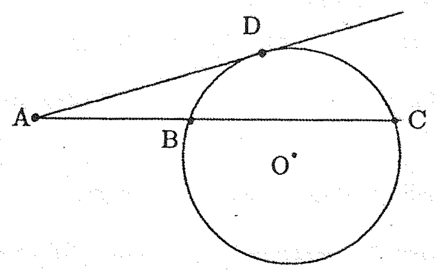
$$k \nmid A \Leftrightarrow k = [\tfrac{200}{2}] + [\tfrac{200}{4}] + [\tfrac{200}{8}] + [\tfrac{200}{16}] + [\tfrac{200}{32}] + [\tfrac{200}{64}] + [\tfrac{200}{128}]$$

$$= 100 + 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 197\ .$$

Böylece, $n = 10^{197}.5^3.A$, $k \nmid A$ $5^3.A$; n'nin sondan 197 basamağında sıfır vardır. Doğru yanıt, D seçeneğidir.

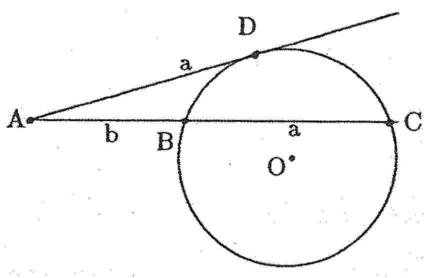
Lise I, Soru 5. Şekilde, O merkezli çemberin D

noktasındaki teğeti ile $[BC]$ kirişinin uzantısının kesişim noktası A 'dır. $|AD| = |BC| = a$ ve $|AB| = b$ ise, $(2b+a)^2$ 'nin a cinsinden değeri nedir?



A) a^2 B) $4a^2$ C) $5a^2$ D) $9a^2$ E) $3a^2$

Yanıt. Kuvvet kuralından, $a^2 = b(a+b) = ba + b^2$, böylece, $(2b+a)^2 = 4b^2+4ab+a^2 = 4(b^2+ab)+a^2 = 4a^2+a^2 = 5a^2$. Doğru yanıt, C seçeneğidir.



Lise I, Soru 6. 318 sayfalık bir kitabın tüm sayfalarındaki sayfa numaraları kesiliyor; sonra her sayfa numarasının bulunduğu parça, her bir parçada bir rakam bulunacak şekilde kesilerek küçük parçalara ayrılıp, bu küçük parçalar bir torbaya dolduruluyor ve torbadan rasgele bir parça çekiliyor. Çekilen parçadaki rakamın 1 olma olasılığı nedir?

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{11}{98}$ C) $\frac{19}{94}$ D) $\frac{23}{92}$ E) $\frac{1}{3}$

Yanıt. Kitabın tüm sayfalarındaki sayfa numaralarındaki rakamların sayısı; birler basamağındakiler 318, onlar basamağındakiler $318 - 9 = 309$ ve yüzler basamağındakiler $318 - 99 = 219$ olmak üzere toplam 846 tanedir. Bu rakamlar arasında 1 'lerin sayısı, birler basamağında 32, onlar basamağında 39 ve yüzler basamağında 100 olmak üzere, toplam 171 tanedir. Böylece, çekilen rakamın 1 olma olasılığı $\frac{171}{846} = \frac{19}{94}$, doğru yanıt, C seçeneğidir.

Lise I, Soru 7. Saf asitle dolu olan 54 litrelik bir kaptan bir miktar asit alınıp yerine aynı miktarda su konuyor. Sonra, bu kaptaki karışımdan, ilk alınan miktarda karışım alınıp, yerine su konuyor. Bu işlem tamamlandıktan sonra, kaptaki karışımın 24 litresi saf asit olduğuna göre, birinci defada kaptan kaç litre asit alınmıştır?

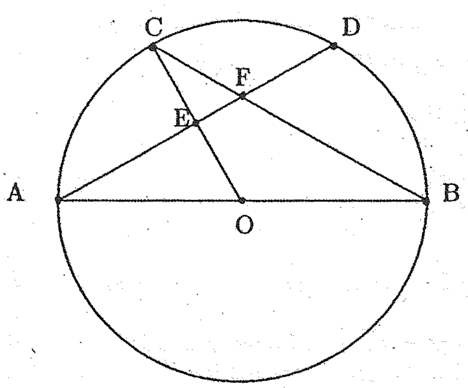
A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

Yanıt. İlk alınan asit miktarı x litre olsun. Bu takdirde,

$$(54-x) - x.\frac{54-x}{54} = 24$$

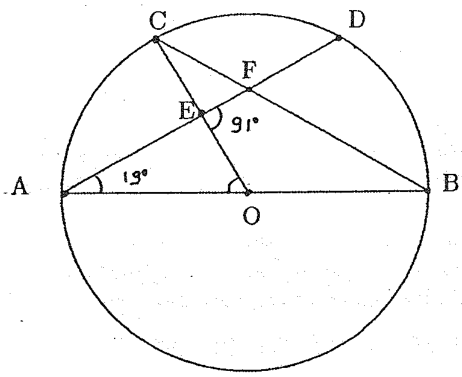
olur. Yukarıdaki ifade sadeleştirilip x 'in azalan kuvvetlerine göre dizilirse, $x^2 - 108x + 1620 = 0$; bu denklemin çözümünden, $x = 18$ veya $x = 90$ olması gerektiği görülür. $x \leq 54$ olduğundan, doğru yanıt, D seçeneğidir.

