

## PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

**Uyarı:** Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

– Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

– Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

– Çözümleri, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA adresine 31 Ocak 2001 tarihine kadar gönderiniz.

### ALİŞTİRMA PROBLEMLERİ

**A.221.** Terimleri tamsayılar olan bir sonsuz aritmetik dizinin bir teriminin tam küp olduğunu varsayalım. Bu dizinin terimleri içinde sonsuz çoklukta tam küpler bulunduğunu kanıtlayınız.

**A.222.** İstenilen dört tanesinin bir ortak noktası bulunan beş çemberin beşinin de bir noktadan geçtiğini kanıtlayınız.

**A.223.** Düzlem üzerinde alınmış  $A, B, C, D$  noktaları öyledir ki, herhangi  $P$  noktası için  $|PA| + |PD| \geq |PB| + |PC|$  eşitsizliği sağlanmaktadır.  $B$  ve  $C$  noktalarının  $AD$  doğru parçası üzerinde bulduklarını ve  $|AB| = |CD|$  olduğunu gösteriniz.

**A.224.** Negatif olmayan her  $a$  ve  $b$  sayıları için

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

**A.225.**  $ABC$  üçgeninin  $[AD]$  yüksekliği üzerinde bir  $P$  noktası alınıyor,  $BP$  ve  $CP$  doğrularının  $[AC]$  ve  $[AB]$  ile kesişim noktaları sırasıyla  $E$  ve  $F$  ile gösteriliyor.  $[DA]$ 'nın,  $FDE$  açısına ait açıortay olduğunu ispatlayınız.

### YARIŞMA PROBLEMLERİ

**Y.221.** Her  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  için  $x_i \geq 0$  ve  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 10$  bağıntılarını sağlayan  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  sayıları için  $S = x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$  toplamının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

**Y.222.** Her  $n \in \mathbb{N}$  için sistemin tüm reel çözümlerini bulunuz:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 3$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = 3^2$$

...

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n + \dots + x_n^n = 3^n$$

**Y.223.** Her  $\alpha \leq 1$  ve  $1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n > 0$  sayıları için

$$(1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n)^\alpha \leq 1 + 1^{\alpha-1}x_1^\alpha + 2^{\alpha-1}x_2^\alpha + \dots + n^{\alpha-1}x_n^\alpha$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

**Y.224.** Uzayda uzunlukları eşit olan 3 doğru parçası rasgele yerleştirilmiştir. Bu parçaların ortogonal (dikey) izdüşümlerinin eşit olduğu bir düzlemin varlığını gösteriniz.

**Y.225.** Biçimini değiştirmeyen bir  $ABC$  üçgeninin  $A$  köşesi sabit olup  $B$  köşesi bir çember üzerinde hareket etmektedir.  $C$  köşesinin geometrik yerinin bir çember olduğunu ispatlayınız.

### ÇÖZÜMLER

**A.211.** Her biri 1 veya  $-1$ 'e eşit olan  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sayıları için  $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$  eşitliğinin sağlandığı bilinmektedir.  $n$  sayısının 4'e bölündüğünü kanıtlayınız.

**Çözüm.** Her  $i$  için  $a_i = \pm 1$  olduğundan, her  $i, j = 1, 2, \dots, n$  için  $a_i a_j = \pm 1$  olacaktır. Dolayısıyla,  $(a_1 a_2) \cdot (a_2 a_3) \dots (a_n a_1) = \pm 1$  olmalıdır. Öte yandan,  $(a_1 a_2) \cdot (a_2 a_3) \dots (a_n a_1) = (a_1 a_2 \dots a_n)^2 > 0$  olacağından,  $(a_1 a_2) \cdot (a_2 a_3) \dots (a_n a_1) = 1$  olduğunu söyleyebiliriz. Öyleyse,  $a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_{n-1} a_n, a_n a_1$  sayıları içerisindeki negatif sayılar sayısı (ona  $m$  diyelim) çift olmak zorundadır:  $m = 2k$ . Fakat,  $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n + a_n a_1 = 0$  olduğundan;  $a_1 a_2, a_2 a_3, \dots, a_{n-1} a_n, a_n a_1$  sayıları içindeki pozitif sayılar sayısı negatif sayılar sayısına eşit olmalıdır. Dolayısıyla,  $n = 2m = 4k$  ve  $n, 4$  ile bölünmek zorundadır.

