GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER

Mehmet Şahin
Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Tandoğan , 06100-ANKARA

e-posta: sahinm@science.ankara.edu.tr

$\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde R: çevrel çember yarıçapı, r: içteğet çember yarıçapı, s: yarı çevre, F: alan, a, b, c: üçgenin BC, AC, AB kenarlarının uzunlukları, h_a, h_b, h_c: üçgenin yükseklikleri, m_a, m_b, m_c: üçgenin kenarortayları, r_a, r_b, r_c: üçgenin dışteğet çemberlerinin yarıçapları, w_a, w_b, w_c: üçgenin iç açıortaylarını gösteriyor.

Teorem 1. $\overset{\Delta}{ABC}$ 'de

$$9.r \leq m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$$

'dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul üçgenin eşkenar olmasıdır.

Kanıt: Eşitsizliğin sol yanı [1], (1.1) 'de gösterilmişti. Diğer yanı kanıtlayalım. $\forall$ x, y, z pozitif reel sayıları için $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$ eşitsizliğini kullanacağız. $p = m_a + m_b + m_c$ diyelim.

$$p^2 = (m_a + m_b + m_c)^2 \leq 3 \,.\, (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \tag{1}$$

olur. $\overset{\Delta}{ABC}$ 'de

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4},\ m_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4},\ m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

olduğu biliniyor. Bunlar taraf tarafa toplanarak $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$ bulunur. Bu (1) 'de yerine yazılırsa $p^2 \leq 3.\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$ 'dir. [2] (35) 'den

$$a^2+b^2+c^2 \leq 9R^2 \tag{2}$$

olup $p^2 \leq \frac{9}{4}.9R^2 \Rightarrow p \leq \frac{9R}{2}$ bulunur. ABC eşkenar üçgen ise, $9r = m_a + m_b + m_c = \frac{9R}{2}$ 'dir.

Teorem 2. $\overset{\Delta}{ABC}$ 'de

$$3^{n+1}.r^n \leq r_a^n + r_b^n + r_c^n \leq \left(\frac{9R}{2}\right)^n$$

'dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul, üçgenin eşkenar ve n = 1 olmasıdır ($n \in N^+$).

Kanıt: $p = r_a^n + r_b^n + r_c^n$ diyelim. $r_a = \frac{F}{s-a}, r_b = \frac{F}{s-b}$ ve $r_c = \frac{F}{s-c}$ olduğundan

$$p = \frac{F^n}{(s-a)^n} + \frac{F^n}{(s-b)^n} + \frac{F^n}{(s-c)^n}$$

ve aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$p \geq 3.F^n.\frac{1}{\sqrt[3]{[(s-a)(s-b)(s-c)]^n}} \quad , \tag{3}$$

$$\frac{s}{3} = \frac{3s-2s}{3} = \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(s-a).(s-b).(s-c)} \ ,$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(s-a).(s-b).(s-c)}} \geq \frac{3}{s} \tag{4}$$

olup (4) eşitsizliği (3) 'de kullanılırsa $p \geq 3.F^n.\left(\frac{3}{s}\right)^n$ ve F=r.s olduğundan $p \geq 3.r^n.s^n.\frac{3^n}{s^n} \Rightarrow p \geq 3^{n+1}.r^n$ bulunur. Eşitsizliğin sağ tarafı için $x = \frac{F}{s-a}$, $y = \frac{F}{s-b}$, $z = \frac{F}{s-c}$ olmak üzere $x^n + y^n + z^n \leq (x+y+z)^n$, $n \in N^+$ $(x, y, z \in R^+)$ eşitsizliğini kullanacağız.

$$p = r_a^n + r_b^n + r_c^n \leq (r_a + r_b + r_c)^n$$

ve $r_a + r_b + r_c = r + 4R$ olup $2r \leq R$ (Euler eşitsizliği) kullanılırsa

$$p \leq (r+4R)^n \leq \left(\frac{R}{2} + 4R\right)^n \Rightarrow p \leq \left(\frac{9R}{2}\right)^n$$

bulunur.

Sonuç 1: $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde

$$3^{n+1}.r^n \leq h_a^n + h_b^n + h_c^n \leq \left(\frac{9R}{2}\right)^n$$

'dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul, üçgenin eşkenar ve $n = 1$ olmasıdır $(n \in N^+)$.

Kanıt: Eşitsizliğin sağ yanı $h_a \leq m_a$, $h_b \leq m_b$, $h_c \leq m_c$ eşitsizliğinden açıktır. Sol yanı aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliği ve $2F = a.h_a = b.h_b = c.h_c$, $F = r.s$ eşitlikleri kullanılarak gösterilebilir.