Lise I, Soru 8. Şekilde, merkezi O ve çapı $[AB]$ olan çember üzerinde C ve D noktaları işaretlenmiş olup, AD ile OC 'nin kesişim noktası E, ve AD ile BC 'nin kesişim noktası F 'dir. $m(E\hat{A}B) = 19^\circ$, $m(F\hat{E}O) = 91^\circ$ ise, $m(B\hat{F}D)$ kaç derecedir?



A) 50 B) 55 C) 60 D) 63 E) 65

Yanıt.



Verilenlerden, $m(\widehat{EOA}) = 72^o$ ve $m(\widehat{CBA}) = 36^o$ 'dir. Dolayısıyla, $m(\widehat{BFD}) = 55^o$; doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise I, Soru 9. Her n pozitif tamsayısı için n 'nin en büyük asal çarpanını $A(n)$ ile gösterelim. $a_1 = 68$ ve her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n + A(a_n)$ ile tanımlanan $\{a_n\}$ dizisinin 19-uncu terimi kaçtır?

A) 340 B) 371 C) 361 D) 350 E) 380

Yanıt. Dizinin tanımından,

$$\begin{aligned}
a_1 &= 68 = 4.17, \quad A(a_1) = 17;\\
a_2 &= a_1 + 17 = 5.17, \quad A(a_2) = 17;\\
a_3 &= a_2 + 17 = 6.17, \quad A(a_3) = 17;\\
&\vdots\\
a_{15} &= a_{14} + 17 = 18.17, \quad A(a_{15}) = 17;\\
a_{16} &= a_{15} + 17 = 19.17, \quad A(a_{16}) = 19;\\
a_{17} &= a_{16} + 19 = 18.19, \quad A(a_{17}) = 19;\\
a_{18} &= a_{17} + 19 = 19.19, \quad A(a_{18}) = 19;\\
a_{19} &= a_{18} + 19 = 20.19 = 380.
\end{aligned}$$

Doğru yanıt, E seçeneğidir.

Lise I, Soru 10. $p^3 + p^2 + 11p + 2$ ifadesinin asal sayı olmasını sağlayan kaç tane p asal sayısı vardır?

A) 1 B) 2 C) 11 D) sonsuz E) hiç biri

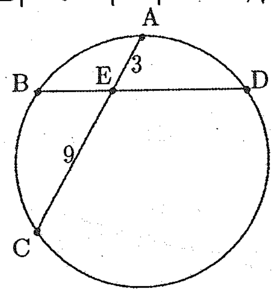
Yanıt. $p^3 + p^2 + 11p + 2$ ifadesi $p = 3$ için $3^3 + 3^2 + 11.3 + 2 = 71$ asaldır. $p \neq 3$ için $p = 3k \mp 1$, $k \geq 1$ biçiminde olur. $p = 3k + 1$ ise, $p^3 + p^2 + 11p + 2 \equiv 1 + 1 + 2 + 2 \equiv 0 \ (mod\ 3)$; $p = 3k - 1$ ise, $p^3 + p^2 + 11p + 2 \equiv -1 + 1 - 2 + 2 \equiv 0 \ (mod\ 3)$ olacağından, $p^3 + p^2 + 11p + 2$ asal olamaz. Doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise I, Soru 11. İçinde 13 kırmızı ve 8 mavi top bulunan bir torbadan rasgele bir miktar top çekiliyor. Çekilen topların en az 6 'sının kırmızı ve en az 4 'ünün mavi olmasını garanti etmek için en az kaç top çekilmelidir?

A) 10 B) 19 C) 17 D) 15 E) 12

Yanıt. En kötü durum, çekilen toplardan ilk 13 tanesinin kırmızı olmasıdır. 4 tane mavi top çekilmesini garanti etmek için en az $13 + 4 = 17$ top çekilmelidir. Doğru yanıt, C seçeneğidir.

Lise I, Soru 12. Şekilde E, çemberin $[BD]$ ve $[CA]$ kirişlerinin kesişim noktası olup, $|BA| = |AD|$ 'dir. $|AE| = 3$ ve $|EC| = 9$ ise, $|AD|$ kaçtır?

