

ESKİ YUNAN UYGARLIĞINDA GEOMETRİ

Nurettin Ergun

İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü, İSTANBUL

En parlak dönemi yaklaşık sekiz yüzyıl sürmüş olan, pek çok usta düşünür, matematikçi, ozan, mimar, oyun yazarı ve yontucu yetiştiren Eski Yunan uygarlığında matematiğin ve özellikle geometrinin gelişim ve evrimini bir kaç sayfalık bir yazıda aktarabilmek pek olası değildir doğrusu. Biz bu yazıda, bu konuda, büyük ölçüde (IV. kısım dışında), Türkçeye de çevrilmiş olan anıtsal bir kaynaktan, B. L. Van Der Waerden 'in ünlü yapıtı *Bilimin Uyanışı* 'ndan yararlanarak ve çeviri dilini biraz günümüz Türkçesine uyarlayarak bir kaç kesit aktarmak istiyoruz. 1950 'lerin başında yazılan bu yapıt, kanımızca, bu konuda ayrıntılı bilgi edinmek isteyenler için günümüzde temel başvuru kitabı olma özelliğini sürdürmektedir. Tüm yazıda, dikkatle ve kavrama isteğiyle okunduğunda rahatlıkla anlaşılıp kavranabilecek olan ve gerçekten yalnızca çok temel ve yalın bilgilerin kullanıldığı iki ünlü ve tarihsel matematiksel kanıtlamaya yer verdik. Bunu, açıkcası, önemsiyoruz. Bu yazının amacı, hiç kuşkusuz, okuyucuyu Van Der Waerden 'in 500 sayfalık başyapıtını okuması konusunda kışkırtmaktır. Bu yapıtın, az da olsa, belirli düzeyde matematik bilgisi bilmeyi gerektirdiğini eklemeliyiz.

I. Yunan Matematiğinin Başlangıcı

Bugün, matematiğin Milet 'li Thales 'den en az bin yıl önce Babilonya 'da başladığını biliyoruz. Thales 'e atfedilen teoremlere yakından bakarsak, bunların matematikteki buluşların başlangıç noktası dönemine ait olmaktan çok, matematiğin dizgeli (sistemli) ve mantığa dayanan kuruluşunun başlangıç dönemine ait oldukları anlaşılır. Buluşlar döneminin başlangıcında, bu buluşların verdiği heyecanla insan daha çok şu gibi problemlerle ilgilenir: "Bir üçgenin ya da bir dairenin alanını nasıl hesaplayabilirim?", "Bir piramidin hacmini ya da kirişin uzunluğunu nasıl bulabilirim?", "Bir yamuğu, tabanına paralel bir doğru parçasıyla nasıl iki eşit parçaya bölebilirim?". Eski Mısır ve Babilonya metinlerinin uğraştıkları problemler de bunlardan başka şeyler değildir. Ancak bunlardan şu can alıcı soru ortaya çıkar: "Tüm bunları nasıl kanıtlayabilirim?" Eski matematiğin bazıları doğru, bazıları yanlış sonuçları, aralarında mantık bağı bulunmadan, yabancı bir kavmin öğrenmeye susamış genç kuşağının eline geçtiğinde, bu sorular büyük bir önem kazanırlar. Thales 'in döneminde Eski Mısır ve Eski Babilonya matematiği çoktan ölü bilgi durumuna gelmişti. Thales 'in bu bilgilerin içinden hesap kurallarını sökerek öğrenmesi olasıydı ama bunlara temel oluşturan akıl yürütme dizisi artık tümüyle unutulmuştu. Thales, Babilonyalılardan daire alanının $3r^2$ olduğunu, buna karşın Mısırlılardan aynı alanının $(\frac{8}{9} \times 2r)^2$ olduğunu duymuş olabilirdi, peki doğru ve yanlış hesaplamaları nasıl ayırt edebilirdi? Çok basit:

"Onları kanıtlayarak, kısacası onlardan mantıklı bir matematik dizge oluşturarak!"

Eudemos 'a göre Thales 'in yaptığı budur işte. Thales bu dizgenin başında, ters tepe açılarının eşitliği, ikizkenar bir üçgenin taban açılarının eşitliği, bir çapın daireyi iki eşit parçaya ayırması v.b. gibi apaçık görünen temel şeylerin kanıtlanmasını yapmıştır.

Eski Yunan matematikçilerinin geometriyi tek başlarına bulmuş oldukları ve kendilerinden önceki kültürlerden önemli hiç bir şey almamış olduklarını söyleyen geleneksel inancı bırakmamız gerektiği artık açıktır. Bu inanış ancak Babilonya matematiği henüz bilinmediği sürece tutunabilirdi. Bununla

Thales 'in dehasından hiç bir şey eksilmiş olmuyor, tersine, o ancak şimdi hakkı olan onura kavuşuyor: Bu onur geometriyi mantıksal bir yapıya dönüştürmek, kanıtlanma kavramını geometriye sokmaktır.

Gerçekten Yunan matematiğinde belirleyici ve tümüyle yeni olan şey, kanıtlamalar aracılığıyla teoremlerden teoreme adım adım ilerleyiştir. Yunan matematiğinin oluşturulduğu malzeme yeni değildi, yapı taşları daha eski kültürlerden, bunları ezeleyerek ortaya çıkarılabildi. Oysa yapının biçimi yeni olup, Yunanlıların berrak düşünüş biçimine tanıklık etmektedir. Bu öyle bir düşünüş biçimidir ki, karanlık kalan hiç bir noktaya, elde edilen bilgilerin doğruluğuna ilişkin en küçük bir kuşkuya yer yoktur.

