5. ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI 2. AŞAMA SORULARI

LİSE I GRUBU

1. p ve q tek asal sayılar ve p ile q arasında başka asal sayı yoksa, $p+q$ sayısının, her biri 1 'den büyük en az üç tane doğal sayının çarpımı olarak yazılabileceğini gösteriniz. (Çarpanların farklı olmaları gerekmez.)

2. Sıfırdan farklı x, y, z sayıları $x^2 - y^2 = yz$ ve $y^2 - z^2 = zx$ eşitliklerini sağlıyor. $x^2 - z^2 = xy$ olduğunu gösteriniz.

3. Her biri 100 'den küçük olan 10 farklı pozitif tam sayının oluşturduğu her kümenin boş olmayan ve ayrık öyle iki altkümesi vardır ki, bu altkümelerden birindeki sayıların toplamı diğerindeki sayıların toplamına eşittir; ispat ediniz.

4. Düzlem üzerinde, hepsi bir doğru üzerinde bulunmayan 2000 tane nokta işaretlenmiş ve bu noktaların herbirinin yanına o noktanın <u>yükü</u> diyeceğimiz bir reel sayı yazılmıştır. Üzerinde en az iki işaretlenmiş nokta bulunduran her doğrunun tüm işaretlenmiş noktalarının yükleri toplamı sıfır olduğuna göre, her noktanın yükünün sıfır olduğunu kanıtlayınız.

5. Dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çemberine A ve B noktalarında teğet olan doğruların kesişim noktası D; DC ile $[AB]$ 'nin kesişim noktası da E ile gösteriliyor. $\dfrac{|AE|}{|EB|} = \dfrac{|AC|^2}{|BC|^2}$ olduğunu ispat ediniz.

LİSE II-III GRUBU

1. Bir n doğal sayısının kendisinden küçük tüm doğal sayılara bölünmesiyle ortaya çıkan farklı kalanların toplamı $K(n)$ ile gösterilsin (Örnek: $K(9) = 1+2+3+4 = 10$). $K(n) = n$ olan tüm n doğal sayılarını bulunuz.

2. İki öğrenci, tahtaya $x^2 + 19x + 91$ polinomunu yazarak şöyle bir oyun oynuyorlar: Birinci oyuncu, polinomun başkatsayısı dışındaki katsayılarından birini silip, onun yerine bir fazlasını veya bir eksiğini yazıyor. Benzer şekilde, ikinci oyuncu da ortaya çıkan polinomun başkatsayısı dışındaki katsayılarından birini silip, onun yerine bir fazlasını veya bir eksiğini yazıyor ve oyun bu şekilde sürdürülüyor. Bir süre sonra, tahtada $x^2 + 91x + 19$ polinomu yazılmış olduğuna göre, bundan önce yazılan polinomlardan en az birinin köklerinin ikisinin de tamsayı olduğunu kanıtlayınız.

3. $n \geq 3$ olmak üzere $a_1, a_2, \dots, a_n$ reel sayıları için

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \quad \text{ve} \quad a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq n^2$$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır. $a_1, a_2, \dots, a_n$ sayıları içinde 2 'den küçük olmayan en az bir sayı bulunduğunu ispat ediniz.

4. Bir mühendis, her biri düzlemde uygun bir parabolün iç bölgesini aydınlatabilen sonlu sayıda fener ile tüm düzlemi aydınlatabileceğini söyleyince, matematikçi olan arkadaşı bunun mümkün olmadığını kanıtlıyor. Bunu siz de kanıtlayınız.

5. Dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O ; $[OA]$ üzerinde alınan bir E $(A \neq E \neq O)$ noktasından, $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları, sırasıyla N, L, M ; ABC üçgeninin A 'dan geçen yüksekliğinin $[BC]$ kenarını kestiği nokta D ile gösterilmek üzere; N, L, D, M noktalarının bir çember üzerinde bulunduğunu ispatlayınız.