PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

– Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

– Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

– Çözümleri, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA adresine 31 Temmuz 2000 tarihine kadar gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.211. Her biri 1 veya -1 'e eşit olan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayıları için $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1$ eşitliğinin sağlandığı bilinmektedir. n sayısının 4 'e bölündüğünü kanıtlayınız.

A.212. 1, 2, 3, ..., 80, 81 sayılarının tümü, birim karelere ayrılmış 9×9 karesinin hanelerine rasgele yerleştiriliyor. Sayılar nasıl yerleştirilirse yerleştirilsin, ortak bir kenarı bulunan ve içlerine yerleştirilmiş sayıların farkı en az 6 olan en az iki hanenin bulunduğunu ispatlayınız.

A.213. $x + 1/x$ bir tamsayı ise, her $n \in \mathbb{N}$ için $x^n + 1/x^n$ sayısının da bir tamsayı olduğunu kanıtlayınız.

A.214. x sayısının tam kısmını $[[x]]$ ile gösterelim. $x + \frac{99}{x} = [\![x]\!] + \frac{99}{[\![x]\!]}$ denkleminin tam olmayan kökünün kesir kısmını bulunuz.

A.215. Düzlemde aynı doğru üzerinde bulunmayan A, B, C noktaları ile bir $k \in \mathbb{R}^+$ sayısı veriliyor. $|PA|^2 + |PB^2| + |PC|^2 = k$ şartını sağlayan P noktalarının geometrik yerini bulunuz.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.211. Doğal sayılar kümesinin aşağıdaki koşulları sağlayan 2001 altkümeye parçalanıp parçalanamayacağını belirleyiniz:

(i) Altkümeler ikişer ikişer ayrık ve hiç biri boş değildir.

(ii) Altkümelerin birleşimi tüm doğal sayılar kümesidir.

(iii) Bu altkümelerden herhangi 2000 tanesi seçilir ve bu 2000 kümeden birer tane eleman seçilip bu elemanların 2000-inci kuvvetleri alınarak elde edilen 2000 sayı çarpılırsa, bu çarpım, seçilmeyen kümenin elemanlarıdır. (Alp Şimşek; İzmir Fen Lisesi)

Y.212. a, b, c, d pozitif reel sayılar ve $bc \geq ad$ ise,

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$$
$$\leq b + \sqrt{(a+c)^2 + d^2}$$

olduğunu gösteriniz. (M. Bumin Yenmez; İzmir Özel Yamanlar Lisesi)

Y.213. P, ABC üçgeni içinde alınan bir nokta olmak üzere; $\overset{\triangle}{PAB}$, $\overset{\triangle}{PBC}$, $\overset{\triangle}{PCA}$ üçgenlerinin çevrel çember yarıçapları, sırasıyla, R_1, R_2, R_3 olsun. Buna göre,

$$\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} + \frac{1}{|PC|} \geq \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz. (Ahmet Çetintaş; Ankara Samanyolu Lisesi)

Y.214. Merkezi bir A_1 noktasında ve yarıçapı 1 olan dairenin içinde, A_1 'den farklı, rasgele, A_2, A_3, ..., A_{100} noktaları alınmıştır. $1 \leq k \leq 100$ olan her k tamsayısı için A_k 'dan A_1, ..., A_{k-1}, A_{k+1}, ..., A_{100} noktalarına olan uzaklıklardan en küçüğü a_k ile gösteriliyor. Bu durumda

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{100}^2 < 9$$

olduğunu kanıtlayınız.

Y.215. Açıları arasında, $\hat{C} = 3\hat{B} = 9\hat{A}$ bağıntısı bulunan bir ABC üçgeninde a, b, c kenar uzunluklarını göstermek üzere, $bc + ca + ab$ ifadesinin bu üçgene ait çevrel çemberin R ile gösterilen yarıçapı cinsinden değerini bulunuz.

ÇÖZÜMLER

A.201. $x^3 - x + 1 = 0$ denkleminin her bir kökünün tersi, $x^5 + x + 1 = 0$ denkleminin bir köküdür; kanıtlayınız.

