BİR GENİŞLEME TEOREMİ (I)

Nurettin Ergun
İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü, Vezneciler/İSTANBUL

I. Genişleme Fonksiyonu Kavramı

Bir $[a,b]$ kapalı ve sınırlı aralığında tanımlı, sürekli ve gerçel değerli bir f fonksiyonumuz var olsun. Bu fonksiyonun tanımını, $c < a < b < d$ olmak üzere $[c,d]$ aralığına sürekli olarak genişletebilir miyiz? Ne demektir bu? Bu, yeni ve daha büyük $[c,d]$ aralığında tanımlı ve sürekli öyle yeni bir g gerçel değerli fonksiyonu tanımlamak demektir ki, her $x \in [a,b]$ için $g(x) = f(x)$ gerçekleşsin, kısacası g fonksiyonu eski $[a,b]$ tanım aralığında f gibi davransın, üstelik yeni $[c,d]$ tanım aralığında sürekli olsun ve en önemlisi, eğer f fonksiyonu bir $[a',b']$ aralığında değerler alıyorsa g fonksiyonu da $[a',b']$ aralığında değerler alsın. Tanımlayabilir miyiz böyle bir genişleme fonksiyonunu, ne dersiniz? Evet sevgili okurlar, kolayca ve üstelik pek çok farklı biçimde. En kolay tanımlanabilen genişleme fonksiyonu kuşkusuz

$$g_0(x) = \begin{cases} a' & ; \quad x \in [c,a] \\ f(x) & ; \quad x \in [a,b] \\ b' & ; \quad x \in [b,d] \end{cases}$$

dir. Bir başkası ise

$$g_1(x) = \begin{cases} a' + (b'-a')\sin(\frac{\pi(x-a)}{c-a}) & ; \quad x \in [c,a] \\ f(x) & ; \quad x \in [a,b] \\ b' + (b'-a')\sin(\frac{\pi x + \pi d - 2\pi b}{d-b}) & ; \quad x \in [b,d] \end{cases}$$

fonksiyonudur, burada $f(b) = b'$ ve $f(a) = a'$ dir. Peki, sözgelimi $[b,d]$ aralığında g_1 fonksiyonu $[a',b']$ aralığında mı değerler alır; bu alt aralıkta g_1 sürekli midir? Evet! Dikkat edilirse her $x \in [b,d]$ için

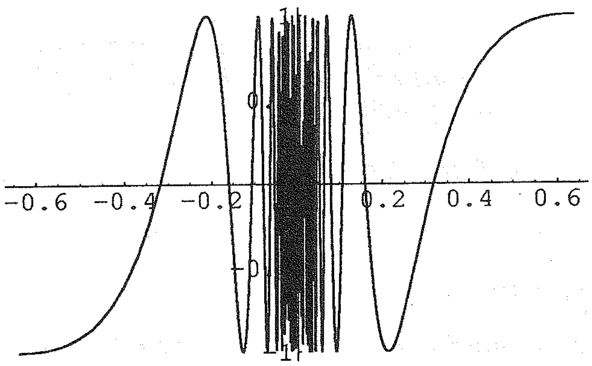
$$\pi \leq \frac{\pi x + \pi d - 2\pi b}{d-b} \leq 2\pi$$

ve dolayısıyla $[\pi, 2\pi]$ aralığında sinüs pozitif değerler almadığından kolaylıkla, bu alt aralıkta

$$a' \leq b' + (b'-a')\sin(\frac{\pi x + \pi d - 2\pi b}{d-b}) \leq b'$$

bulunur ve ayrıca gerek $\lim_{x\to b^-} g_1(x)$ sol limit ve gerekse $\lim_{x\to b^+} g_1(x)$ sağ limit değerleri var ve $f(b) = b'$ değerine eşit olduğundan g_1 fonksiyonu bu alt aralıkta istenenleri gerçekler. Benzer işlemler $[c,a]$ alt aralığı için de yapılır.