II. Geometriciler Kataloğu

İ. S. 450 yıllarında Eflatun (Platon) 'un Akademisine son bir parlayış getiren yeni Platoncu Proklos, Eukleides 'in **Elemanlar** 'ının birinci kitabına ilişkin yorumunda, büyük ölçüde Eudemos 'un **Matematik Tarihi** adlı yapıtından yararlanarak, Thales (İ. Ö. 600) 'den Eukleides (İ. Ö. 300) 'e kadar geçen dönemi kısaca özetliyor:

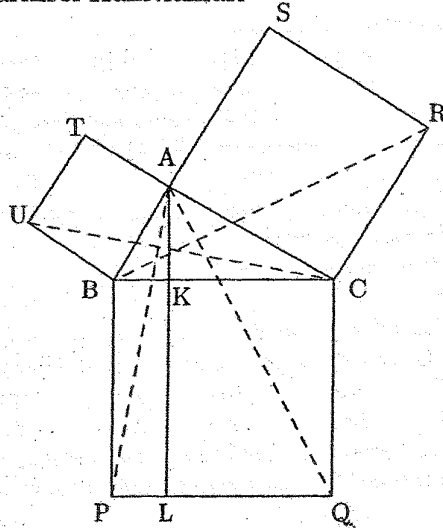
"Nasıl ki Fenikelilerde tecim ve ulaştırma etkinlikleri sonucunda sayılar konusundaki bilgilerimizin başlangıcı doğduysa, yukarıda bildirdiğimiz nedenden Mısır'da da geometrinin temelleri atıldı. Thales ise Mısırdan döndükten sonra bu bilimi Yunanistan 'a getirdi ve kendisi de buna pek çok buluşlar ekledi, başka pek çok buluş için de kendisinden sonra gelenlere yol gösterdi. Onun yöntemi kısmen genel olup kısmen de sezgiye dayanıyordu. Söylentiye göre kendisinden sonra ozan Stesichoros 'un kardeşi Mamertios geometri ile uğraşmış olup, Elis 'li Hippias 'in anlattığına göre bu yüzden ün kazanmıştı. Bunları izleyen Pythagoras, bu bilimi ileri bir eğitim dizgesinin içine soktu. Onun araştırmaları bu bilimin en yüksek ilkelerine ilişkindi ve onun kuramsal araştırmaları her türlü maddi etkilerden uzak olarak arı (sırfi) düşünce alanında dolışmaktaydı. Orantılar (ya da irrasyonel sayılar) bilgisini yaratan ve 'beş evrensel cismin' (yani düzgün çokyüzlülerin) çizimini bulan da odur. Bunlardan sonra Kilizman 'lı Anaxagoras geometrinin bir çok problemiyle uğraştı. Ondan daha genç olan Sakız 'lı Oinopides de o sıralarda geometride çalışmıştır. Bu ikisi Eflatun tarafından **Rakiplerde** adlı yapıtta matematik bilgileriyle ün salmış kişiler olarak anılmaktadır. Bunlardan sonra Hilal 'lerin alanını bulan Sakız 'lı Hippokrates ve Kyrene 'li Theodoros geometrinin ünlü temsilcileri oldular. Gerçekten Hippokrates 'e tarihte ilk kez bir temel matematik kitabını yazan kişi olarak rastlamaktayız. Onlardan sonra öteki matematik dalları yanında özellikle geometrinin en büyük atılımını coşkulu ve gayretli çalışmalarına borçlu olduğumuz Eflatun gelir. O, yapıtlarına açık bir biçimde baştan başa matematik akıl yürütmeler yerleştirmiş ve felsefe öğrenenlerde her fırsatta matematiğe karşı beğeni ve tutku uyandırmaya çalışmıştır. Bu sıralarda, teoremlerin sayısını arttırmış ve bunları daha bilimsel bir çerçeveye sokmuş olan Taşoz 'lu Leodamas, Tarent 'li Archytas ve Atinalı Theaitetos da yaşamışlardır. Leodamas 'tan daha genç olan Neokleides ve öğrencisi Leon, öncüllerinin bıraktığı geometriyi epeyce genişlettiler. Leon kanıtlarının zenginliği ve elverişliliği ile belirginleşen bir temel geometri kitabı yazabilmek ve verilmiş bir problemin çözümlü çözülemeyeceğine ilişkin kesin koşullar koşmak başarısını gösterdi. Ondan sonra, Leon 'dan biraz daha genç ve Eflatun 'un öğrencilerinin arkadaşı olan Knidos 'lu Eudoxos ilk kez genel teorem denilen teoremlerin sayısını çoğalttı. O zamana kadar bilinen üç tane orantıya üç tane daha ekledi ve Eflatun tarafından başlanan, doğrunun bölünmesi konusunu analitik yöntem kullanarak bir çok teoremlerle ileri götürdü."

Proklos daha sonra Eflatun 'un kurduğu akademi çatısı altındaki çalışmaları, ardısıra gelen Eudoxos ve Eukleides gibi usta geometricilerin çalışmalarını anlatmayı sürdürmektedir.