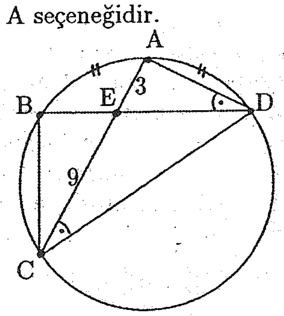


A) 6 B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) $3\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

Yanıt. Şekilde, $\overset{\triangle}{ADE} \sim \overset{\triangle}{ACD}$;

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AE|}{|AD|} \Rightarrow |AD|^2 = |AE||AC| = 3.12 = 36 .$$

Doğru yanıt, A seçeneğidir.



Lise I, Soru 13. m ve n sayıları 2000 sayısının pozitif bölenleri olmak üzere, (m, n) ikililerini düşününüz. Bu ikililerden kaç tanesi için n sayısı m 'yi tam böler?

A) 200 B) 150 C) 100 D) 60 E) 35

Yanıt.

$$2000 = 2^4.5^3; m = 2^a.5^b, n = 2^c.5^d.$$

$$n \mid m \Leftrightarrow 4 \geq a \geq c \geq 0 \text{ ve } 3 \geq b \geq d \geq 0.$$

Bu koşulları sağlayan tam 15 tane (a, c) ikilisi ve tam 10 tane (b, d) ikilisi vardır. Dolayısıyla, $n \mid m$ olan (n, m) ikililerinin sayısı $15.10 = 150$; doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise I, Soru 14. Hiç bir basamağında sıfır bulunmayan üç basamaklı tam sayılar içinde, basamaklarından biri diğer iki basamağının toplamına eşit olan kaç sayı vardır?

A) 66 B) 75 C) 87 D) 96 E) 108

Yanıt. $\overline{abc}$ üç basamaklı sayısı problemdeki koşulları sağlasın. Aşağıdaki 3 durumdan biri geçerli olacaktır:

(1) $1 \leq a, \quad b \leq 8, a + b = c$

(2) $1 \leq a, \quad c \leq 8, a + c = b$

(3) $1 \leq b, \quad c \leq 8, b + c = a$

Birinci durumda, $2 \leq c \leq 9$ olacak ve her $c = 2, \cdots, 9$ için $\overline{abc}$ 'lerin sayısı $c - 1$; dolayısıyla, tüm $\overline{abc}$ 'lerin sayısı

$$\sum_{c=2}^{9}(c-1) = \sum_{c=1}^{8} c = \frac{8.9}{2} = 36$$

'dır. Diğer iki durumdan elde edilecek $\overline{abc}$ 'lerin sayısı da aynı olacağından, $\overline{abc}$ 'lerin toplam sayısı $3.36 = 108$ 'dir. Doğru yanıt, E seçeneğidir.

Lise I, Soru 15. 369 sayısı bir kaç ardışık doğal sayının toplamı olarak kaç farklı biçimde yazılabilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

Yanıt. $n \geq 2$ olmak üzere,

$$(k+1) + (k+2) + \cdots + (k+n) = 369$$

olması için gerek ve yeter koşul ,

$$\frac{(2k+n+1)n}{2} = 369 = 3^2.41$$

$$\Leftrightarrow (2k+n+1).n = 2.3^2.41$$

'dir. Bu koşul, n 'nin sadece ve sadece aşağıdaki değerleri için sağlanır: $2, 3, 6, 9, 18$. Doğru yanıt, D seçeneğidir.

Lise I, Soru 16. $x = 11^2 - 12^2 + 13^2 - 14^2 + 15^2 - \cdots - 110^2 + 111^2$ ise, x aşağıdakilerden hangisidir?

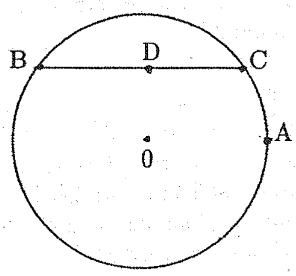
A) 6271 B) 6241 C) 6251 D) 6231 E) 6261

Yanıt.

$$\begin{aligned} x &= 11^2 - 12^2 + 13^2 - 14^2 + 15^2 - \ldots - 110^2 + 111^2 \\ &= 11^2 + (-12^2 + 13^2) + \ldots + (-110^2 + 111^2) \\ &= 11^2 + 25 + 29 + \ldots + 221 \\ &= 121 + \tfrac{25.221}{2}.50 = 6271 . \end{aligned}$$

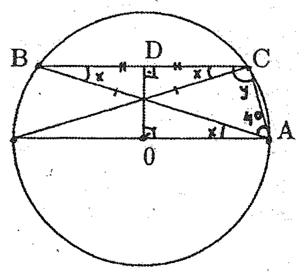
Doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise I, Soru 17. Şekilde O merkezli çemberin, $[BC]$ kirişinin orta noktası D ve bir noktası A 'dır. $m(D\hat{O}A) = 90^o$ ve $m(B\hat{A}C) = 40^o$ ise, $m(A\hat{B}C)$ kaç derecedir?