Çözüm. a sayısı $x^3 - x + 1 = 0$ denkleminin bir kökü olsun: $a^3 - a + 1 = 0$. $x^5 + x + 1$ polinomunun $x = \frac{1}{a}$ 'daki değerini, hesaplayalım:
$\frac{1}{a^5} + \frac{1}{a} + 1 = \frac{1}{a^5}(1 + a^4 + a^5)$.

$$= \frac{1}{a^5}(a^5 - a^3 + a^3 + a^5 - a + 1 + a - a^2 + a^4)$$
$$= \frac{1}{a^5}[a^2(a^3 - a + 1) + (a^3 - a + 1) + a(a^3 - a + 1)]$$
$$= \frac{1}{a^5}(a^3 - a + 1)(a^2 + a + 1) = 0 \ .$$

Dolayısıyla, $\frac{1}{a^5} + \frac{1}{a} + 1 = 0$ çıkar.

A. 202. Toplamları ve çarpımları tam kareler olan doğal sayı ikilileri bulmak için bir yöntem gösteriniz.

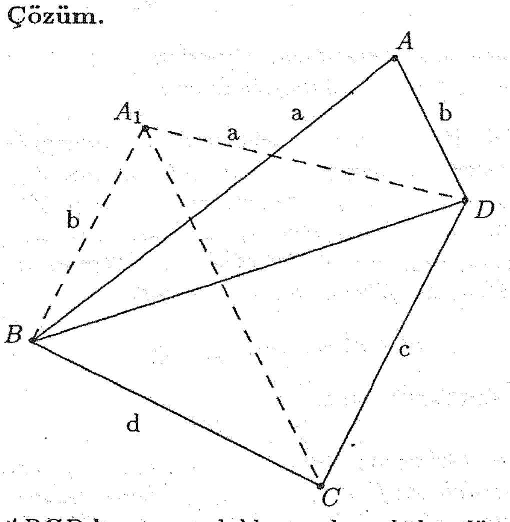
Çözüm. Herhangi a ve b doğal sayılarını alalım. $a^2 + b^2 = k$ diyelim. $x = a^2.k$ ve $y = b^2.k$ sayılarını tanımlayalım.

$$x + y = k(a^2 + b^2) = k^2 \text{ ve}$$
$$x.y = a^2b^2k^2 = (abk)^2$$

formülleri, problemde istenilen özelliğe sahip sonsuz çoklukta (x, y) doğal sayı ikileri bulmaya imkan sağlar.

A. 203. Kenar uzunlukları a, b, c, d olan bir dörtgenin alanının $\frac{ac+bd}{2}$ 'den fazla olamayacağını gösteriniz.

Çözüm.



$ABCD$ kenar uzunlukları a, b, c, d olan dörtgen olsun $\overset{\triangle}{ABD}$ üçgenine kongruent olan $A_1\overset{\triangle}{B}D$ üçgenini kuralım (şekile bakınız):

$|A_1B| = |AD| = b, \quad |A_1D| = |AB| = a$.

$ABCD$ ve A_1BCD dörtgenlerinin alanları eşittir. Öte yandan,

$$Alan(A_1BCD) = Alan(A_1\overset{\triangle}{B}C) + Alan(A_1\overset{\triangle}{C}D)$$
$$\leq \frac{1}{2}.b.d.\sin(A_1\hat{B}C) + \frac{1}{2}.a.c.\sin(A_1\hat{D}C)$$
$$\leq \frac{1}{2}.b.d + \frac{1}{2}.a.c \ .$$

A. 204. Sıfırdan başka tüm rakamların bulunduğu ve 5 ile biten bir 9 basamaklı sayı tamkare olamaz; kanıtlayınız.

Çözüm. Problemde söz konusu olan sayıya n diyelim ve $n = k^2$ sağlanacak biçimde bir k sayısının var olduğunu farzedelim. n sayısı 5 ile bittiğinden, k da 5 ile bitmelidir: $k = 10a + 5$, $(a \in \mathrm{N})$. Buradan, $n = k^2 = 100a(a+1) + 25$ ve dolayısıyla, n sayısının son iki basamağı 25 olmalıdır. $a(a+1)$ sayısının son rakamı 0, 2 ve 6 sayılarından biri olabilir. Fakat n sayısında 0 (sıfır) hiç olmadığından ve 2 rakamı artık kullanıldığından $a(a+1)$ sayısının son rakamı 6 olmalıdır. Dolayısıyla, n sayısının sondan üç basamağı 625 olmalıdır: $n = 1000t + 625$, $(t \in \mathrm{N})$. Demek ki, n, $125 = 5^3$ ile bölünür. Ancak n bir tam kare olduğundan, bu sayı, 5^4 ile bölünmelidir. Bu ise yalnız ve yalnız t sayısı 5 ile bölünebildiği zaman mümkündür. t 'nin 5 ile bölünebilmesi için onun son rakamı ya sıfır (ki buna izin verilmiyor), ya da 5 olmalıdır. Fakat 5 rakamı bir kez kullanıldığından bu mümkün değildir. Böylece, problemdeki özelliklere sahip bir sayı tam kare olamaz.