III. Eflatun'un Yakınışı

İ. Ö. 374 yılında yazdığı ünlü Devlet adlı yapıtında Eflatun, İ. Ö. 420 'lerde, geometrinin, özellikle uzay geometrinin gelişimindeki duraksamayı ve yetersizliği, o dönem yaşamış olan hocası Sokrates 'in ağzından yakınlıkla şöyle dile getiriyor: "Bu konunun yeterince aydınlatılmamış olduğu doğrudur. Bunun iki nedeni var. Hem hiç bir devlet bu bilime (uzay geometri) gereken değeri vermediğinden yapılan araştırmalar büyük güçlükler nedeniyle ancak çok yavaş olarak yürüyor, hem de araştırmacıların bir yol göstericiye gereksinimleri vardır ki, onsu fazla bir şey yapmaları çok zordur. Fakat böyle bir yol göstericinin kendiliğinden ortaya çıkması olası değildir; ikincisi, böyle birisi çıksa bile, bugünkü ortama göre, bilginler kibirlerinden ötürü onu izlemek istemeyeceklerdir! Oysa bu bilime karşı gerekli saygıyı duyacak devlet, bütünüyle yol göstericiliği üzerine alırsa, o zaman onu dinleyeceklerdir ve bu bilgi dâhında sürekli ve zorlu araştırmalar sonucunda o alandaki gerçekler ortaya çıkmış olacaktır. Çünkü bugün bile bu bilim dalı, büyük kütle tarafından küçümsenmesine ve geri plana itilmesine karşın, onu kılğısal (pratik) bir yarar beklemeden, yalnızca büyük çekiciliğinin etkisiyle araştırmak isteyenler tarafından zorlu bir çalışma ile, tüm engellemelere karşın yükseltilmeye çalışılmaktadır. Demek ki onun tam ışığa kavuşması beklenmedik bir şey olmayacaktır."

IV. Eukleides' in Tarihsel Kanıtlanması



Dik açıyı ve dik üçgeni kim bilmez ? Bir açısı dik açı yani 90° olan bir üçgene (öteki iki açı zorunlu olarak dar açı olacaktır, çünkü iyi bilindiği gibi, bir üçgenin üç açısının toplamı iki dik açıya eşittir), dik üçgen denir. Dik açıyı oluşturan kenarlara bu dik üçgenin dik kenarları, dik açının karşısındaki kenara ise eğik kenar ya da 'hipotenüs' denir. Bir dik üçgende hipotenüsün uzunluğunun karesi iki dik kenarın uzunluk kareleri toplamına eşittir. Bu ünlü önermeye Pythagor Teoremi denir. Pythagor 'un adıyla anılan, oysa usta ve titiz matematik tarihçilerinin vurguladığı gibi, onun tarafından kanıtlandığını gösteren hiç bir kanıtın bulunmadığı bu ünlü teoremin Pythagor 'dan yüzlerce yıl önce Eski Çin ve Mısır 'da bilindiğini (kanıtlandığını değil, bilindiğini) biliyoruz. Tarih boyunca yüzlerce bağımsız kanıtlanması verilmiş olan bu ünlü önermenin, Eukleides 'in 15 kitapçıktan oluşan ünlü ve anıtsal başyapıtı Elemanlar 'ın birinci kitapçığında yer alan tarihsel kanıtlanmasını vermek istiyoruz. Bu ünlü kanıtlanmanın usta işi geometrinin yetkin bir örneğini oluşturduğunu ve üstelik neredeyse ortaokul bilgisi ile kavranabildiğini rahatlıkla söyleyebiliriz. Herhangi bir üçgenin alanının, herhangi bir kenarının uzunluğu ile bu kenarın karşısındaki köşeden bu kenara indirilen dikmenin uzunluğu çarpımının yarısına eşit olduğunu anımsamak, neredeyse bu tarihsel kanıtlanmayı kavramak için yeterlidir. Şimdi A tepe açısı dik (yani 90°) olan ABC dik üçgeninde bu dik açı karşısındaki BC kenarı (yani hipotenüs) üzerine BPQC karesini, öteki iki dik kenar üzerine ise sırasıyla UBAT ve

ACRS karelerini çizelim (bak. aşağıdaki şekil). Bilindiği gibi tüm kenarları eşit uzunlukta olan özel dikkörtgene kare denilir.