A) 50 B) 45 C) 30 D) 25 E) 20

Yanıt. $m(A\hat{B}C) = x$, $m(A\hat{C}B) = y$ olsun. $[OD] \perp BC$ olduğundan, $m(O\hat{A}B) = x$ olur. Şekilden de izlenebileceği gibi, $y + x = 140$, $y - x = 90$; ve sonuç olarak $x = 25$ 'tir. Doğru yanıt, D seçeneğidir.



Lise I, Soru 18. n kenarlı bir düzgün (dışbükey) çokgenin bir iç açısının 3 katı, m kenarlı bir düzgün (dışbükey) çokgenin bir iç açısının 4 katına eşit ise, $(m + n)$ sayısı aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) 49 B) 25 C) 24 D) 15 E) 10

Yanıt. n kenarlı düzgün (dışbükey) çokgenin bir iç açısı $(180 - \frac{360}{n})$ derecedir. Böylece,

$$3(180 - \frac{360}{n}) = 4(180 - \frac{360}{m}),$$

bu denklem sadeleştirilince,

$$\frac{8}{m} - \frac{6}{n} = 1;$$

ya da

$$n = \frac{6m}{8-m} = \frac{-(48-6m)+48}{8-m} = -6 + \frac{48}{8-m}$$

elde edilir. Buradan, arzu edilen (n, m) ikililerinin ($n > m \geq 2$ olduğu da gözönüne alınarak) $(6,4)$, $(10,5)$, $(18,6)$, $(42,7)$ 'den ibaret olduğu görülür. Doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise I, Soru 19. 8 şeker kutusunun her birinde farklı sayıda şeker bulunmaktadır. Bu kutulardan rasgele biri boşaltılıp diğer kutulara uygun biçimde dağıtılınca, diğer 7 kutunun her birindeki şeker sayısı aynı oluyor. Başlangıçta en çok şeker bulunan kutuda en az şeker vardır?

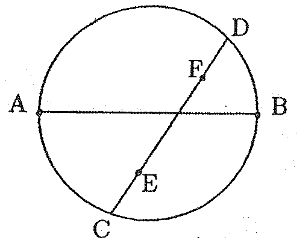
A) 18 B) 24 C) 28 D) 32 E) 36

Yanıt. Kutulardaki şeker sayısı, sırasıyla

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$$

olsun. Birinci kutudaki şekerler boşaltılıp diğerlerine paylaştırılarak diğer 7 kutudaki şekerlerin sayısı eşitlenirken, 7-inci kutuya en az 1 şeker; 6-ıncı kutuya en az 2 şeker; 5-inci kutuya en az 3 şeker; 4-üncü kutuya en az 4 şeker, 3-üncü kutuya en az 5 şeker ve 2-inci kutuya en az 6 şeker konması gerekeceğinden, $a_1 \geq 1+2+3+4+5+6 = 21$ 'dir. Dolayısıyla, $a_8 \geq 28$ 'dir. $a_8 = 28$ olan dağılım vardır: 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28. Doğru yanıt, C seçeneğidir.

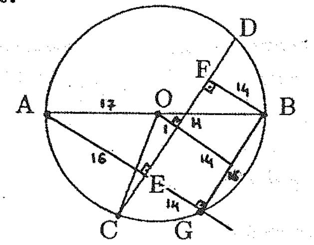
Lise I, Soru 20. Şekilde, $[AB]$ çaplı çemberin bu çapını kesen bir kirişi $[CD]$; A ve B 'den $[CD]$ kirişine indirilen dikmelerin ayakları, sırasıyla E ve F 'dir. $|AE| = 16$, $|BF| = 14$, ve $|AB| = 34$ ise, $|FD|$ aşağıdakilerden hangisidir?



A) $4(2\sqrt{2}+1)$ B) $3(4\sqrt{2}-1)$ C) $4\sqrt{7}$

D) $2(3+\sqrt{2})$ E) $4(3\sqrt{2}-2)$

Yanıt.



$[AE$ 'nin çemberi kestiği diğer nokta G olsun. $EGBF$ bir dikdörtgendir.

$$|GB|^2 = 34^2 - 30^2 = 4.64 \Rightarrow |GB| = 16.$$

Şekilde, $|OH| = 1$ olduğu kolayca görülebilir. $|FD| = x$ diyelim. Bu takdirde, $x = |CE|$ ve

$$(x+8)^2 + 1 = 17^2, \ x^2 + 16x + 65 = 289\ ,$$

$$x^2 + 16x - 224 = 0\ , \quad x = -8 \mp \sqrt{64+224}\ ;$$

$x > 0$ olacağından, $x = -8 + \sqrt{288} = 4(3\sqrt{2} - 2)$ olduğu görülür. Doğru yanıt, E seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 1. Lise I, Soru 15 ile aynıdır.