Peki f fonksiyonunun tanım kümesi $(a,b]$ ya da (a,b) türündeki kapalı olmayan aralıklar olsaydı, onun yine tanım aralığını kapsayan bir aralığa sürekli bir genişlemesi tanımlanabilir mi acaba? Dikkat edilmelidir, bu tür aralıklarda tanımlı, sürekli ve sınırlı değerler alan gerçel değerli fonksiyonlar için sözü edilen nitelikte sürekli bir genişleme fonksiyonunun tanımlanabilmesi her zaman olanaklı değildir. Örneğin $x = 0$ noktasına sağdan yaklaşıldıkça sinüzoidal dalgaları olağanüstü sıklıkta yapmaya başlayan ve sıfıra yakınsayan $x_n = \frac{1}{n\pi}$ irrasyonel sayılarında hep sıfır değeri alan ve $x \in (0,1]$ için $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ biçiminde tanımlanan sürekli fonksiyonun grafiği aşağıda yer alır ve görüyorsunuz $[-1,1]$ aralığında değerler alan bu sınırlı sürekli gerçel değerli fonksiyon için $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ limit değeri tanımsız olduğundan, bu fonksiyonun $x = 0$ noktasını kapsayan bir aralığa sürekli genişlemesini tanımlamak olanaksızdır.



Matematiğin sürekli genişlemelere ilişkin en ünlü ve en kullanışlı sonuçlarının başında hiç kuşkusuz ünlü **Tietze & Urysohn Genişleme Teoremi** gelir. Bu teoremin ne dediğini, nasıl kanıtlandığını ve hepsinden önemlisi önemini yeterince kavrayabilmek için ciddi düzeyde topoloji bilmek gereklidir. Alman matematikçi Tietze tarafından 1915 yılında ortaya atılan bu önermeyi on yıl sonra en genel biçimiyle usta Rus matematikçi Pavel S. Urysohn kanıtlamıştır. Biz, bu yazıda gerekli metrik uzay bilgisini "biraz" verdikten sonra, Urysohn'unkinden dört yıl önce Alman Felix Hausdorff tarafından metrik uzaylar için verilen kanıtlamadan söz etmek istiyoruz. Peki sevgili okurlar, **infimum** denilen kavramı biliyor muyuz? **R** gerçel sayılar kümesinin boş olmayan bir A altkümesinin herhangi bir x_0 alt sınırının, her $a \in A$ için $x_0 \leq a$ gerçeklediğini biliyoruz; **eğer** her bir $0 < \epsilon$ için $a_\epsilon < x_0 + \epsilon$ olacak biçimde en az bir $a_\epsilon \in A$ elemanı bulunabiliyorsa, işte bu özel koşulu gerçekleyebilen özel x_0 alt sınırına **A kümesinin infimumu** (en büyük alt sınırı=e.b.a.s.) denir. Demek ki ϵ pozitif sayısı ne denli küçük olursa olsun $\inf\{a : a \in A\} + \epsilon$ artık A kümesi için bir alt sınır olamayacak ve sonuçta $a_\epsilon < \inf\{a : a \in A\} + \epsilon$ gerçekleyen en az bir $a_\epsilon \in A$ var olacaktır. Üstelik eğer bir x gerçel sayısı A kümesi için bir alt sınır ise, yani her $a \in A$ için $x \leq a$ gerçekleniyorsa $x \leq \inf A = \inf\{a : a \in A\}$ olmak zorundadır, çünkü eğer, tam tersine $\inf A < x$ geçerli olsaydı, $(x - \inf A)/2$ pozitif sayısından küçük bir pozitif ϵ sayısını gelişigüzel seçerek, son gözlemimiz yardımıyla, öyle uygun bir $a_\epsilon \in A$ var olurdu ki $a_\epsilon < \inf A + \epsilon < x - \epsilon < x$ bulunur ve sonuçta x gerçel sayısı A için bir alt sınır olamazdı. İşte bu nedenledir ki, eğer her $a \in A$ için $x \leq a$ gerçekleniyorsa, "infimum alarak" $x \leq \inf\{a : a \in A\} = \inf A$ elde edilir denilir.