A köşesinden hipotenüse indirilen dikme *BC* kenarını *K* ve *PQ* kenarını ise *L* noktasında kessin. Birinci önemli gözlemimiz *UBC* ve *ABP* üçgenlerinin eşit olduklarını söyler. Gerçekten *UBC* üçgeninin *UB* kenarı, apaçaktır ki *ABP* üçgeninin *AB* kenarına, *UBC* üçgeninin *BC* kenarı ise *ABP* üçgeninin *BP* kenarına eşittir. Üstelik *UBC* üçgenindeki *UBC* tepe açısı ile *ABP* üçgenindeki *ABP* tepe açıları eşittir, çünkü bu her iki açı da dikkat edilirse $90^\circ + ABC$ toplam açısına eşittir. Üstelik bu eşit açılardan yan kenar uzunlukları da eşit olduğu için, bu üçgenlerde bu eşit açılar karşısında yer alan *UC* ve *AP* kenarları da eşit olur. İkinci önemli gözlemimiz, *UBAT* karesinin alan değerinin *UBC* üçgeninin alanının iki katına eşit olmasıdır, çünkü bu üçgende *UB* kenarının karşı köşesi olan *C* köşesinden *UB* kenarına indirilen dikmenin uzunluğu *UT* kenarının yani *AB* kenarının uzunluğuna eşittir, dolayısıyla *UB* ve *UT* kenarlarının uzunlukları çarpımı (ki *UBAT* karesinin alanıdır) *UBC* üçgeninin alan değerinin iki katıdır, çünkü *UBC* 'nin alanı bu çarpımın yarısıdır, bir üçgenin alanı için yukarıda söylenenleri anımsayın lütfen! *ABP* üçgeninin *BP* kenarının karşı köşesi olan *A* köşesinden bu kenara indirilen dikmenin uzunluğu *BK* kenarının uzunluğuna eşit olduğundan *PLKB* dikkörtgeninin alanı, *ABP* üçgeninin alan değerinin iki katına eşittir. Oysa *UBC* ve *ABP* üçgenleri eşit olduğundan $Alan(UBAT) = Alan(BPLK)$ bulunur. Benzer biçimde *BCR* ve *AQC* üçgenleri eşit olduğundan $Alan(ACRS) = Alan(BCR) = Alan(AQC) = Alan(LQCK)$ geçerlidir. Oysa apaçaktır ki $Alan(BPQC) = Alan(BPLK) + Alan(LQCK)$ olduğundan, sonuçta $Alan(BPQC) = Alan(UBAT) + Alan(ACRS)$ bulunur, bu ise, bir karenin alanı kenar uzunluğunun karesine eşit olduğundan, hipotenüsün uzunluğunun karesinin, *AB* ve *AC* dik kenarlarının uzunluklarının kareleri toplamına eşit olması demektir. Kanıtlama başarıyla bitirilmiştir.

V. Kuramsal ve Kılğısal Alanların Büyük Dehası: Arkhimedes

İ. Ö. üçüncü yüzyılın ortalarında, dünyanın kültür merkezi İskenderiye 'den çok uzaklarda, bir Yunan koloni kenti olan Siraküza 'da tüm eski dönemlerin tartışmasız en büyük matematikçisi, parlak deha Arkhimedes (Arşimed) yaşamaktaydı. Pheidias adında bir gökbilimcinin oğlu olan Arkhimedes 'in, döneminin ileri gelen ailelerinden birisinin üyesi olup olmadığını bilmiyoruz, ama onun Siraküza sarayının en yüksek çevreleriyle, bu arada kral Hieron ve onun oğlu ve ardılı olan Gelon ile dostluk kurduğu bilinmektedir. Onun bir süre Mısır 'da bulunmuş olması olasıdır. Diodoros 'un söylentisine göre suyu kuyulardan çıkarmak için Kochlias adı verilen helezonlu bir su tulumbası icat etmiş olup, bu tulumba İspanya 'daki gümüş madenlerinde de kullanılmıştı. İskenderiye 'de yaşayan gökbilimci Sisam 'lı Konon ile olan dostluğu onun bir süre bu kentte yaşadığının kanıtı sayılmaktadır. Arkhimedes 'in kişiliği ve çağdaşları üzerinde bırakmış olduğu büyük etki hakkında yeterli kanı edinmek için onun hakkında kesinlikle bilinen bir kaç olay ile yetinmemeli, kendisi ve olağanüstü buluşları çevresinde örülen söylencelere de başvurmalıyız. İşte bunlardan bazıları: Arkhimedes 'e saflığını ölçmek üzere verilmiş olan kral Heron 'un altın tacının öyküsünü bilmeyen yoktur. Arkhimedes 'in kendisini bu probleme vermiş olduğu sıralarda bir gün hamamda yıkanırken birden, tacın hacmini (ister Vitruvius 'un düşündüğü gibi, tacı su dolu bir kaba daldırarak taşan suyun ağırlığını tartmak, ister ötekilerinin ileri sürdüğü gibi, tacı yukarı iten basınç kuvvetini ölçmek yoluyla olsun) nasıl bulabileceği aklına gelince "heureka! heureka!" diye bağıarak eve koşması ünlüdür. Kral Hieron 'un Mısır kralı Ptolemaios 'a armağan vermek amacıyla yaptırdığı her türlü lüks ile donatılmış harika bir Siraküza gemisi bir türlü denize indirilemeyince, yardıma çağrılan Arkhimedes bu iş için tek bir kişinin kullanabileceği bir aygıt tasarladı. Daha sonra bu aygıtlı gemiyi denize indiren kral çöşkulu bir biçimde şöyle dedi: "Bugünden sonra Arkhimedes 'in her söylediğine inanılmalıdır". Romalı tarihçiler Polybios, Livius ve Plutarchos onun tarafından icat edilmiş araç ve makinalardan uzun uzadıya söz ederler. Romalıların Siraküza 'ya yaptıkları saldırılar, yetmiş yaşını aşmış matematikçinin kişisel yönetimi altında bu makinalarla geriye püskürtülüyordu. Güçlü mançıklar ağır kaya parçalarını uzaklardan Roma lejyonları üzerine fırlatıyor, akrep denilen daha küçük mançıklar düşman üzerine yakından kurşun yağdırıyorlardı. Deniz kıyısında ise bir takım vinçler dışarı çevrilerek Roma gemileri üzerine büyük taşlar ve ağır