Lise II-III, Soru 2. a, b, $c \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin diskrimantının 47 olmasını sağlayan kaç tane (a, b, c) üçlüsü vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 47 E) sonsuz

Yanıt. $b^2 - 4ac = 47$ koşulunu sağlayan hiç (a, b, c) tamsayı üçlüsü yoktur; çünkü , $b^2 - 4ac \equiv 1 \pmod 4$ olduğu halde $47 \not\equiv 1 \pmod 4$ 'tür. Doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 3. m ve n sayıları 2520 sayısının pozitif bölenleri olmak üzere, (m, n) ikililerini düşününüz. Bu ikililerden kaç tanesi için n sayısı m 'yi tam böler?

A) 270 B) 540 C) 250 D) 455 E) 500

Yanıt.

$$2520 = 2^3.3^2.5.7; m = 2^a 3^b 5^c 7^d, n = 2^x.3^y.5^z.7^t.$$

$$n \mid m \Leftrightarrow 3 \geq a \geq x \geq 0,\ 2 \geq b \geq y \geq 0,$$
$$1 \geq c \geq z \geq 0\ ,\ 1 \geq d \geq t \geq 0.$$

Bu koşulları sağlayan tam 10 tane (a,x) ikilisi; tam 6 tane (b,y) ikilisi; tam 3 tane (c,z) ikilisi ve tam 3 tane (d,t) ikilisi vardır. Dolayısıyla, $n|m$ olan (n,m) ikililerinin sayısı $10.6.3.3 = 540$ 'tır; doğru yanıt, B seçeneğidir.

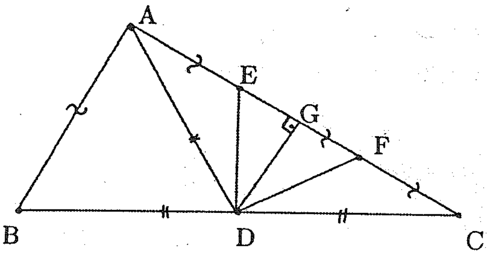
Lise II-III, Soru 4. $\overset{\triangle}{ABC}$ bir dik üçgen, $m(\widehat{A}) = 90^o$, $[BC]$ 'nin orta noktası D; $[AC]$ 'nin bir noktası E olmak üzere, $|AB| = |AE|$ ve $|AC| = 3|AB|$ ise, $m(\widehat{AED})$ kaç derecedir?

A) 105 B) 120 C) 135 D) 140 E) 150

Yanıt. D 'den EF 'ye inilen dikmenin ayağı G olsun. G, $[EF]$ 'nin orta noktası; benzerlikten,

$$|DG| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|EF| = |EG| = |FG|$$

'dir. Dolayısıyla, $m(\widehat{DEG}) = 35^o$, $m(\widehat{AED}) = 135^o$ 'dir. Doğru yanıt, C seçeneğidir.



Lise II-III, Soru 5. 30 farklı kitap, her bir bölmesi 30 kitap alabilen 7 bölmeli bir rafa kaç değişik biçimde dizilebilir? (Bazı bölmeler boş kalabilir.)

A) $\binom{30}{7}$ B) $23!$ C) $\frac{36!}{6!}$ D) $\frac{37!}{7!}$ E) $\frac{30!}{7!}$

Yanıt. 30 kitaba $7 - 1 = 6$ defter ekleyerek, 6 'sı aynı 30 'u farklı olan 36 nesnenin (tekrarlı) permütasyonlarını saymalıyız. Doğru yanıt, C seçeneğindeki $\frac{36!}{6!}$ 'dir.

Lise II-III, Soru 6. Tüm pozitif tamsayılardan oluşan küme $\mathbb{N}$ ile gösterilmek üzere, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu

(i) m ve n aralarında asal olunca, $f(mn) = f(m)f(n)$;

(ii) p ve q asal olunca, $f(p+q) = f(p) + f(q)$

özelliklerine sahipse, $f(100)$ kaçtır?

A) 29 B) 50 C) 70 D) 125 E) hiç biri

Yanıt 1. (i) özelliğinden, $f(3+3) = f(3.2) = f(3)f(2)$, (ii) özelliğinden ise, $f(3+3) = f(3) + f(3) = f(3).2$ ve böylece, $f(2) = 2$ olduğu görülür. Tekrar (ii) özelliği kullanılarak $f(4) = f(2+2) = f(2) + f(2) = 2 + 2 = 4$; ve benzer biçimde,

$$f(5) = f(2{+}3) = 2{+}f(3), f(7) = f(2{+}5) = 4{+}f(3)$$

ve buradan,

$$f(12) = f(5+7) = f(5) + f(7) = 6 + 2f(3)\ (*)$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$f(12) = f(4.3) = f(4)f(3) = 4.f(3) \qquad (**)$$

