ERDÖS 'ÜN BİR PROBLEMİ

Ogün Öge
Özel Selim Pars Lisesi, Florya/İSTANBUL

Giriş. P. Erdös, $k > 8$ ise 2^k sayısının 3 'ün farklı kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılamayacağını iddia etmiştir. Erdös 'ün bu problemi hala çözülememiştir [1]. Bu çalışmada Erdös 'ün iddiasının sonsuz sayıda k için doğru olduğunu gösterdik.

TEMEL SONUÇLAR:

$k > 8$ bir tamsayı olmak üzere 2^k 'nın 3 tabanına göre yazılışı:

$$2^k = a_n 3^n + a_{n-1}3^{n-1} + a_{n-2}3^{n-2} + ... + a_j 3^j + a_{j-1}3^{j-1} + ... + a_1 + a_0 \qquad (1)$$

olsun. Eğer bu yazılışta bir i $(0 \leq i \leq n)$ için $a_i = 2$ ise, 2^k sayısı 3 'ün farklı kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılamaz. O halde Erdös 'ün iddiası şuna denktir:

$k > 8$ olmak üzere,

$$2^k = a_n 3^n + a_{n-1}3^{n-1} + a_{n-2}3^{n-2} + ... + a_1 3 + a_0$$

ise, a_i sayılarından en az biri 2 'dir.

Öncelikle (1) yazılışında $a_0 \neq 0$ 'dır. Çünkü $a_0 = 0$ için, $2^k = 3(a_n 3^{n-1} + ... + a_1)$ olup buradan $3|2^k$ elde edilir ki bu mümkün değildir. Şimdi (1) yazılışında bir katsayı (varsayalım ki a_j $j \geq 1$ katsayısı) 2 olsun. (1) 'deki eşitliği *mod* 3 için yazarsak,

$$2^k \equiv a_j 3^j + a_{j-1}3^{j-1} + ... + a_1 3 + a_0 \equiv 2.3^j + a_{j-1}3^{j-1} + ... + a_1 3 + a_0 \; (mod\; 3^{j+1})$$

elde edilir.

Şimdi $t = 2.3^j + a_{j-1}3^{j-1} + ... + a_1 3 + a_0$ dersek, $2^k \equiv t \; (mod\; 3^{j+1})$ bulunur. Fakat $a_0 \geq 1$ 'den $t \geq 2.3^j + 1$ elde edilir. O halde şunu elde ederiz:

Sonuç 1: 2^k $(k > 8)$ sayısının 3 tabanındaki (1) yazılışında 3^j 'nin katsayısı 2 ise,

$$2^k \equiv t (mod\; 3^{j+1}), \quad t \geq 2.3^j + 1$$

'dir.

Şimdi $k > 8$ olmak üzere bir j $(j \geq 1)$ tamsayısı için

$$2^k \equiv t \;\; (mod\; 3^{j+1}) \qquad (2)$$

olup burada $t \geq 2.3^j + 1$ olsun. ($t < 3^{j+1}$ olduğunu kabul edebiliriz.) Kongrüans tanımından

$$2^k \equiv m.3^{j+1} + t \qquad (3)$$

elde edilir. Burada $m > 0$ 'dır. Çünkü $m < 0$ olsa, $2^k \leq -3^{j+1} + 3^{j+1} - 1 < -1$ olur ki bu mümkün değildir. $m = 0$ da olamaz, çünkü bu durumda $2^k = t < 3^{j+1} < 2^k$ çelişkisi elde edilir. $m > 0$ sayısının 3 tabanına göre yazılışı

$$m = b_r 3^r + b_{r-1}3^{r-1} + ... + b_1 3 + b_0 \quad (0 \leq b_i \leq 2)$$

olsun. Bunu (3) 'te kullanarak,

$$2^k = b_r 3^{r+j+1} + b_{r-1} 3^{j+r} + ... + b_0 3^{j+1} + t \tag{4}$$

elde edilir. t sayısının 3 tabanındaki yazılışı

$$t = c_s 3^s + ... + c_1 3 + c_0 \quad (0 \leq c_i \leq 2) \tag{5}$$

olsun. Burada $c_s = 2$ ve $j = s$ olduğunu gösterelim. $j < s$ olamaz, çünkü $c_s \geq 1$ olduğundan $t \geq 1.3^{j+1}$ bulunur ki bu $t < 3^{j+1}$ ile çelişir. $s < j$ ise,

$$t \leq 2.3^{j-1} + 2.3^{j-2} + ... + 2.3 + 2 = 2(1 + 3 + ... + 3^{j-1}) = 2.\frac{3^j - 1}{3 - 1},$$

$t \leq 3^j - 1$ bulunur ki bu $t \geq 2.3^j + 1$ ile çelişir. $s = j$ olsun. Bu durumda $c_s = 2$ olmalıdır. Aksi takdirde, $c_s = 1$ ise,

$$t \leq 3^j + 2.3^{j-1} + 2.3^{j-2} + ... + 2.3 + 2 = 3^j + 2(1 + 3 + ... + 3^{j-1}) = 3^j + 2.\frac{3^j - 1}{3 - 1},$$