kurşun parçaları düşürüyor ya da demirden kışkaçlar gemileri pruvasından tutup yukarı kaldırdıktan sonra kışkaçı açarak denize bırakıveriyordu, böylelikle batmalarına, en azından su almalarına neden oluyordu. Saldırıyı yöneten Romalı komutan Marcellus bu durum karşısında şaşkınlığa düşmüş ve kendi adamlarıyla "Denizi, kovayla su boşaltırcasına gemilerimize boşaltan, savaş kulelerimizi bizim için utanılacak bir tarzda döverek geri atan, bir sürü gülleyi hep birden aynı anda üzerimize fırlatarak yüz kollü söylence devini de geride bırakan bu geometri devi ile savaşmaktan vazgeçmemiz daha iyi olacak" diye alay etmişti. Plutarchos'un bildirdiğine göre, Arkhimedes için mekanik buluşlar, Kral Hieron'un kendisini, gerçekliğin gerekleriyle elle tutulur bir biçimde uğraşmak yoluyla, soyut bilgilerden biraz olsun vazgeçip, somut şeylere yönelerek üstün aklını sıradan insanların anlayışına da açması için onu inandırması üzerine, sanki oyuncakla oynarcasına uğraşmış olduğu, bir tür geometri-den ürettiği yan ürünlerdi. Plutarchos şöyle sürdürüyor:

"Bu buluşlar her ne kadar onu insanüstü bir dehanın ününü getirdiyse de, bu konular üzerine yazılı hiç bir şey bırakmak istememişti. Arkhimedes aygıtlar tasarlayıp gerçekleştirmeyi ve genel olarak kılışal (pratik) yarar amacıyla yapılan her tür çabayı aşağı ve sıradan buluyor ve çabalarını, yalnızca, güzellik ve yetkinlikleri nedeniyle yararlı olmanın dışında kalan şeylere yöneliyordu."

Plutarchos'a göre Arkhimedes matematiğe karşı büyük bir tutkunun tutsağıydı:

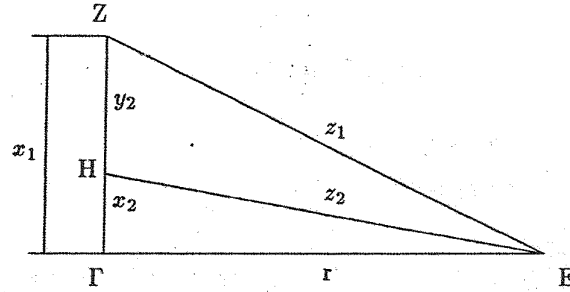
"O peşini hiç bırakmayan bir esin perisinin büyüü altında, yemek yemeyi unutuyor ve bedeninin bakımını umursamıyordu; çoğu kez olduğu gibi zorla yıkanmaya ve yağlanmaya götürüldüğünde bile, sözcüğün tam anlamıyla esin perilerinin tutsağı olarak kül üzerinde geometrik şekiller çizer ve parmağıyla yağlanmış bedeni üzerine çizgiler çekerdi."

İngiliz matematik tarihçisi T. Heath şunları yazıyor: "Arkhimedes'in risalelerinin ayırım yapılmaksızın tümü, matematik anlatım gücünün birer anıtıdır. Ereğin adım adım açıklanması, teoremlerin ustaca sıralanışı, amaçla doğrudan ilgili olmayan her tür ayrıntının bir kenara itilişi, tüm akıl yürütmenin en kusursuz bir biçimde tamamlanması, yetkinlik bakımından o denli büyük bir etki bırakmaktadır ki, okuyucu yazının karşısında derin bir saygıyla karışık bir korku duygusuna kapılıyor. Plutarchos'un (Marcellus'un Yaşamı, Bölüm 17'de) söylediği şu sözler doğrudur: O geometrinin en güç ve karmaşık problemlerini yalın ve apaçık teoremler biçiminde ifade ettiği kanıtlamalarla çözerdi. Fakat onun, vardığı sonuçlara ulaşmak için kullandığı yöntem bir giz perdesiyle örtülü kalmıştır. Onun bulmuş olduğu teoremlerin, onlara son biçimini vermiş olduğu risalelerindeki akıl yürütmelerle bulunmadıkları apaçıktır. Eğer Arkhimedes'in geometrik risalelerinden başka bir şey elimizde bulunmasaydı, Wallis'in söylediği gibi, onun kendisinden sonra gelenlerden kendi buluş yöntemini esigemek, ama buna karşın onlara bulmuş olduğu sonuçları kabul ettirmek istermişçesine, araştırmalarının izlerini bilerek örtmüş olduğunu düşünecektik. Yalnızca Arkhimedes değil, Wallis'e göre, hemen tüm eski dönem matematikçileri, problemlerin çözümlenmesinde kullandıkları yöntemleri, böyle bir yöntemle sahip oldukları apaçık iken, kendilerinden sonra gelenlerden o denli saklamışlardır ki, yeni dönem matematikçilerine eskisini aramaktansa onları kavramak için yeni bir çözümleme yöntemi bulmak daha kolay gelmiştir. Tek ayrık durum, Heiberg'in mutlu bir raslantıyla bulup, kazınmış özgün metnin üzerine yeni bir metin yazılmış olmasına karşın hemen hemen tümüyle okuyup gün ışığına çıkarmayı başardığı, Arkhimedes'in Yöntem'i olmuştur. Arkhimedes bu kitabında alan ve hacimler konusunda bir takım teoremleri, bir şeklin parçalarını alan ya da hacim ölçüleri bilinen daha basit bir şeklin parçalarıyla karşılıklı kıyaslayıp tartmak yoluyla, kısacası mekanik yöntemlerle nasıl bulduğunu anlatmaktadır. Bilimsel bir kanıtlama oluşturmamalarına karşın, o, bir takım teoremlerin doğruluğunu bize sezdiren araç ve yöntemlerle, bu teoremlerin doğruluklarının tam anlamıyla geçerli olabilmesi için verilmesi gereken sağlıklı ve kabul edilebilir geometrik yöntemlerle yapılmış kesin kanıtlamaları, özenli bir biçimde birbirinden ayırmaya büyük önem vermektedir. Bu konuda Arkhimedes şunları söylemektedir: 'Bazı şeyleri bana esinlendiren mekanik yöntemler oldu, fakat onları sonradan geometri ile kanıtlamak zorundaydım, çünkü bu