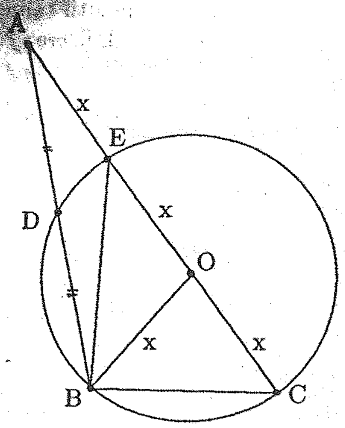
'tür. $(*)$ ve $(**)$ 'dan, $f(3) = 3$ olduğu görülür. Böylece, $f(5) = 5$ ve $f(7) = 7$ olduğu görülür. Şimdi, $f(28) = f(5+23) = 5 + f(23) = f(4.7) = 28$ ve sonuç olarak, $f(23) = 23$ tür. O halde, $f(25) = f(2+23) = 25$, $f(100) = f(4.25) = 100$ 'dür. Doğru yanıt, E seçeneğidir.

Yanıt 2. $f(4) = 4$ ve $f(100) = f(4.25) = f(4).f(25) = 4.f(25)$ 'ten $f(100)$ 'ün 4 ile tam bölündüğü görülür. Dolayısıyla, doğru yanıt E seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 7. Bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin $[AB]$ kenarının orta noktası D ile; D, B ve C noktalarından geçen çemberin $[AC]$ kenarı ile (ikinci defa) kesişim noktası E ile gösterilmek üzere, $|AC| = 3|AE|$ ve $m(\widehat{EBC}) = 90^o$ ise, $|EB|^2/|BC|^2$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{3}{7}$ E) 2

Yanıt.



$|AE| = x$; D, B ve C 'den geçen çemberin merkezi O olsun. Bu takdirde, $|EO| = |OC| = x$ 'dir. $|AD| = |DB| = y$ olsun. Kuvvet kuralından, $2y^2 = 3x^2$ 'dir. $m(\hat{AEB}) = \alpha$ olsun. $\overset{\triangle}{AEB}$ ve $\overset{\triangle}{BED}$ üçgenlerine kosinüs kuralı uygulanarak,

$$\begin{aligned} 4y^2 &= x^2 + |EB|^2 + 2x|EB|\cos\alpha, \\ x^2 &= x^2 + |EB|^2 + 2x|EB|\cos(180-\alpha) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanarak

$$4y^2 + x^2 = 2x^2 + 2|EB|^2$$

ve buradan,

$$|EB|^2 = 4y^2 - x^2 = 4.\frac{3}{2}x^2 - x^2 = \frac{5}{2}x^2$$

elde edilir. $\overset{\triangle}{EBC}$ dik üçgeninden,

$$|BC|^2 = 4x^2 - |EB|^2 = (4 - \frac{5}{2})x^2 = \frac{3}{2}x^2;$$

böylece, $\frac{|EB|^2}{|BC|^2} = \frac{5}{3}$ 'tür. Doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 8.

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2 - (x+1)(x^2+4) = 0 \\ y^2 - (4-2x)y + (4 - 4x - 3x^2) = 0 \end{array} \right\}$$

denklem sisteminin çözüm kümesinde kaç (x, y) reel sayı ikilisi vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 3 'ten fazla

Yanıt. İkinci denklem,

$$\begin{aligned} y^2 &= (4-2x)y + (4 - 4x - 3x^2), \\ &= (y - (2-3x))(y - (2+x)) = 0 \end{aligned}$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir. Dolayısıyla, $y = 2 - 3x$ veya $y = 2 + x$ 'tir.

$$\begin{aligned} y = 2 - 3x \quad &\Rightarrow \quad y^2 = (x+1)(x^2+4) \\ &\Rightarrow \quad (2-3x)^2 = (x+1)(x^2+4) \\ &\Rightarrow \quad 4 - 12x + 9x^2 = x^3 + x^2 + 4x + 4 \\ &\Rightarrow \quad x^3 - 8x^2 + 16x = 0 \\ &\Rightarrow \quad (x-4)^2.x = 0 \Rightarrow \\ & \qquad\; x = 0 \text{ veya } x = 4 \\ &\Rightarrow \quad (x,y) = (0,2) \text{ veya } (x,y) = (4,-8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = 2 + x \quad &\Rightarrow \quad (2+x)^2 = (x+1)(x^2+4) \\ &\Rightarrow \quad x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ &\Rightarrow \quad (x,y) = (0,2) \end{aligned}$$

Doğru yanıt, C seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 9. a_1 ve her $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} = \frac{1}{n}(1 + 2a_1 + 3a_2 + \cdots + (n+1)a_n)$$

ile tanımlanan dizinin 2000-inci terimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3.2^{1998} B) 3.2^{1999} C) 3.2^{1997} D) 3.2^{2000} E) 3.2^{2001}

Yanıt. $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2-1}(1+2) = 3$, $a_3 = \frac{1}{2}(1+2+9) = 6$ ve $n > 2$ için

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{n}(1 + 2a_1 + \cdots + na_{n-1} + (n+1)a_n) \\ &= \frac{1}{n}((n-1)a_n + (n+1)a_n) \\ &= \frac{1}{n}(2na_n) = 2a_n; \end{aligned}$$

dolayısıyla, $n > 2$ için

$$a_{n+1} = 2^{n-1}.a_2 = 3.2^{n-1}; \quad a_{2000} = 3.2^{1998}$$

'dir. Doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 10. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2000}$ denkleminin tamsayılar kümesinde kaç çözümü vardır?