**A.212.** 1, 2, 3, ..., 80, 81 sayılarının tümü, birim karelere ayrılmış  $9 \times 9$  karesinin hanelerine rasgele yerleştiriliyor. Sayılar nasıl yerleştirilirse yerleştirilsin, ortak bir kenarı bulunan ve içlerine yerleştirilmiş sayıların farkı en az 6 olan en az iki hanenin bulunduğunu ispatlayınız.

**Çözüm.** Ortak kenarları bulunan karelere komşu kareler diyelim ve 1 ile 81'in bulunduğu kareleri birleştiren "komşu kareler zincirine" bakalım. (Şekilde bu tür "zincirler" 'den ikisi taranmıştır.)

|  |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|  | x | x | x | x | x | x | x | x | 81 |
|  | x |   |   |   |   |   |   |   | x  |
|  | x |   |   |   | x | x | x | x |    |
|  | x |   |   |   | x |   |   |   |    |
|  | x |   |   |   | x |   |   |   |    |
|  | 1 | x | x | x | x |   |   |   |    |
|  |   |   |   |   |   |   |   |   |    |

İki durum söz konusudur:

(I) 1 ve 81 en uzak karşı köşelerdedir.

(II) 1 ve 81 'den en az biri en uzak karşı köşelerde değildir.

I. durumda karşı köşeleri birleştiren herhangi iki "zincire" bakalım. 17 haneli ibaret olan bu zincirdeki sayılara  $a_1, a_2, \dots, a_{17}$  ( $a_1 = 1, a_{17} = 81$ ) ve  $b_1, b_2, \dots, b_{17}$  ( $b_1 = 1, b_{17} = 81$ ) diyelim.

$$80 = 81 - 1 = (81 - a_{16}) + (a_{16} - a_{15}) + \dots + (a_3 - a_2) + (a_2 - 1), \quad (1)$$

$$80 = 81 - 1 = (81 - b_{16}) + (b_{16} - b_{15}) + \dots + (b_3 - b_2) + (b_2 - 1) \quad (2)$$

eşitliklerine bakalım. Eğer (1) toplamında tüm parantezler  $\leq 5$  ise, toplam 80 ve parantez sayısı 16 olduğundan, parantezlerin her biri 5'e eşit olmalı, dolayısıyla,  $\{a_2, a_3, \dots, a_{15}, a_{16}\} = \{6, 11, 17, \dots, 76\}$  olmalıdır. O halde (2) ifadesinde 5'ten küçük parantez(ler) ve dolayısıyla, 5'ten büyük parantez(ler) bulunacaktır.

II. durumda 1 ve 81'i en fazla 16 hane içeren "zincire" birleştirebiliriz. Bu hanelerde yazılan sayılara  $c_1 = 1, c_2, c_3, \dots, c_n = 81$  diyelim. Burada  $n \leq 16$  olduğundan,

$$80 = 81 - 1 = (81 - c_{n-1}) + (c_{n-1} - c_{n-2}) + \dots + (c_2 - 1)$$

eşitliğinde parantezler sayısı  $\leq 15$  ve dolayısıyla, en az bir parantez  $\geq 6$  olur.

**A.213.**  $x + \frac{1}{x}$  bir tamsayı ise, her  $n \in \mathbb{N}$  için  $x^n + \frac{1}{x^n}$  sayısının da bir tamsayı olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm.** Tümevarım uygulayalım. Her  $k = 1, 2, \dots, n-1, n$  için  $x^k + \frac{1}{x^k}$  sayısının bir tamsayı olduğunu varsayarak,  $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ 'in de tamsayı olduğunu gösterelim.

$x + \frac{1}{x}$  ve  $x^n + \frac{1}{x^n}$  sayıları tam olduğundan onların çarpımı

$$(x + \frac{1}{x})(x^n + \frac{1}{x^n}) = (x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}) + (x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}})$$

yine bir tamsayı olmalıdır. Öyleyse,

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = (x + \frac{1}{x})(x^n + \frac{1}{x^n}) - (x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}})$$

sayısı da bir tamsayı olacaktır.

**A.214.**  $x$  sayısının tam kısmını  $\llbracket x \rrbracket$  ile gösterelim.  $x + \frac{99}{x} = \llbracket x \rrbracket + \frac{99}{\llbracket x \rrbracket}$  denkleminin tam olmayan kökünün kesir kısmını bulunuz.