A. 205. $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin AH yüksekliği, BD kenarortayı ve CN iç açıortayı aynı bir noktadan geçiyorsa, a, b, c (kenar uzunlukları) arasında hangi bağıntı vardır?

Çözüm. Söz konusu doğru parçaları P 'den geçsin. Ceva Teoremi gereğnce,

$$\frac{AN}{NB}.\frac{BH}{HC}.\frac{CD}{DA} = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a}.\frac{BH}{HC}.\frac{1}{1} = 1$$

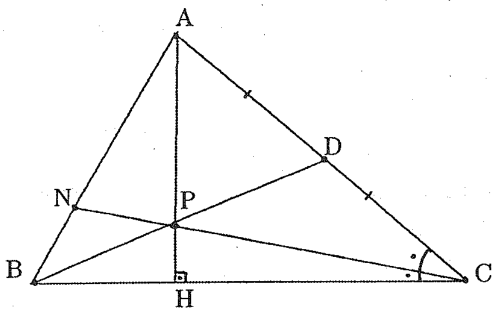
olur. $\frac{BH}{HC} = \frac{a}{b}$ 'dir. $\frac{BH}{HC} = \frac{ak}{bk}$, $BH = ak$, $HC = bk$ olsun.

$$BH + HC = BC \Leftrightarrow ak + bk = a \ .$$

Buradan $k = \frac{a}{a+b}$ bulunur. Dik üçgenlerden,

$$AH^2 = c^2 - a^2k^2 = b^2 - b^2k^2$$
$$\Rightarrow c^2 - b^2 = k^2(a^2 - b^2)$$
$$\Rightarrow c^2 - b^2 = \frac{a^2}{(a+b)^2}(a-b)(a+b)$$
$$\Rightarrow c^2 - b^2 = a^2(a-b)\frac{1}{(a+b)}$$
$$\Rightarrow (c^2 - b^2)(a+b) = a^2(a-b)$$

bulunur.



Y.201. $a_0, a_1, ..., a_{n-3}$ reeel sayılar olmak üzere,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-3}x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

denkleminin köklerinden en az birinin reel olamayacağını; yani, karmaşık olacağını kanıtlayınız.

Çözüm. Denklemin köklerine $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ diyelim. Her $j = 1, ..., n$ için $\alpha_j \neq 0$ olacağı açıktır. Vieta Teoremine göre,

$$(-1)^n \alpha_1\alpha_2...\alpha_n = \tfrac{1}{a_0},$$
$$(-1)^{n-1}\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(\textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j}) = \tfrac{1}{a_0},$$
$$(-1)^{n-2}\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(\textstyle\sum_{i>j} \frac{1}{\alpha_i\alpha_j}) = \tfrac{1}{a_0} \ .$$

Buradan,

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j} = -1 \text{ ve } \sum_{i>j} \frac{1}{\alpha_i\alpha_j} = 1$$

olduğu görülür. Sonuncuları kullanarak şunları yazabiliriz:

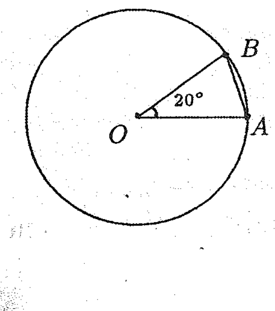
$$1 = (\textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j})^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j^2} + 2.\sum_{i>j} \frac{1}{\alpha_i\alpha_j}$$
$$= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j^2} + 2.$$

Buradan ise $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j^2} = -1$ elde edilir ki, bu da α_j 'lerin hepsinin reel olamayacağını gösteriyor.

(**Çözenler:** *Osman N. Osmanlı (Ankara), Metehan Aydın (Ankara), Yunus Esençayı (Ankara), Ali N. Duman (Ankara)*).