A) 5 B) 21 C) 16 D) 10 E) 40

Yanıt.

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2000}=20\sqrt{5}\ ,$$

$$x=y-40\sqrt{5y}+2000\in \mathbb{Z}$$

olacağından, $y=5s^2$, $s\geq 0$ olmalıdır. Benzer şekilde, $x=5t^2$, $t\geq 0$ olmalıdır. Bu değerler denklemde yerleştirilirse,

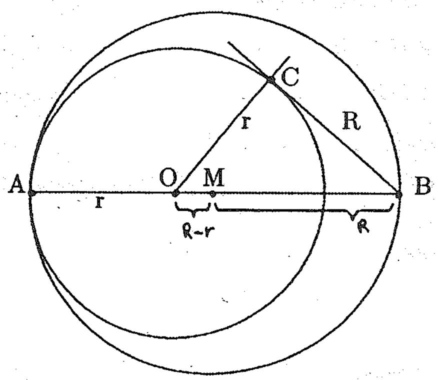
$$t\sqrt{5}+s\sqrt{5}=20\sqrt{5}\ ,\ t+s=20$$

elde edilir. Son denklemin tam 21 tane (t,s) çözümü vardır. Dolayısıyla, verilen denklemin tam 21 tane tamsayı çözümü vardır; doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 11. Yarıçapı r olan çember, yarıçapı R olan çembere A noktasında içten teğettir. Dıştaki çemberin herhangi bir B noktasından içteki çembere çizilen teğetin değme noktası C ve $2|BC|=|BA|$ ise, $\frac{r}{R}$ nedir?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{11}{20}$

Yanıt. $\overset{\triangle}{OCB}$ dik üçgeninde,



$$(2R-r)^2=r^2+R^2\ ,\ 4R^2-4rR+r^2=r^2+R^2\ ,$$

$$3R^2=4Rr\ ,\ \frac{r}{R}=\frac{3}{4}\ .$$

Doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 12. Lise I, Soru 19 ile aynıdır.

Lise II-III, Soru 13. Aşağıdaki denklemin kaç reel çözümü vardır?

$$x=1-2(1-2x^2)^2$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Yanıt. $1-2x^2=t$ diyelim. Bu takdirde, $x=1-2t^2$ olur. Böylece elde edilen

$$1-2x^2=t\ ;\quad 1-2t^2=x$$

sisteminden

$$t-x=2(t^2-x^2)\ \Rightarrow\ (t-x)(1-2t-2x)=0$$
$$\Rightarrow\ t=x\ \text{ veya }\ t=\frac{1}{2}-x$$

elde edilir. Bu durumda,

$$t=x\Rightarrow 1-2x^2=x\Rightarrow 2x^2+x-1=0 \qquad (1)$$

$$t=\tfrac{1}{2}-x\Rightarrow 1-2x^2=\tfrac{1}{2}-x\Rightarrow 4x^2-2x-1=0 \quad (2)$$

(1) ve (2) denklemlerinin birbirinden farklı ikişer kökü; dolayısıyla, verilen denklemin 4 farklı çözümü vardır. Doğru yanıt, E seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 14. Her $x\in[-1,1]$ için $|2x^2+ax+b|\leq 1$ eşitsizliğinin sağlanmasını garanti eden reel a ve b sayıları için a^2+b^2 aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

Yanıt. $-1\leq 2x^2+ax+b\leq 1$ 'de $x=0$, $x=1$ ve $x=-1$ yerleştirilirse, sırasıyla,

(1) $-1\leq b\leq 1$

(2) $-3\leq a+b\leq -1$

(3) $-3\leq b-a\leq -1$;

(2) ve (3) 'ten,

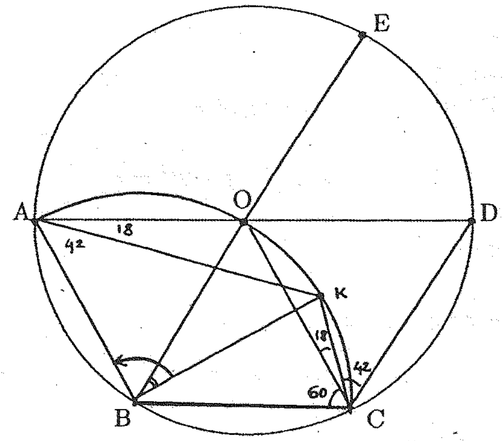
(4) $-3\leq b\leq -1$;

(1) ve (4) 'ten $b=-1$ elde edilir. Şimdi, (2) 'den, $-2\leq a\leq 0$ ve (3) 'ten $-2\leq -a\leq 0$ ve böylece, $a=0$ elde edilir. Sonuç olarak, $a^2+b^2=1$; doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 15. $ABCDEF$ düzgün altıgeni veriliyor. $ABCD$ dörtgeninin iç bölgesinde alınan bir K noktası için $m(K\hat{A}D)=18^o$ ve $m(K\hat{A}B)=m(K\hat{C}D)$ ise, $m(K\hat{B}A)$ kaç derecedir?