Yazı boyunca birkaç kez kullanılacak olan bu temel gerçekleri kavradıysanız eğer, bu yazıdaki tüm öteki akıl yürütmeleri de benzeri kolaylıkla kavrayacağınıza emin olabilirsiniz. Kısacası okuyup bilgilenmeye değer ve kavraması güç olmayan bir yazı karşısında olduğunuzu söyleyebilirim.

II. Metrik Uzaylar: Öz ve Temel Bilgiler

Metrik uzaylar matematiğin pek çok alanında, özellikle analizde kullanılan neredeyse demirbaş uzay türüdür. Boş olmayan bir X kümesinin elemanları ile tanımlanan tüm (x, y) eleman çiftlerine (sıralı ikililerine) $d(x, y)$ gerçel sayısını eşleştirirken aşağıdaki temel koşulları gerçekleyen bir d gerçel değerli fonksiyonuna X kümesinde (ya da X kümesi üzerinde) tanımlanmış bir **metrik** denir. Bu koşullar, $x, y, z \in X$ elemanları ne olursa olsun

$$(1)\ \ d(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y, \quad (2)\ \ d(x,y) = d(y,x), \quad (3)\ \ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

gerçeklendiğini söylerler. d fonksiyonu hiç bir (x, y) ikilisinde asla negatif değer almaz, çünkü $0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y)$ nedeniyle $0 \leq d(x,y)$ elde edilir; dikkat edilirse ilk eşitlikte (1) koşulu, sonra kullanılan eşitsizlikte (3) koşulu ve en son eşitlikte (2) koşulu kullanılmıştır. Negatif olmayan $d(x,y)$ gerçel sayısına d uzaklık fonksiyonu tarafından belirlenen x **ve** y **elemanları arasındaki uzaklık** denir. Matematiğin belki de en ünlü uzaklık fonksiyonu $\mathbf{R}$ üzerinde, her $x, y \in \mathbf{R}$ için $d(x,y) = |x-y|$ biçiminde tanımlanan **bir boyutlu Öklid metriğidir**. (1) ve (2) koşulları kolayca gözlenir; (3) koşulunu ünlü $|x+y| \leq |x| + |y|$ eşitsizliği yardımıyla

$$d(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z| = d(x,y) + d(y,z)$$

biçiminde gözleriz. $\mathbf{C}$ karmaşık (kompleks) sayılar kümesi üzerinde ise, z_1 ve z_2 karmaşık sayıları için

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{|Re\ z_1 - Re\ z_2|^2 + |Im\ z_1 - Im\ z_2|^2}$$

biçiminde tanımlanan d istenen koşulları gerçekleyen bir uzaklık fonksiyonudur. Burada $Re\ z$ ve $Im\ z$ sırasıyla z karmaşık sayısının gerçel ve sanal kısımları olan gerçel sayılardır. Küçük bir çabayla (3) koşulunu gözleyebiliriz. a ve b gerçel sayıları ne olursa olsun $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ gerçeklendiğinden, a_1, a_2, b_1, b_2 gerçel sayıları ne olursa olsun, kısalık için $A = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}$ ve $B = \sqrt{|b_1|^2 + |b_2|^2}$ yazarak

$$\frac{|a_1|}{A}\frac{|b_1|}{B} + \frac{|a_2|}{A}\frac{|b_2|}{B} \leq \frac{1}{2}\frac{|a_1|^2}{A^2} + \frac{1}{2}\frac{|b_1|^2}{B^2} + \frac{1}{2}\frac{|a_2|^2}{A^2} + \frac{1}{2}\frac{|b_2|^2}{B^2} = 1$$