Sonuç 2: $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde

$$3^{n+1}.r^n \leq w_a^n + w_b^n + w_c^n \leq \left(\frac{9R}{2}\right)^n$$

'dir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul, üçgenin eşkenar ve $n = 1$ olmasıdır $(n \in N^+)$.

Kanıt: Eşitsizliğin sol yanı $h_a \leq w_a$, $h_b \leq w_b$, $h_c \leq w_c$ eşitsizliklerinden açıktır. Sağ yanı ise $w_a \leq m_a$, $w_b \leq m_b$, $w_c \leq m_c$ eşitsizliklerinden ve Teorem 1 'den açıktır.

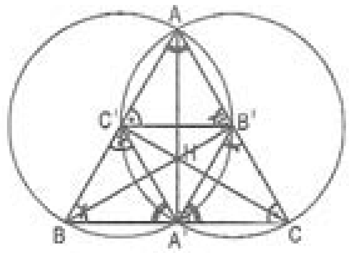
Problem: Dar açılı bir $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninin AA', BB', CC' yükseklikleri çiziliyor.

(a) $A'B'C'$ üçgeninin kenar uzunluklarının $a' = a\cos A$, $b' = b\cos B$, $c' = c\cos C$ olduğunu gösteriniz.

(b) $\overset{\Delta}{ABC}$ 'nin alanı F, $A'B'C'$ 'nin alanı F_h ise, $\frac{F_h}{F} = 2\cos A \cos B \cos C$ olduğunu gösteriniz.

(c) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm:



Şekil 1

(a) ABB' ve $AA'B$ dik üçgenleri aynı hipotenüse sahip olduklarından $ABA'B'$ bir kirişler dörtgenidir. Aynı şekilde $ACA'C'$ dörtgeni bir kirişler dörtgenidir. Dolayısıyla $m(B\hat{A'}C') = m(B\hat{A}C)$ 'dir.

Aynı şekilde, $m(C\hat{A'}B') = m(B\hat{A}C)$ olup buradan

$m(B'\hat{A'}C') = 180^0 - 2m(B\hat{A}C)$ 'dir.

Aynı düşünceyle $m(A'\hat{B'}C') = 180^0 - 2m(A\hat{B}C)$ ve

$m(A'\hat{C'}B') = 180^0 - 2m(A\hat{C}B)$ olur.

$|B'C'| = c'$, $|A'C'| = b'$, $|A'B'| = a'$ olmak üzere $A'B'C$ üçgeninde Sinüs Teoremine göre

$$\frac{c'}{\sin C} = \frac{|B'C|}{\sin(B'A'C)}$$

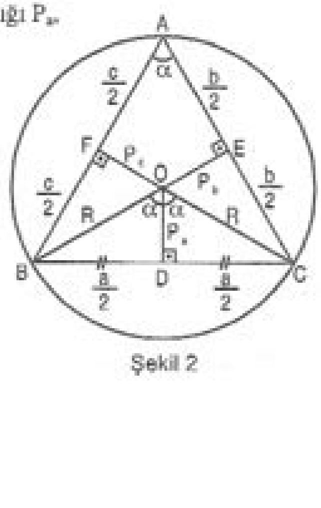
ve $\overset{\Delta}{BB'C}$ 'de $|B'C| = a \cdot \cos C$ olduğundan

$$\frac{c'}{\sin C} = \frac{a \cdot \cos C}{\sin A} \Rightarrow c' = \frac{a \cdot \sin C \cdot \cos C}{\sin A} \Rightarrow c' = \frac{a \cdot \sin 2C}{2 \sin A}.$$

$\overset{\Delta}{ABC}$ 'de Sinüs Teoreminden $\frac{a}{\sin A} = 2R$ olduğundan $c' = R \cdot \sin 2C$ bulunur. Benzer şekilde

$$b' = R \cdot \sin B,\ a' = R \cdot \sin A \tag{5}$$

elde edilir.



Şekil 2

$\overset{\Delta}{ABC}$ 'nin çevrel çemberinin merkezi O ve O 'nun [BC] 'ye uzaklığı P_a, [AC] 'ye uzaklığı P_b, [AB] 'ye uzaklığı P_c olsun.