A) 84 B) 81 C) 94 D) 96 E) 72

Yanıt.



Şekilden izlenirse, altıgenin bir iç açısı 120^o olduğundan, $m(K\hat{B}A) = m(K\hat{C}D) = 42^o$; $m(K\hat{C}O) = 18^o$ dir. Bu durumda; A, O, K, C noktaları, merkezi B 'de olan çember üzerindedir. Dolayısıyla, $m(K\hat{B}O) = 2m(K\hat{A}O) = 36^o$ 'dir. $m(O\hat{B}A) = 60^o$ olduğundan, $m(K\hat{B}A) = 96^o$; doğru yanıt, D seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 16. $a_3 = 3$ ve her $n \geq 1$ için $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ bağıntısı ile tanımlanmış bir $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ dizisinin ilk 100 teriminin toplamı 100 ise, ilk 111 teriminin toplamı kaçtır?

A) 100 B) 111 C) 136 D) 194 E) 222

Yanıt.

$$a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) - a_{n+1} = -a_n \; ;$$

ve böylece, verilen dizinin herhangi altı ardışık numaralı teriminin toplamının sıfır olduğu görülür. O halde,

$$100 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$= a_2 + a_3 = a_2 + 3 \; ;$$

buradan; $a_2 = 97$, $a_1 = a_2 - a_3 = 97 - 3 = 94$;

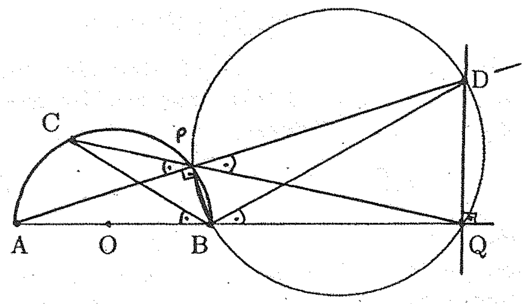
$$111 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{111} = a_1 + a_2 + a_3$$
$$= 94 + 97 + 3 = 194 \; .$$

Doğru yanıt, D seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 17. $[AB]$ çaplı yarım çemberin AB yayının orta noktası C; BC yayı üzerinde B ve C 'den farklı bir nokta P; CP ile AB doğrusunun kesişim noktası Q; Q 'dan geçen ve AB doğrusuna dik olan doğru ile AP 'nin kesişim noktası D olmak üzere, $|AB| = 6$ ve $|DQ| = 10$ ise, $|QP|.|QC|$ nedir?

A) 160 B) 169 C) 150 D) 140 E) 144

Yanıt.



Şekilden izlenebileceği üzere; B, P, D, Q noktaları çemberseldir. Aynı yayı gören açılar olduğundan, $m(A\hat{P}C) = m(A\hat{B}C)$; ters açılar ve aynı yayı gören açılar olarak, $m(A\hat{B}C) = m(A\hat{P}C) = m(Q\hat{P}D) = m(Q\hat{B}D)$. Buradan, $m(C\hat{B}D) = 90^o$, $m(Q\hat{B}D) = 45^o$, $|BQ| = |QD| = 10$ olduğu görülür. Böylece, kuvvet kuralı ile,

$$|QP|.|QC| = 10.16 = 160$$

olduğu görülür. Doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 18. Lise I, Soru 3 ile aynıdır.

Lise II-III, Soru 19. Lise I, Soru 9 ile aynıdır.

Lise II-III, Soru 20. $a_n = \frac{n^2}{(1,001)^n}, (n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisinin en büyük terimi kaçıncı terimdir?

A) 1001 B) 1999 C) 2000 D) 2001 E) 2002

Yanıt.

$$\begin{aligned} a_n > a_{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n^2}{(1,001)^n} > \frac{(n+1)^2}{(1,001)^{n+1}} \\ &\Leftrightarrow \quad (1,001)n^2 > (n+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1001n^2 > 1000(n+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad n^2 - 2000n > 1000 \\ &\Leftrightarrow \quad (n-2000)n > 1000 \\ &\Leftrightarrow \quad n \geq 2001 \end{aligned}$$

olduğundan, en büyük terim 2001-inci terimdir. Doğru yanıt, D seçeneğidir.