yöntemler gerçek bir kanıtlama oluşturmazlardı. Bununla birlikte, önce bu yöntemle çözüme ilişkin bilgi edindikten sonra kanıtlama yapmanın, kanıtlama öncesi böyle bir bilgi edinmeksizin bunu yapmaktan daha kolay olduğu apaçıktır.' "

VI. Arkhimedes 'in Bir Kanıtlaması

Arkhimedes 'in kuramsal dehasını gösteren onlarca kanıtlama arasında, şimdi vereceğimiz kanıtlama, tarihsel açıdan en ünlü kanıtlamalardan birisidir kuşkusuz. Arkhimedes burada, ilk kez bir çemberin uzunluğunu çapı yoluyla yaklaşık hesaplama başarısını göstermekte ya da daha sağlıklı bir biçimde söyleyecek olursak yarıçapı r ve dolayısıyla çapı $d = 2r$ olan bir çemberin uzunluğunun $3\frac{1}{7}$ 'den küçük buna karşılık $3\frac{10}{71}$ 'den ise büyük olduğunu kanıtlamaktadır. Böylelikle bir çemberin uzunluğunun çapına oranı olan sabitin, ünlü adıyla π (pi) sayısının $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ eşitsizliklerini gerçeklediği anlaşılmaktadır. Bu ünlü sayının rasyonel olmadığı ancak 1880 'lerde kanıtlanabilecektir. Arkhimedes aşağıdaki şekilde gördüğü gibi, önce merkezi E ve yarıçapı r olan çembere (bu çember şekilde çizili değildir.) önce Γ noktasından bir teğet çizmekte, daha sonra E köşesindeki 30 derecelik $\hat{\Gamma EZ}$ açısının EZ kenarı ile bu teğeti Z noktasında kesişmektedir. O halde ΓZ sözü edilen çembere dışından çizilen düzgün altıgenin (altıkenarının) bir kenarının yarısıdır, çünkü otuz derecelik bu açı aslında tepe noktası E ve tepe açısı 60° olan ve $E\Gamma$ doğrusunu bu tepe açısının açıortayı kabul eden, şekilde tam yarısını gördüğümüz bir eşkenar üçgenin (öteki yarısı, gördüğümüz şeklin alt tarafında simetrik bir konumdadır ve çizilmemiştir) taban kenar uzunluğunun yarısıdır. Başka bir deyişle $2x_1$ sayısı, çembere dışından çizilmiş ve altıda bir dilimi, ancak üst yarısını görebildiğimiz bu eşkenar üçgen olan düzgün altıgenin bir kenarının uzunluğudur. Şimdi $\hat{\Gamma EZ}$ açısının açıortayı ile $Z\Gamma$ kenarının kesişimi H noktası olsun. HT ve ZH doğru parçalarının uzunluklarını ise sırasıyla x_2 ve y_2 , ZE ve HE doğru parçalarının uzunluklarını ise sırasıyla z_1 ve z_2 ile gösterelim. ΓZ ise x_1 ile gösterilsin. O halde kolayca $x_1 = x_2 + y_2$ bulunur.



ZTE dik üçgeninde otuz derecelik \hat{ZEH} açısının sinüs değerinin, karşı dik kenar uzunluğunun, hipotenüsün uzunluğuna oranı olduğu için $x_1 : z_1 = \sin 30^\circ = 1 : 2$ nedeniyle önce $z_1 = 2x_1$ ve sonra bu dik üçgende Pythagor Teoremi nedeniyle $4x_1^2 = z_1^2 = r^2 + x_1^2$ ve dolayısıyla $r^2 = 3x_1^2$, yani $r : x_1 = \sqrt{3}$ bulunur. Bu aşamada Arkhimedes, yine kendi bulduğu

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

eşitsizliğinden yararlanmaktadır. Arkhimedes 'in bu şaşırtıcı eşitsizliği nasıl elde ettiğini bilmiyoruz. M. Cantor, T. Heath, K. Vogel ve C. Müller & O. Toeplitz gibi ünlü ve saygın matematik tarihçileri, Arkhimedes 'in olası kanıtlama yöntemi için çeşitli görüşler bildirmişlerdir. Evet Arkhimedes 'in kanıtlamasını sürdürüelim.