ve dolayısıyla

$$|a_1||b_1| + |a_2||b_2| \leq \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}.\sqrt{|b_1|^2 + |b_2|^2} \qquad \text{(CSE)}$$

elde edilir; yukarıda negatif olmayan A ve B gerçel sayıları pozitif varsayıldı, bu sayılardan en az biri sıfır olsaydı CSE $\equiv$ Cauchy&Schwarz eşitsizliğinde her iki yan sıfır olur, eşitlik geçerli olurdu. O halde $2(a_1b_1 + a_2b_2) \leq 2AB$ bulunur ve her iki yana $A^2 + B^2$ yani $a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2$ ekleyerek ve bir gerçel sayının karesi ile mutlak değerinin karesinin eşit olduğunu anımsayarak sonuçta ünlü Minkowski Eşitsizliği ($\equiv$ ME)

$$\sqrt{|a_1+b_1|^2 + |a_2+b_2|^2} \leq \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2} + \sqrt{|b_1|^2 + |b_2|^2} \qquad \text{(ME)}$$

elde edilir. Özel olarak $a_1 = Rez_1 - Rez_2, b_1 = Rez_2 - Rez_3$ ve $a_2 = Imz_1 - Imz_2, b_2 = Imz_2 - Imz_3$ seçilirse kolaylıkla $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$ bulunur.

Şimdi şu önemli ve yararlı gerçeği gözleyelim. X kümesi üzerinde eğer d bir metrik ise, her $x, y \in X$ için

$$\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

biçiminde tanımlanan ρ aynı X üzerinde yeni bir metriktir, gerçekten negatif olmayan a ve b gerçel sayıları için $a \leq b$ ise, $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$ olduğundan ve $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ gerçeklendiğinden

$$\rho(x,z) \leq \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y) + d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1 + d(x,y) + d(y,z)} \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

elde edilir. ρ için (1) ve (2) koşullarının doğruluğunu gözlemek kolaydır. Bu yeni uzaklık fonksiyonunun en ilginç özelliği uzaklıkların < 1 gerçeklenmesidir. Bir X kümesinde $d(x,x) = 0$ ve $x \neq y$ için $d(x,y) = 1$ biçiminde tanımlanan d uzaklık fonksiyonu da bir metriktir; dikkat edilirse 0 ve 1 'den başka uzaklık değeri yoktur, üstelik a ve b gerçel sayılarının en büyüğü yani $\max\{a,b\}$ kısaca $a \vee b$ işareti ile yazılırsa, bu tuhaf metrik, $x, y, z \in X$ ne olursa olsun, (3) koşulundan çok daha güçlü olan

$$d(x,z) \leq d(x,y) \vee d(y,z) \qquad \text{(UME)}$$

koşulunu gerçekler, çünkü gerçekten $d(x,y) = 1 = d(y,z)$ ise, elbette $d(x,z) \leq 1 = d(x,y) \vee d(y,z)$ olur; yok eğer $d(x,y) = 0 < 1 = d(y,z)$ ise, bu kez zorunlu olarak $x = y$ olur ve dolayısıyla $d(x,z) = d(y,z) = 1 = d(x,y) \vee d(y,z)$ olur; $d(y,z) = 0 < 1 = d(x,y)$ durumu benzerdir, vb,... Yalnızca 0 ve 1 değerini alan bu metriğe **kesikli** (ya da **diskret**) **metrik** denir. UME ise ultrametrik eşitsizliği olarak bilinir, çünkü bu sıradışı koşulu gerçekleyen bir metriğe, onu ilk tanımlayan usta Fransız matematikçi Andre Weil'in yakıştırmasıyla **ultrametrik** denir; **Arşimedyen olmayan metrik** adını kullananlar da vardır.