**Çözüm.**  $(x - \llbracket x \rrbracket)(1 - \frac{99}{x \llbracket x \rrbracket}) = (x + \frac{99}{x}) - (\llbracket x \rrbracket + \frac{99}{\llbracket x \rrbracket}) = 0$  eşitliğinden ve  $x \neq \llbracket x \rrbracket$  koşulundan

$$1 - \frac{99}{x \llbracket x \rrbracket} = 0 \Leftrightarrow x \cdot \llbracket x \rrbracket = 99$$

olur.  $x = n + d$  ( $n \in \mathbb{Z}, 0 < d < 1$ ) dersek,  $n(n + d) = 99$  elde ederiz.  $n > 0$  ise,  $n^2 < 99 < n(n + 1)$  olmalıdır ki, bu mümkün değildir.  $n < 0$  ise,  $n(n + 1) < 99 < n^2$  eşitsizliğinden  $n = -10$  ve  $n(n + d) = 99, n = -10$  eşitliklerinden de

$$-10(-10 + d) = 99 \Rightarrow d = -\frac{99}{10} + 10 = 10 - 9,9 = 0,1$$

elde edilir. Böylece, denklemin sağlayan  $x$ 'in kesir kısmı  $d = 0,1$ 'dir.

**A.215.** Düzlemde aynı doğru üzerinde bulunmayan  $A, B, C$  noktaları ile bir  $k \in \mathbb{R}^+$  sayısı veriliyor.  $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = k$  şartını sağlayan  $P$  noktalarının geometrik yerini bulunuz.

**Çözüm.**  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), P(x, y)$  olsun. Verilen şarttan,

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = k$$

ya da

$$3[(x - \frac{x_1+x_2+x_3}{3})^2 + (y - \frac{y_1+y_2+y_3}{3})^2] + \frac{1}{3}[(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] = k.$$

$ABC$  üçgeninin ağırlık merkezi

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

olduğundan  $|PG|^2 = \frac{1}{9} [3k - (a^2 + b^2 + c^2)]$  bulunur.

1.  $3k < a^2 + b^2 + c^2$  ise, geometrik yer boş küme,
2.  $3k = a^2 + b^2 + c^2$  ise, geometrik yer  $G$  noktası,
3.  $3k > a^2 + b^2 + c^2$  ise, geometrik yer  $G$  merkezli ve  $(\sqrt{3k - (a^2 + b^2 + c^2)}/3)$  yarıçaplı bir çemberdir.

**Y.211.** Doğal sayılar kümesinin aşağıdaki koşulları sağlayan 2001 altkümeye parçalanıp parçalanamayacağını belirleyiniz:

(i) Alt kümeler ikiye ikiye ayrık ve hiç biri boş değildir.

(ii) Alt kümelerin birleşimi tüm doğal sayılar kümesidir.

(iii) Bu alt kümelerden herhangi 2000 tanesi seçilir ve bu 2000 kümeden birer tane eleman seçilip bu elemanların 2000-inci kuvvetleri alınarak elde edilen 2000 sayı çarpılırsa, bu çarpım, seçilmeyen kümenin elemanıdır. (Alp Şimşek; İzmir Fen Lisesi)

**Çözüm.** Böyle bir parçalanma mümkündür.

$a \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  ( $p_1, p_2, \dots, p_k$  asal;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$ ) ise,  $f(a) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$  olarak tanımlayalım.

Alt kümelerimiz  $A_0, A_1, \dots, A_{2000}$  şöyle tanımlansın: Her  $a \in \mathbb{N}$  için

$$f(a) \equiv i \pmod{2001} \Leftrightarrow a \in A_i$$

olsun. Yani her doğal sayı  $a$ 'yı  $f(a)$ 'nın 2001 modunda değeri olan indisli altkümeye koyalım. Bu alt kümelerin ilk 2 şartı sağladığı açıktır. Öte yandan  $f$  fonksiyonunun her  $a, b, n \in \mathbb{N}$  için  $f(ab) = f(a) + f(b)$  ve  $f(a^n) = nf(a)$  şartlarını sağladığı açıktır. O halde, 3. şartta dışarıda bırakılan küme  $A_i$  ise,  $a_j \in A_j$ ;  $j \in S_i = \{0, 1, 2, \dots, 2000\} - \{i\}$  seçersek,