Ünlü açıortay teoremi, bir üçgende bir açıortayın karşı kenarda belirlediği doğru parçalarının birbirine olan oranının, açının yanıl kenar uzunluklarının birbirine oranına eşit olduğunu söylediği için $x_2 : y_2 = r : z_1$ ve dolayısıyla $x_2 z_1 = r y_2$ ve her iki yana $r x_2$ ekleyerek $x_2(z_1 + r) = x_2 z_1 + r x_2 = r y_2 + r x_2 = r(x_2 + y_2)$ ve dolayısıyla $r : x_2 = (z_1 + r) : (x_2 + y_2) = (z_1 + r) : x_1 = (z_1 : x_1) + (r : x_1)$

bulunur. Yukarıdaki hesaplamalar nedeniyle $r : x_1 = \sqrt{3} > 265 : 153$ ve $z_1 : x_1 = 2 = 306 : 153$ bulunduğundan sonuçta bunlar kullanılarak

$$r : x_2 > (306 : 153) + (265 : 153) = 571 : 153$$

elde edilir. Bu sonuçtan yararlanarak bu kez

$$z_2 : x_2 = (r^2 + x_1^2) : x_2^2 + 1 = (r^2 x_1^2) + 1 > (571^2 : 153^2) + 1$$

ve bu son kesrin payının $349450 > (591\frac{1}{8})^2$ gerçekleştiği gözlenerek sonuçta

$$z_2 : x_2 > 591\frac{1}{8} : 153$$

bulunur. Burada x_2 uzunluğu, sözü edilen çemberin dışına çizilen bu kez düzgün oniki kenarlıının kenar uzunluğunun yarısıdır. Bu düzgün onikigenin bir dilimi bir eşkenar üçgen olup, HTE üçgeni bu üçgenin üst yarısıdır, alt yarısı yine şekilde görülmektedir. Arkhimedes bundan sonra bu kez onbeş derecelik \hat{HET} açısını iki eşit parçaya bölerek, elde edilen düzgün yirmidörtgenin kenar uzunluğunun yarısı x_3 olmak üzere, tümüyle benzer yöntemlerle

$$r : x_3 > 1162\frac{1}{8} : 153$$

$$z_3 : x_3 > 1172\frac{1}{8} : 153$$

bir kez daha, son açının ikiye bölünmesiyle

$$r : x_4 > 2334\frac{1}{4} : 153$$

$$z_4 : x_4 > 2339\frac{1}{4} : 153$$

ve son bir kez daha aynı işlemi yaparak

$$r : x_5 > 4673\frac{1}{2} : 153$$

bulmaktadır. Dikkat edilirse $2x_5$ uzunluğu, artık, çemberin dışına çizilen düzgün altıgenin bir kenarının uzunluğudur. O halde, çapın, yani $2r$ 'nin, dışarı çizilen bu düzgün doksan altıgenin çevre uzunluğuna, yani $96 \times 2x_5$ sayısına oranı, elbette $(2r : 2x_5) \times (1 : 96)$ olup $(4673\frac{1}{2} : 153) \times (1 : 96) = 4673\frac{1}{2} : 14688$ kesrinden büyük olur. O halde oranları ters çevirirsek söz konusu doksanalıgenin çevre uzunluğunun çapa oranı $(14688) : (4673\frac{1}{2})$ sayısından ve dolayısıyla $3\frac{1}{7}$ 'den küçüktür, çünkü, 14688 sayısı, $(4673\frac{1}{2}) \times (3\frac{1}{7})$ sayısından küçüktür. Çemberin uzunluğu ise, apaçaktır ki, çemberin dışına çizilen doksanalıgenin çevre uzunluğundan küçük olduğu için, Arkhimedes böylelikle, çember uzunluğu:çapı $3\frac{1}{7}$ eşitliğini göstermiş olmaktadır. Arkhimedes daha sonra, bu kez dairenin içine çizilen doksanalıginden yararlanarak

$$3\frac{10}{71} < \text{çember uzunluğu} : \text{çap}$$

eşitsizliğini elde etmektedir. Perge 'li büyük geometri ustası Apollonios yaklaşık 40 yıl sonra π sayısı için Arkhimedes 'inkinden daha iyi bir yaklaşım verecektir.

VII. Katro Dağındaki Sisam Tüneli

Evet, Van Der Waerden 'den aktarıyoruz: "İyonya ve güney İtalya'daki harika tapınakları (Efes 'teki Artemis tapınağı dünyanın yedi harikasından biriydi) inşa eden mimarlar biraz olsun geometri bilmiyorlar