$m(C\hat{O}B) = 2.m(B\hat{A}C)$ olduğundan $\overset{\Delta}{OBC}$ 'de alan bağıntısından

$$m(\overset{\Delta}{OBC}) = \frac{1}{2} R^2 \sin 2\alpha = \frac{a \cdot P_a}{2}$$

'den $R^2 = \sin 2\alpha = a \cdot P_a$ ve $\overset{\Delta}{ODC}$ 'de $\frac{P_a}{R} = \cos A$ ve

$\alpha = \hat{A}$ olduğundan $R^2 . \sin 2A = a . \cos A$ ise, (5) 'de $R . \sin 2A = a . \cos A$ yazılınca, $a' = a . \cos A$ bulunur. Benzer şekilde $b' = b . \cos B$, $c' = c . \cos C$ elde edilir.

(b) $A(A'B'C') = F_h$ idi. $F_h = \dfrac{b'c'.\sin(B'C'A')}{2} = \dfrac{b'.c'.\sin(180^0 - 2A)}{2}$

$$F_h = \frac{b \cos B . c \cos C . \sin 2A}{2}$$

$$= \frac{bc . \cos B . \cos C . 2 \sin A . \cos A}{2}$$

$$F_h = \underbrace{bc \sin A}. \cos A . \cos B . \cos C$$

$$= 2F . \cos A . \cos B . \cos C$$

ve buradan

$$\frac{F_h}{F} = 2 \cos A . \cos B . \cos C$$

bulunur.

Not: $\overset{\Delta}{ABC}$ 'de Kosinüs Teoreminden

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

olduğundan

$$\frac{F_h}{F} = 2 . \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{(2ab)(2ac)(2bc)},$$

$$\frac{F_h}{F} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{4a^2b^2c^2} \qquad (6)$$

'dir.

(c) Dönüşüm formülleri yardımıyla

$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 . \sin\frac{A}{2} . \sin\frac{B}{2} . \sin\frac{C}{2}$ olduğu kolayca gösterilebilir. Şimdi $\sin\frac{A}{2}$, $\sin\frac{B}{2}$ ve $\sin\frac{C}{2}$ 'nin kenarlar cinsinden değerlerini bulalım. İki kat formülüne göre

$\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$ veya $2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A$ ve $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ olduğundan

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} \Rightarrow \sin^2\frac{A}{2} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}.$$

$a+b+c=2s$ olduğundan $\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{2(s-b).2(s-c)}{4bc}$ ve $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ 'dir.

Benzer şekilde

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \quad \text{ve} \quad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

bulunur. O halde

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4.\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}.\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$=1+4.\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} \text{ 'dir.}$$

$\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde $abc=4RF$ ve $F=s.r$ ve $F^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$ olduğundan

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4.\frac{\frac{F^2}{s}}{4RF}=1+\frac{r^2.s^2}{R.F.s^2}=1+\frac{r}{R}$$

bulunur.

Sonuçlar

(a) $A'B'C'$ üçgeninin çevresi $Ç'$ ve $Çevre(\overset{\Delta}{ABC})=2s$ ise, $Ç'\leq s$ 'dir.

(b) $Alan(\overset{\Delta}{ABC})=F$, $Alan(A'B'C')=F'$ ise, $\dfrac{F'}{F}\leq\dfrac{1}{4}$ 'tür.

(c) $\cos A+\cos B+\cos C\leq\dfrac{3}{2}$ 'dir.

Kanıt: **(a)** Şekil 2 'den

$$A(\overset{\Delta}{ABC})=F=\frac{a.P_a}{2}+\frac{b.P_b}{2}+\frac{c.P_c}{2}=\frac{a.R.\cos A}{2}+\frac{b.R.\cos B}{2}+\frac{c.R.\cos C}{2}$$

$$=\frac{R}{2}.(a.\cos A+b.\cos B+c.\cos C),$$

$F=\dfrac{R}{2}.(a'+b'+c')$ ve $r.s=\dfrac{R}{2}.(2s')$, $Ç'=2s'=\dfrac{2rs}{R}$ ve $2r\leq R$ olduğundan $Ç'\leq s$ bulunur.

(b) Aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliğine göre

$1+\dfrac{r}{R}=\cos A+\cos B+\cos C\geq 3.\sqrt[3]{\cos A.\cos B.\cos C}$ olup $\cos A.\cos B.\cos C\leq\dfrac{1}{27}\left(1+\dfrac{r}{R}\right)^3$ 'dür.

$2r\leq R$ olduğundan

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \leq \frac{1}{27}\left(1+\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \text{ 'dir.}$$

Böylece, $\frac{F'}{F} = 2.\cos A.\cos B.\cos C \leq 2.\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ ve $\frac{F'}{F} \leq \frac{1}{4}$ bulunur. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeni eşkenar üçgen ise $\frac{F'}{F} = \frac{1}{4}$ 'tür.