$$\begin{aligned} f(\prod_{j \in S_i} a_j^{2000}) &= 2000 \cdot \sum_{j \in S_i} f(a_j) \\ &\equiv 2000 \cdot \sum_{j \in S_i} j \pmod{2001} \\ &\equiv 2000 \cdot (\sum_{k=0}^{2000} k - i) \pmod{2001} \\ &\equiv 2000 \cdot (\frac{2001 \cdot 2000}{2} - i) \pmod{2001} \\ &\equiv -2000i \pmod{2001}; \\ f(\prod_{j \in S_i} a_j^{2000}) &\equiv i \pmod{2001} \end{aligned}$$

olur. O halde,  $\prod_{j \in S_i} a_j^{2000} \in A_i$  olur. Yani 3. şart da sağlanır.

**Not:** Çözüm takip edilirse 2001 yerine herhangi tek sayı alabileceği görülür.

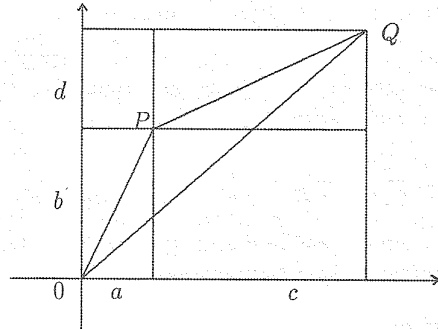
**Y.212.**  $a, b, c, d$  pozitif reel sayılar ve  $bc \geq ad$  ise,

$$\begin{aligned} \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} &\leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \\ &\leq b + \sqrt{(a+c)^2 + d^2} \end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz. (M. Bumin Yenmez; İzmir Özel Yamanlar Lisesi)

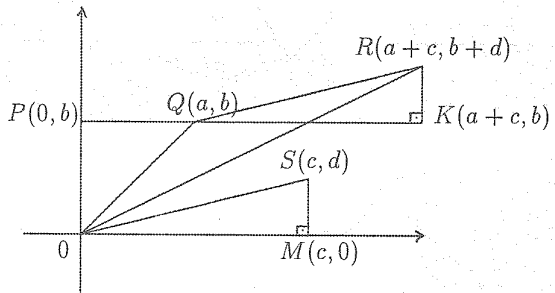
**Çözüm.** İlk başta sol tarafı gösterelim. Koordinat sisteminde  $P(a, b)$ ,  $Q(a+c, b+d)$  alalım. Üçgen eşitsizliğinden  $OQ \leq OP + PQ$  olur. Böylece,

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}.$$

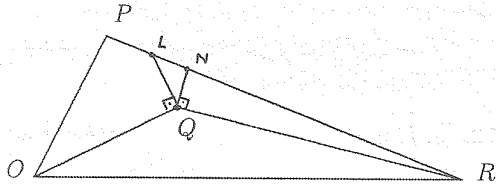


Şimdi sağ tarafa bakalım. Dik koordinat sisteminde  $P = (0, b)$ ,  $Q = (a, b)$ ,  $R = (a+c, b+d)$ ,  $S = (c, d)$ ,  $M = (c, 0)$  ve  $K = (a+c, b)$  alalım. Şekilden görüldüğü gibi

$$\hat{\Delta}OSM \sim \hat{\Delta}QRK \Rightarrow \hat{SOM} = \hat{RQK}.$$



$\frac{b}{a} \geq \frac{d}{c}$  olduğundan,  $\hat{QOM} > \hat{SOM} = \hat{ROK}$  ve burada  $\hat{OQR} < 180^\circ$  olur. O halde  $Q$  noktası  $\hat{OPR}$ 'nin içindedir.



$Q$  noktasından  $OQ$  'ya çıkılan dikme ve  $RQ$  'ya çıkılan dikme  $PR$  'yi, sırasıyla  $L$  ve  $N$  noktalarında kessin.  $\widehat{OQR} < 180^\circ$  olduğundan,  $\widehat{LQN} > 0^\circ$  olur. Böylece  $PL + PO \geq LO \geq OQ$  ve  $NR > RQ$  'dur. O halde,  $OP + PL + LN + NR > OQ + QR$ ; yani  $OP + PR > OQ + QR$  'dir ki, bu  $b + \sqrt{(a+c)^2 + d^2} \geq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$  olduğunu gösterir.