Kesikli metrikten farklı olarak UME'yi gerçekleyen metrikler de vardır. Bir X kümesinde tanımlı tüm dizilerin kümesi, yani her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X$ olmak üzere tüm $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizilerini eleman kabul eden küme ki, bu aslında, kartezyen çarpım kavramını bilenlerin kolayca gözleyebileceği gibi, her bir X_n kümesi X olmak üzere $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \cdots$ kartezyen çarpım kümesinden başka bir şey değildir ve kısaca X^{ω} işareti ile gösterilir, evet X^{ω} kümesi üzerinde

$$d(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \begin{cases} 0 & ; \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \\ \frac{1}{\min\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\}} & ; \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \neq \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \end{cases}$$

biçiminde, René Baire tarafından tanımlandığı için **Baire metriği** adını alan metrik de UME'yi gerçekler. Bu metriğin $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ rasyonel sayılarından başka değer almadığını kolayca görürüz. Dikkat edilirse $d(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \frac{1}{m}$ olabilmesi için gerek yeter koşul şu m tane koşulun tümünün gerçekleşmesidir: $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \cdots, x_{m-1} = y_{m-1}$ ve $x_m \neq y_m$. O halde aynı uzaklığın $< 1/m$ gerçekleyebilmesi için gyk $x_1 = y_1, \cdots, x_m = y_m$ olmasıdır. Bu nedenle $d(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = 1/m$ ve $d(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{\infty}) = 1/k$ ise ve m ile k doğal sayıları sözgelimi $m \leq k$ gerçekliyorsa, kolayca $x_1 = y_1 = z_1, \cdots, x_{m-1} = y_{m-1} = z_{m-1}$ geçerli olacağından

$$d(\{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{\infty}) \leq \frac{1}{m} = \frac{1}{k} \vee \frac{1}{m} = d(\{y_n\}, \{x_n\}) \vee d(\{x_n\}, \{z_n\})$$

bulunur. Ultrametriklerin pek çok şaşırtıcı ve "doğal olmayan" özellikleri vardır, birisiyle aşağıda karşılaşacağız. Şimdi bir metrik yardımıyla nasıl bir topoloji tanımlandığını görelim, topoloji denen kavramı daha önce tanımış olmanız gerekmiyor sevgili okurlar.

Üzerinde bir d metriği tanımlı olan X kümesinin, boş kümeyi ve ayrıca

$$\text{A Koşulu:} \quad \forall x \in G \;\; \exists \;\; \epsilon_x > 0, \quad S_d(x, \epsilon_x) \subseteq G$$

koşulunu gerçekleyen, yani tüm elemanlarının uygun bir yuvarlarını kapsayabilen G altkümelerini ve yalnızca bu tür kümeleri üye kabul eden altkümeler topluluğu τ_d, X kümesi üzerinde bir topolojidir. Burada $x \in X$ ve $0 < \epsilon$ için $S_d(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$ yazılmaktadır ve bu kümeye genellikle $x \in X$ merkezli ve ϵ yarıçaplı **açık yuvar** denir, açık sıfatının neden kullanıldığını ve topolojinin ne olduğunu ilerde göreceğiz. Peki X kümesinin bu koşulu gerçekleyen boştan farklı altkümeleri var mıdır? Evet, apaçıktır ki X ana kümesi tüm $S_d(x, \epsilon)$ yuvarlarını kapsamaktadır, kısacası X bu koşulu gerçekler. Ayrıca herhangi bir $S_d(x, \epsilon)$ yuvarı da bu koşulu gerçekler. Öncelikle $x \in S_d(x, \epsilon)$ gözleyelim, bu kolaydır çünkü $d(x, x) = 0 < \epsilon$ geçerlidir. Demek ki yuvarlar boş değildir ve ayrıca (isterseniz bu yuvarları belirleyen metriğin ne olduğu açıkça belli olsun diye alta yazdığımız d işaretini de artık yazmalıyım) $y \in S(x, \epsilon)$ ise $d(x, y) < \epsilon$ olur ve y noktasının, $0 < \epsilon' < \frac{1}{2}(\epsilon - d(x, y))$ koşulunu gerçekleyen pozitif ϵ' sayısı yarıçaplı yuvarı $S(y, \epsilon') \subseteq S(x, \epsilon)$ gerçekler, çünkü herhangi bir $z \in S(y, \epsilon')$ için $d(z, x) < \epsilon$ ve dolayısıyla $z \in S(x, \epsilon)$ kolayca gözlenir, çünkü