(c) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$ ve $2r \leq R$ olduğundan

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ 'dir.}$$

Teorem 3. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde yükseklik ayaklarının oluşturduğu üçgenin (ortik üçgen) alanı F_h, açıortayların karşı kenarları kestiği noktaların birleştirilmesiyle oluşan üçgenin alanı F_w, kenarortayların karşı kestiği noktaların birleştirilmesiyle oluşan üçgenin alanı F_m ise,

$$\left(\frac{2r}{R}\right)^6 .F_h \leq F_w \leq F_m \tag{7}$$

'dir. Üçgen eşkenar ise eşitlik vardır.

Çözüm: $A(\overset{\Delta}{ABC}) = F$ ve [3] 'den

$$\frac{F_w}{F} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \tag{8}$$

'dır. (6) 'dan

$$\frac{F_h}{F} = \frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{4a^2b^2c^2}$$

olup son iki eşitlik taraf tarafa oranlanırsa,

$$\frac{F_w}{F_h} = \frac{8a^3b^3c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \tag{9}$$

olur. Aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$(b^2+c^2-a^2) + (a^2+c^2-b^2) + (a^2+b^2-c^2) \geq 3.\sqrt[3]{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

olup düzenlenirse,

$$\frac{1}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \geq \left(\frac{3}{a^2+b^2+c^2}\right)^3$$

olur. [2] (35) 'den $a^2+b^2+c^2 \leq 9R^2$ olduğu kullanılırsa,

$$\frac{1}{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)} \geq \left(\frac{3}{9R^2}\right)^3 = \frac{1}{27R^6} \tag{10}$$

olur. [5] 'den $(b+c)(c+a)(a+b) = 2S(s^2+r^2+2Rr)$ olup [6] 'dan $2S \le 3\sqrt{3}\,R$, $2r \le R$ eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\frac{1}{(b+c)(c+a)(a+b)} \ge \frac{1}{24\sqrt{3}\,R^3} \tag{11}$$

elde edilir. (10) ve (11) eşitsizlikleri ve $abc = 4RF$ eşitliği (9) 'da kullanılırsa,

$$\frac{F_w}{F_h} \ge \frac{8.(4RF)^3}{(27R^6)(24\sqrt{3}R^3)} = \frac{2^9.R^3.F^3}{3^4.R^6.2^3.R^3.\sqrt{3}} = \frac{2^6.F^3}{3^4.\sqrt{3}.R^6}$$

$F = r\,.\,s$ eşitliği ve [6] 'dan $s^2 \ge 27r^2$ eşitsizliği kullanılırsa,

$\frac{F_w}{F_h} \ge \frac{2^6.r^3.s^3}{3^4.\sqrt{3}.R^6} \ge \frac{2^6.r^3.(3\sqrt{3}r)^3}{3^4.\sqrt{3}.R^6} = \frac{2^6.r^6}{R^6}$, $\frac{F_w}{F_h} \ge \left(\frac{2r}{R}\right)^6$ olup (7) eşitsizliğinin sol yanı kanıtlanmış oldu.

Şimdi sağ yanı kanıtlayalım. $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde

$$\frac{F_m}{F} = \frac{1}{4} \tag{12}$$

olduğu açıktır. (8) ve (12) eşitlikleri taraf tarafa oranlanarak,

$$\frac{F_w}{F_m} = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \tag{13}$$

elde edilir. [4] 'ten $8xyz \le (x+y)(y+z)(z+x)$ olup $\frac{F_w}{F_m} \le 1$ ve $F_w \le F_m$ 'dir. Böylece eşitsizliğin kanıtı tamamlanır.

KAYNAKLAR

[1] Mehmet Şahin, Üçgenin elemanları arasındaki bazı eşitlik ve eşitsizlikler II, Matematik Dünyası, Cilt 9, Sayı 1, (2000), 11-15.

[2] Murray S. Klamkin, Asymmetric triangle inequalities, Publications de la Faculté d'Électrotecnique de L'Université á Belgrade, No: 357 – No: 380, (1971), 33-44.

[3] Mehmet Şahin ve İsmail Dedeoğlu, Geometri 1-2-3, (1996), Sayfa 197.

[4] J. F. Rigby, A method of obtaining related triangle inequalities, with applications, Publications de la Faculté d' Électrotechnique de L'Universite á Belgrade, No: 412 – No: 460, (1973), 217-226

[5] Ji Chen, Xue – Zhi Yang, On Zirakzadeh inequality related to two triangles inscribed one in the other, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 4 (1993), 25-27.

[6] O. Bottema et al. , Geometric Inequalities, Groningen, 1969.