$t \leq 2.3^j - 1$ bulunur ki bu da $t \geq 2.3^j + 1$ ile çelişir. O halde (5) 'teki yazılış

$$t = 2.3^j + c_{j-1} 3^{j-1} + ... + c_1 3 + c_0$$

olup bunu (4) 'te kullanarak

$$2^k = b_r 3^{r+j+1} + ... + b_0 3^{j+1} + 2.3^j + ... + c_1 3 + c_0$$

bulunur ki bu bize 3 tabanına göre yazılışında en az bir basamağın (sondan $(j+1)$. basamağın) 2 olduğunu gösterir. Diğer yandan, $2^k \equiv 2 \ (mod\ 3)$ ise, bu bize $2^k \equiv a_n 3^n + ... + a_1 3 + 2$ olduğunu gösterir ki burada da birler basamağı 2 'dir. O halde şu teoremi elde ederiz:

Teorem 1. $k > 8$ bir tamsayı olmak üzere 2^k 'nın 3 tabanına göre yazılışında en az bir basamağın 2 olması için gerek ve yeter koşul,

$$\begin{array}{ll}
2^k \equiv t_1 (mod\ 3) & t_1 = 2 \\
2^k \equiv t_2 (mod\ 3^2) & t_2 \geq 2.3 + 1 \\
2^k \equiv t_3 (mod\ 3^3) & t_3 \geq 2.3^2 + 1 \\
\vdots & \\
2^k \equiv t_j (mod\ 3^j) & t_j \geq 2.3^{j-1} + 1 \\
\vdots & \\
2^k \equiv t_q (mod\ 3^q) & t_q \geq 2.3^{q-1} + 1
\end{array} \tag{6}$$

kongrüanslarından en az birinin sağlanmasıdır. (Burada q tamsayısı $3^{q+1} > 2^n > 3^q$ koşulunu gerçekleyen pozitif sayıdır.)

Şimdi bazı k değerleri için (6) 'daki kongrüanslardan bazılarının sağlandığını göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki teoremi kullanacağız:

Teorem 2. (Euler) $(a, m) = 1 \quad (a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, m \geq 1)$ olmak üzere $a^{\varphi(m)} \equiv 1 (mod\ m)$ 'dir.

$m = 3^2$ için Euler Teoremini uygularsak, $\varphi(3^2) = 2.3^{2-1} = 6$ olduğundan $2^6 \equiv 1 (mod\ 3^2)$ elde edilir. Kongrüansların özelliklerinden $2^6 \equiv 1 (mod\ 3)$ olduğu da çıkar. Şimdi $2^k \quad (k > 8)$ sayısını 6 ile bölelim. $k = 6n + j$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\begin{array}{lll}
j=0 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n} & \equiv 1\ (mod\ 3), & t_1 = 1 \neq 2; \\
j=1 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+1} & \equiv 2\ (mod\ 3), & t_1 = 2; \\
j=2 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+2} & \equiv 1\ (mod\ 3), & t_1 = 1 \neq 2; \\
j=3 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+3} & \equiv 2\ (mod\ 3), & t_1 = 2; \\
j=4 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+4} & \equiv 1\ (mod\ 3), & t_1 = 1 \neq 2; \\
j=5 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+5} & \equiv 2\ (mod\ 3), & t_1 = 2
\end{array}$$

bağıntılarını elde ederiz. Yine $mod\ 3^2$ 'yi kullanarak,

$$\begin{array}{lll}
j=0 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n} & \equiv 1\ (mod\ 3^2) & 1 \not\geq 2.3+1 \\
j=1 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+1} & \equiv 2\ (mod\ 3^2) & 2 \not\geq 2.3+1 \\
j=2 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+2} & \equiv 4\ (mod\ 3^2) & 4 \not\geq 2.3+1 \\
j=3 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+3} & \equiv 8\ (mod\ 3^2) & 8 \geq 2.3+1 \\
j=4 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+4} & \equiv 7\ (mod\ 3^2) & 7 \geq 2.3+1 \\
j=5 \text{ için } 2^k \equiv 2^{6n+5} & \equiv 5\ (mod\ 3^2) & 5 \not\geq 2.3+1
\end{array}$$

elde edilir. O halde Teorem 1 'den dolayı şu son cu elde ederiz:

Sonuç 2. $k > 8$ bir tamsayı olmak üzere, $k = 6n+1$, $6n+3$, $6n+4$, $6n+5$ formunda ise, 2^k sayısı 3 'ün farklı kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılamaz.

Bu formda olan pozitif sayıların sayısı sonsuz olduğundan şunu elde ederiz:

Sonuç 3. Sonsuz sayıda k için Erdös 'ün iddiası doğrudur.