Y.202. $\frac{20}{60} < \sin 20^o < \frac{21}{60}$ eşitsizliğini ispatlayınız.

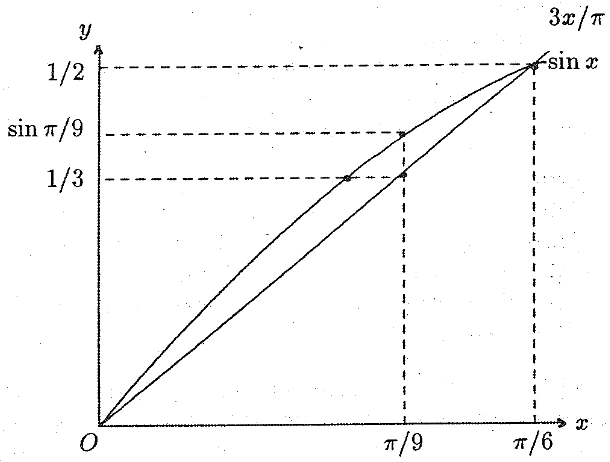
Çözüm.



Merkezi O noktasında olan birim daireyi 18 tane eşit (kongruent) dilime bölelim. Şekilde $\widehat{AOB} = 20^o$ ve AOB diliminin alanı $\frac{\pi}{18}$ 'dir. Öte yandan, $\overset{\triangle}{AOB}$ üçgeninin alanı

$\frac{1}{2}|OA||OB|.\sin 20^o = \frac{1}{2}.\sin 20^o$ 'dir.

Üçgenin alanı dilimin alanından küçük olduğundan, $\frac{1}{2}.\sin 20^o < \frac{\pi}{18} \Rightarrow \sin 20^o < \frac{\pi}{9} < \frac{7}{20} \Rightarrow \sin 20^0 < \frac{21}{60}$.



Şimdi, $(0, \frac{\pi}{6})$ aralığında $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiği yukarıya doğru konveks olduğundan, bu aralıkta $y = \sin x$ 'in grafiği $y = \frac{3}{\pi}x$ doğrusunun grafiğinden yukarıda bulunacaktır. (Şekile bakınız.) Böylece, her $x \in (0, \frac{\pi}{6})$ için $\sin x > \frac{3}{\pi}x$ ve özel halde, $x = \frac{\pi}{9}$ için

$$\sin 20^o = \sin\tfrac{\pi}{9} > \tfrac{3}{\pi}.\tfrac{\pi}{9} = \tfrac{1}{3} \Rightarrow \sin 20^o > \tfrac{1}{3} = \tfrac{20}{60}$$

olur.

Çözüm 2. Her $\theta \in \mathbf{R}$ için $\sin 30^o = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta$ olduğu bilindiğinden, $\theta = 20^o$ alınarak, $\sin 20^o$ 'nin

$$f(x) = 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

polinomunun bir kökü olduğu görülür. Aradeğer Teoremi kullanılarak, $f(x)$ 'in $(-2, 0)$, $(\frac{20}{60}, \frac{21}{60})$ ve $(\frac{1}{2}, 1)$ aralıklarında birer kökü bulunduğunu görmek zor değildir. $0 < \sin 20^o < \sin 30^o = \frac{1}{2}$ olduğundan,

$$\frac{20}{60} < \sin 20^o < \frac{21}{60}$$

'tır.

(**Çözenler:** *Osman N. Osmanlı (Ankara), Yunus Esençayı (Ankara), Metehan Aydın (Ankara), Ali N. Duman (Ankara), Necati Girgin (Denizli)*).

Y.203. Bir $k \in \mathbb{N}$ sayısının şu özelliği vardır: k 'ya bölünen herhangi bir sayının rakamları ters sırada dizilerek elde edilen sayı da k 'ya bölünmektedir. k 'nın 99 'u böldüğünü kanıtlayınız.

Çözüm. Söz konusu özelliğe sahip k sayısı için $(k, 10) = 1$ olmalıdır. Çünkü 1 ile başlayan ve k 'ya bölünen (ki böyle sayılar sonsuz çokluktadır) bir sayının ters yazılımından elde edilen (yani, son rakamı 1 olan) sayı da k ile bölünmelidir.