mydı? Açıkça söyleyelim, bunun yanıtını bilmiyoruz. Romalılarda, matematik bilgisi olmadan görkemli binalar yapılabildiğini görüyoruz. Romalı mimar Vitruvius, bir sütunlu avlunun nasıl inşa edilebileceğini tüm ayrıntılarıyla anlatıyor, fakat burada hiç matematik kullanmıyor. Tek ayrıksı durum, Eski Yunanda, Sisam Tünelinin inşaat planlarının matematik hazırlığı hakkında bildiklerimizdir. İ. Ö. 530 dolaylarında, güçlü tiran Polykrates 'in buyruğu ile Eupalinos, Sisam adasındaki Kastro dağının kireş taşı kütlelerini delen bir su yolu inşa etmişti. Tarihçi Herodotos bu tünel için şunları yazmaktadır: "Sisamlıların üç yapıtı Hefenler arasında kendi örneklerinin en büyükleridir. Birincisi yüzelli kulaç yüksekliğindeki bir dağı delen iki ağızlı bir tüneldir. Tünelin uzunluğu yedi stadion, yükseklik ve genişliği her iki yanda sekizer ayaktır. Tüm tünel boyunca ve onun tamamen içinde kazılmış yirmi arşın derinliğinde üç ayak genişliğinde bir hendek vardır ki, zengin bir kaynaktan elde edilen sular bunun içinden künkler aracılığıyla kente akıtılmaktadır. Bu tüneli inşa eden Naustrophos 'un oğlu Megara 'lı Eupalinos idi." 1882 yılında Alman kazı bilimci E. Fabricius ve ekibi Sisam adasındaki eski yapıtları araştırırken tüneli hiç bozulmamış bir durumda Herodotos 'un betimlediği bir biçimde buldular. Tünelin uzunluğu 1 km, yükseklik ve genişliği 2m olup, içinde künklerin döşenmiş olduğu derin bir oluk ve havalandırma ve molozların temizlenmesi için düşey bacalar ile işçilerin lambalarını koydukları hücreler vardı. Yukarı ucunda 2m aşağı ucunda 8m derinliğinde olan oluk, olasıdır ki tünelin ilk tasarlanan eğiminin sonradan çok az olduğu anlaşıldığı için kazılmıştı. Şimdi en önemli noktaya geliyoruz: Tünelin kazılmasına iki ağızdan birden başlandığı anlaşılmıştır. Her iki yandan kazan işçiler tünelin ortasında yatay olarak 10m, düşey olarak da 3 metreyi bulmayan bir yanıyla birleşmişlerdir. Parlak bir başarı! İ. Ö. 700 dolaylarında Yahuda Kralı Ezechias, Kudüs yakınındaki kayalıkların içinde buna benzer bir su yolu geçirtmek istediğinde, işçiler tünelin ilerleme doğrultusundan sapılıp sapılmadığını yukardan yapılan düşey sondajlarla çok ilkel bir biçimde kontrol etmek zorunda kalmışlar ve sonuçta iki ağız arasındaki uzaklığın iki katı uzunluğunda bir zikzak tünel ortaya çıkmıştı. Eupalinos bu işi çok daha iyi başarmıştı ve açmış olduğu tünel neredeyse tam bir doğru biçimindeydi. İskenderiye 'li Heron 'a göre Eupalinos Dioptra adlı bir aygıttan yararlanmıştı. Peki, Eupalinos bu başarıyı nasıl bir yöntem kullanarak gerçekleştirmişti?"

Van Der Waerden, bundan sonra iki sayfa boyunca, Heron 'un, Eupalinos 'un büyük bir olasılıkla yararlandığını düşündüğü geometrik yöntem için verdiği çözümü ayrıntılarıyla anlatmaktadır. Yazıyı daha fazla uzatmamak için bunları aktarmıyoruz.

VIII. Son Söz: Bir Ülküselleştirme

Kurduğu akademide, öğrencilerinden, kendilerini felsefeye adamadan önce adamakıllı matematik öğrenmelerini isteyen Eflatun, Devlet adlı yapıtında diyor ki:

"Aklın görme aygıtı matematik aracılığı ile temizlenir ve ateşe tutulmuşçasına yeni bir yaşam gücüne kavuşur. Öteki uğraşlar ise onu yok etmeye ve onun sayesinde gerçeği görebildiğimiz için canlı kalması bin özdeksel gözden daha fazla gerekli olan akıl gözünü köreltmeye çalışırlar."

KAYNAKLAR

Eski Mısır, Babilonya ve Eski Yunan matematiğinin tarihsel gelişimi konusunda Türkçede tek kapsamlı kaynak B. L. Van Der Waerden, "Bilimin Uyanışı" (Çev: O. Ş. İçen ve Y. Öner), Türk Matematik Derneği Yayını, İstanbul, 1994 'tür. Matematikçi olan ya da olmayan ve temel geometri konusunda bilgi edinmek isteyenler için, üç küçük kitapçıktan oluşan B. V. Kutuzov, Geometri I, II, III (Çev: Hüseyin Demir) Türk Matematik Derneği Yayınları, İstanbul, 1963 kavranması gerçekten kolay, büyük ustalıkla yazılmış küçük bir başyapıttır. Onlarca temel kavramı anlatılıp onlarca teoremin kanıtlandığı bu kitaplarda, bir açının üçe bölünmesi, kübün iki kat kalınması gibi tarih boyunca amatörlerin ilgisini çekmiş bazı tarihsel geometri sorularının, yalnızca pergel ve cetvel kullanarak çözülebilmemesinin neden kesinkes olanaksız olduklarının da ayrıntılı kanıtlamalarının yanısıra okurlar Eukleidyen olmayan geometri konusunu da bulabilirler. Piyasada bulunmayan tüm bu kitapları edinmek isteyenler, İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Vezneciler, 34459-İSTANBUL adresinde Bayan Gülşeren Çiçek 'e kişisel olarak ya da mektupla başvurabilirler.