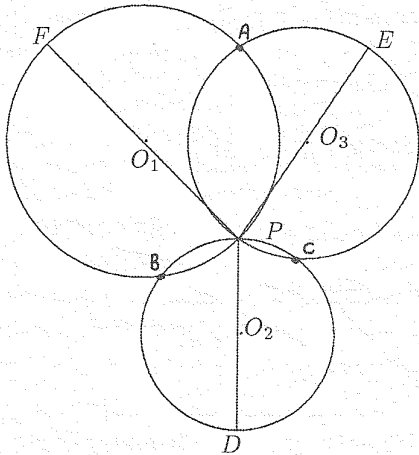
(Çözen: *Türkay Yolcu (Ankara)*).

**Y.213.**  $P$ ,  $ABC$  üçgeni içinde alınan bir nokta olmak üzere;  $\triangle PAB$ ,  $\triangle PBC$ ,  $\triangle PCA$  üçgenlerinin çevrel çember yarıçapları, sırasıyla,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  olsun. Buna göre,

$$\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} \geq \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

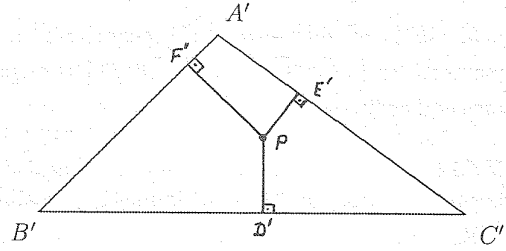
eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz. (Ahmet Çetintaş; Ankara Samanyolu Lisesi)

**Çözüm.**



Sözü edilen üç çemberin  $P$  'den geçen çaplarının çemberi ikinci kez kestiği noktalar  $D$ ,  $E$ ,  $F$  olsun. Buna göre  $PE = 2R_3$ ,  $PD = 2R_2$ ,  $PF = 2R_1$  olacaktır. Şimdi  $P$  noktasına göre düzlem üzerinde

bir evirtim fonksiyonu tanımlayalım.  $P$  noktası  $C$  noktasını  $PC$  doğrusu üzerinde  $PC \cdot PC' = 1$  olacak şekilde ( $C$  'ye yakın tarafta) bir  $C'$  noktasına götürsün. Buna göre yukarıdaki şekli  $P$  noktasına göre evirtirsek,



haline gelir. Bu şekilde  $P$ ,  $ABC$  üçgeninin içinde bir nokta ve  $D'$ ,  $E'$  ve  $F'$ ,  $P$  noktasının kenarlara olan dikme ayaklarıdır. Bu durumda Erdős-Mordell eşitsizliğine göre

$$PA' + PB' + PC' \geq 2(PD' + PE' + PF')$$

olacaktır.

$$PA \cdot PA' = 1, PB \cdot PB' = 1, PC \cdot PC' = 1,$$

$$PD \cdot PD' = 1, PE \cdot PE' = 1, PF \cdot PF' = 1$$

olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki eşitsizliklerde bunları yerlerine yerleştirirsek,

$$\begin{aligned} \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} &\geq \frac{2}{PD} + \frac{2}{PE} + \frac{2}{PF} \\ &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{aligned}$$

elde ederiz.

**Y.214.** Merkezi bir  $A_1$  noktasında ve yarıçapı 1 olan dairenin içinde,  $A_1$  'den farklı, rasgele,  $A_2$ ,  $A_3$ , ... ,  $A_{100}$  noktaları alınmıştır.  $1 \leq k \leq 100$  olan her  $k$  tamsayısı için  $A_k$  'dan  $A_1$ ,  $A_2$ , ... ,  $A_{k-1}$ ,  $A_{k+1}$ , ... ,  $A_{100}$  noktalarına olan uzaklıklardan en küçüğü  $a_k$  ile gösteriliyor. Bu durumda

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2 < 9$$

olduğunu kanıtlayınız.

**Çözüm.** Merkezi  $A_k$ , ( $k = 1, 2, \dots, 100$ ) noktasında ve yarıçapı  $\frac{a_k}{2}$  olan daireye  $D_k$  diyelim.  $D_k$  'ların birbiriyle kesişmediği açıktır. Öte yandan,  $D_k$  'ların hepsi merkezi  $A_1$  'de ve yarıçapı  $1\frac{1}{2}$

olan dairenin içinde bulunurlar. Bundan dolayı,  $D_k$  'ların alanlar toplamı  $1\frac{1}{2}$  yarıçaplı dairenin alanından küçük olacaktır:

$$\pi \cdot \left( \left( \frac{a_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{a_2}{2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{a_{100}}{2} \right)^2 \right) < \pi \left( \frac{3}{2} \right)^2 .$$

**Y.215.** Açılırlar arasında,  $\hat{C} = 3 \hat{B} = 9 \hat{A}$  bağıntısı bulunan bir  $ABC$  üçgeninde  $a, b, c$  kenar uzunluklarını göstermek üzere,  $bc + ca + ab$  ifadesinin, bu üçgene ait çevrel çemberin  $R$  ile gösterilen yarıçapı cinsinden değerini bulunuz.