Şimdi, 500 ile başlayan ve k 'ya bölünen bir sayı alalım. (Böyle sayılar da sonsuz çokluktadır. Çünkü $5000xy...z$ şeklinde çok büyük bir sayının k 'ya bölümünden kalanı bu sayıdan çıkarırsak, elde edilen sayı 500 ile başlayacak ve k 'ya bölünecektir.)

Böylece, $500ab...c$ sayısının ve onun rakamlarının ters sırada dizilişinden elde edilen $c...ba005$ sayının k ile bölündüğünü varsayalım. O halde, bu sayılar kullanılarak elde edilen

$$c...ba0050000...00 + 500ab....c = c...ba01000ab....c$$

sayısı ve onun "ters yazılımı olan $c...ba00010ab...c$ sayısı da k 'ya bölünecektir. Öyleyse, aşağıdaki fark da k 'ya bölünecektir:

$$c...ba01000ab...c - c...ba00010ab...c = 99000...0 .$$

Böylece, $99000...9$ sayısı, k ile bölünmelidir. Fakat $(j, 10) = 1$ olduğundan, $k|99$ olmalıdır.

(**Çözenler:** *Ali N. Duman (Ankara), Osman N. Osmanlı (Ankara), Metehan Aydın (Ankara), Yunus Esençayı (Ankara)*).

Y.204. $\sqrt{2}$, 2 ve $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sayıları verilmiştir. Bu sayılardan herhangi ikisinin yerine, onların toplamının $\sqrt{2}$ 'ye bölümünü ve farkının $\sqrt{2}$ 'ye bölümünü koymaya izin veriliyor. Bu işlemler bir kaç defa yapılarak, 1, $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$ üçlüsünü elde etmek mümkün müdür?

Çözüm. Bu işlemler sonucunda sayıların kareleri toplamı değişmiyor. Gerçekten, verilen sayılar üçlüsüne a, b, c denirse, işlem sonucu elde edilen sayı üçlüsü $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$, c olacaktır ve sonuncuların kareleri toplamı

$$(\frac{a+b}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{a-b}{\sqrt{2}})^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

olacaktır. Şimdi, verilen sayıların kareleri toplamı

$$(\sqrt{2})^2 + 2^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{13}{2}$$

'dır ve 1, $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$ sayılarının da kareler toplamı

$$1^2 + (\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{2}$$

olduğundan, sonuncu üçlü, $\sqrt{2}$, 2, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ üçlüsünden, problemde sözü geçen işlemler sonucu elde edilemez.

(**Çözenler:** *Ali N. Duman (Ankara), Osman N. Osmanlı (Ankara), Metehan Aydın (Ankara), Yunus Esençayı (Ankara)*).

Y.205. Bir P noktasından geçen S_1, S_2, S_3 çemberleri birbirleriyle ayrıca A, B, C noktalarında kesişiyorlar. Eğer A, B, C noktaları P 'den geçmeyen bir doğrunun üzerinde ise, bu çemberlerin merkezlerinden geçen çemberin P noktasından da geçeceğini ispatlayınız.

Çözüm. Merkezler O_1, O_2, O_3 olsun. P noktasının O_1O_2, O_2O_3, O_3, O_1 doğrularına göre simetriği olan noktalar sırasıyla A, B, C olur. PA, PB, PC 'nin bu doğruları (dik olarak) kestiği noktalar A_1, B_1, C_1 olmak üzere A_1B_1 doğrusu C_1 'den geçer. Dolayısıyla $O_1A_1PC_1$, $A_1O_2B_1P$ ve $B_1PC_1O_3$ dörtgenlerinin her biri, bir kirişler dörtgeni olur. Buradan $O_1O_2PO_3$ 'ün de kirişler dörtgeni olduğu sonucuna varılır.

(**Çözenler:** *Necati Girgin (Denizli), Ali N. Duman (Ankara), Osman N. Osmanlı (Ankara), Yunus Esençayı (Ankara)*).

TEŞEKKÜRLER...

Türkiye'yi Dünya Matematik Olimpiyadında temsil edecek 6 öğrenciden 3'ü; genç matematik dehaları M. Bumin Korkmaz, Alp Şimşek ve Ahmet Çetintaş'a, 211., 212. ve 213.yarışma problemlerini dergimize sundukları için sonsuz teşekkürler eder, matematik çalışmalarında başarılar dileriz.

Matematik Dünyası Yayın Kurulu