Şimdi $m = 3$ için Euler Teoremini uygularsak $\varphi(3^3) = 2.3^2 = 18$ olup, $2^{18} \equiv 1(3^3)$ bulunur. Bunu kullanarak $k = 18n + j$, $j = 0, 1, 2, 3, ..., 17$ olmak üzere

$$\begin{array}{lllll}
j=0 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 1\ (3^2), & 2^k \equiv 1\ (3^3) & \\
j=1 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 2\ (3^2), & 2^k \equiv 2\ (3^3) & (*) \\
j=2 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 4\ (3^2), & 2^k \equiv 4\ (3^3) & \\
j=3 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 8\ (3^2), & 2^k \equiv 8\ (3^3) & (*) \\
j=4 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 7\ (3^2), & 2^k \equiv 16\ (3^3) & (*) \\
j=5 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 5\ (3^2), & 2^k \equiv 5\ (3^3) & (*) \\
j=6 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 1\ (3^2), & 2^k \equiv 10\ (3^3) & \\
j=7 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 2\ (3^2), & 2^k \equiv 20\ (3^3) & (*) \\
j=8 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 4\ (3^2), & 2^k \equiv 13\ (3^3) & \\
j=9 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 8\ (3^2), & 2^k \equiv 26\ (3^3) & (*) \\
j=10 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 7\ (3^2), & 2^k \equiv 25\ (3^3) & (*) \\
j=11 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 5\ (3^2), & 2^k \equiv 23\ (3^3) & (*) \\
j=12 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 1\ (3^2), & 2^k \equiv 19\ (3^3) & (*) \\
j=13 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 2\ (3^2), & 2^k \equiv 11\ (3^3) & (*) \\
j=14 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 4\ (3^2), & 2^k \equiv 22\ (3^3) & (*) \\
j=15 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 8\ (3^2), & 2^k \equiv 17\ (3^3) & (*) \\
j=16 \text{ için} & 2^k \equiv 1\ (3), & 2^k \equiv 7\ (3^2), & 2^k \equiv 7\ (3^3) & (*) \\
j=17 \text{ için} & 2^k \equiv 2\ (3), & 2^k \equiv 5\ (3^2), & 2^k \equiv 14\ (3^3) & (*)
\end{array}$$

Bu tabloda "(*)" ile gösterilenlerde Teorem 2 'deki kongrüanslardan en az biri sağlanır. Bunların sayısı 14 tanedir. O halde şunu elde edebiliriz:

Teorem 3. $k > 8$ ve $k = 18n + j$, $(j \neq 0, 2, 6, 8)$ için 2^k, 3 'ün farklı kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılamaz.

Şimdi $N > 8$ bir tamsayı olsun. $k = 18n + j,\ 0 \leq j \leq 17$ ise, bu formda olan ve $8 < k \leq N$ koşulunu gerçekleyen sayıların sayısını bulalım.

$$8 < 18n + j \leq N \quad \text{ve} \quad 1 \leq \frac{8-j}{18} < n \leq \frac{N-j}{18} < \frac{N}{18} - 1$$

olup bu formda olan sayıların sayısı en az $\frac{N}{18} - 1$ 'dir. O halde bunu kullanarak aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 4. $N > 8$ olmak üzere $8 < k \leq N$ koşulunu gerçekleyen sayıların en az $\frac{14}{18}N - 14$ tanesi için Erdös 'ün iddiası doğrudur.

Euler formülünü 3^t $(t > 3)$ için kullanırsak Teorem 4 'teki $\frac{14}{18}$ oranının daha da büyük olacağı sezilmektedir.

Böylece bu çalışmada Erdös 'ün bu iddiasının k 'nın belirli sonsuz formlarda olması halinde doğru olduğu sonucunu elde ettik. Bu bulgu Erdös 'ün bu iddiasının doğru olduğu savını kuvvetlendirmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Richard, K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory, Springer-Verlag (1994).

BİR BOYAMA PROBLEMİNDE "FERMAT SÜRPRİZİ"

p sayısı asal olmak üzere, bir daire p tane eşit dilime bölünmüştür. Verilmiş n rengi kullanarak dilimleri boyuyoruz. (Her dilim, sadece, bir renk kullanılarak boyanıyor!) Dairenin dönmesiyle çakışan durumları bir kez saymak koşuluyla, dairenin kaç farklı boyanmasını elde etmek mümkündür?

Çözüm. Her dilimi n tane rengin herhangi biri ile boyayabileceğimizden, daire için n^p tane boyama elde ederiz, ve bunlardan $n^p - n$ tanesinde en az iki renk kullanılmıştır. Dönmeler sonucu çakışan durumları bir kez saymak durumunda olduğumuzdan, en az iki rengin kullanılmış olduğu farklı boyama sayısı $\frac{n^p-n}{p}$ olacaktır. Bu sayıya, sadece bir renk kulanılarak yapılan boyama sayısını (yani n sayısını) da eklersek, $\frac{n^p-n}{p} + n$ sayısı problemde bulunması istenen sayı olur.

Bu formülden görüldüğü gibi, p 'nin asal olması halinde $n^p - n$ sayısı p 'ye tam bölünür. İşte size Fermat 'nın "Küçük Teoremi"!