**Çözüm.**  $A', B', C'$  : yükseklik ayaklarını;  $H$  : ortosantrı,  $O$  : çevrel çemberin merkezini gösterebiliriz.

$$\hat{A} = \frac{\pi}{13}, \hat{B} = \frac{3\pi}{13}, \hat{C} = \frac{9\pi}{13}$$

olup,  $n$  doğal sayısı için  $\cos \frac{n\pi}{13} = -\cos(13-n) \frac{\pi}{13}$  ve

$$1 + \cos \frac{2\pi}{13} + \cos \frac{4\pi}{13} + \dots + \cos \frac{22\pi}{13} + \cos \frac{24\pi}{13} = 0,$$

$$\cos \frac{2\pi}{13} + \dots + \cos \frac{12\pi}{13} = \cos \frac{14\pi}{13} + \dots + \cos \frac{24\pi}{13} = -\frac{1}{2},$$

'dir.

$$x = \cos \frac{2\pi}{13} + \cos \frac{6\pi}{13} + \cos \frac{8\pi}{13},$$

$$y = \cos \frac{4\pi}{13} + \cos \frac{10\pi}{13} + \cos \frac{12\pi}{13}$$

kabul edildiğinde  $\cos A + \cos B + \cos C = -y$  ve  $4x^2 + 2x - 3 = 0$  bulunur. Buradan

$$x = \frac{\sqrt{13}-1}{4}, \quad y = \frac{-\sqrt{13}-1}{4}$$

elde edilir. ( $x + y = -\frac{1}{2}$  ve  $xy = -\frac{3}{4}$  tür.)

$$|HA'| = |2R \cos B \cos C| = -2R \cos B \cos C$$

$$= -R[\cos(B-C) + \cos(B+C)],$$

$$|HB'| = -R[\cos(C-A) + \cos(C+A)],$$

$$|HC'| = R[\cos(A-B) + \cos(A+B)],$$

$$|HA'| + |HB'| - |HC'| = R(-x - y) = \frac{R}{2}$$

bulunur.

$$|OI|^2 + |OH|^2 = R^2 - 2Rr + 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2,$$

$$2Rr = 8R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},$$

$$2Rr = 2R^2(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$$

$$= 2R^2(-y - 1),$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

$$= 4R^2(3 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C)$$

$$= 2R^2(3 - x)$$

ve buradan

$$|OI|^2 + |OH|^2 = R^2(6 + 2x + 2y) = 5R^2$$

bulunur ve

$$bc + ca + ab$$

$$= 4R^2(\sin B \sin C + \sin C \sin A + \sin A \sin B)$$

$$= 2R^2[\cos(B-C) - \cos(B+C) + \cos(C-A) - \cos(C+A) \cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$= 2R^2(x - y) = R^2\sqrt{13}$$

elde edilir.

(Çözen: Naim Uygun (Beşiktaş-İstanbul)).

### SAYIN OKURLARIMIZ...

Önceden yayınlanmış olan "Matematik Dünyası" dergisinin sayıları, tanesi 750.000,- TL karşılığında, satışa sunulmuştur. Bu sayıları edinmek isteyen okurlar, tutarını Türkiye İş Bankası Antalya (Şarampol) Şubesi 6207-30000-271783 no'lu Doğan Çoker hesabına yatırıp, dekontun bir örneği ile istedikleri sayıları bize gönderdikleri takdirde, sözkonusu sayılar adreslerine postalanacaktır.

Elimizde Bulunan Sayılar:

Cilt 1 Sayı: 1,2,3

Cilt 2 Sayı: 1,5

Cilt 4 Sayı: 4

Cilt 5 Sayı: 1

Cilt 7 Sayı: 1,2,3,4,5

Cilt 8 Sayı: 1,2,3,4,5

Cilt 9 Sayı: 1,2,3,4