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \epsilon' < \epsilon - \epsilon' < \epsilon$$

geçerlidir. Demek ki açık yuvarlar her elemanının uygun bir yuvarını kapsayabilmektedirler. Yalnızca açık yuvarlar değil onların herhangi sayıda birleşim kümesi de yukarıdaki koşulu gerçekler. Aslında sözü edilen koşulu gerçekleyen boştan farklı kümeler ancak ve yalnız "birtakım" açık yuvarların birleşimi olarak yazılabilen kümelerdir, çünkü bu koşulu gerçekleyen herhangi bir $G \neq \emptyset$ alındığında bu G kümesi koşulda sözü geçen tüm $S(x, \epsilon_x)$ yuvarlarının birleşim kümesinden başka birşey değildir, yani $G = \cup\{S(x, \epsilon_x) : x \in G\}$ gerçekleşir çünkü $S(x, \epsilon_x)$ yuvarları zaten G tarafından kapsandığı için $\cup\{S(x, \epsilon_x) : x \in G\}$ birleşim kümesi de apaçıktır ki G tarafından kapsanır, tersine herhangi bir

$x \in G$ elemanı elbette bu birleşim tarafından kapsanan $S(x, \epsilon_x)$ yuvarına ve sonuçta bu birleşime aittir. Peki, herhangi sayıda $S(x_\alpha, \epsilon_\alpha)$ yuvarlarının birleşimi $E = \cup_{\alpha \in I} S(x_\alpha, \epsilon_\alpha)$ neden A koşulunu gerçekler? Bunu gözlemek de çok kolaydır, çünkü E birleşim kümesine ait olan herhangi bir $y \in X$ elemanı, uygun bir $\alpha_0 \in I$ indisi yardımıyla $y \in S(x_{\alpha_0}, \epsilon_{\alpha_0})$ gerçekler ve yukarda gösterildiği gibi uygun bir ϵ pozitif sayısı sayesinde $S(y, \epsilon) \subseteq S(x_{\alpha_0}, \epsilon_{\alpha_0}) \subseteq E$ bulunur. Ayrıca, eğer G_1 ve G_2 kümeleri koşulu gerçekliyorlarsa $G_1 \cap G_2$ kesişim kümesi de gerçekler, çünkü $x \in G_1 \cap G_2$ elemanı ne olursa olsun uygun birer ϵ_1 ve ϵ_2 pozitif sayıları sayesinde $S(x, \epsilon_1) \subseteq G_1$ ve $S(x, \epsilon_2) \subseteq G_2$ olur ve sonuçta $0 < \epsilon < \epsilon_1$ ve $0 < \epsilon < \epsilon_2$ gerçekleyen pozitif ϵ sayesinde $S(x, \epsilon) \subseteq G_1 \cap G_2$ olur, çünkü ϵ yarıçaplı yuvar hem $S(x, \epsilon_1)$ ve hem de $S(x, \epsilon_2)$ yuvarları tarafından kapsanır; demek ki $G_1 \cap G_2$ kesişim kümesi her elemanının uygun bir yuvarını kapsama koşulunu gerçeklemektedir. Evet sevgili okurlar, işte X kümesinin, τ_d altkümeler topluluğunun gerçeklediği aşağıdaki özellikleri gerçekleyen herhangi bir τ altkümeler topluluğuna X üzerinde tanımlanmış bir **topoloji** (ya da **ilinge**) denir. Nedir bu özellikler: (1) τ 'nun herhangi sayıda üyesinin birleşim kümesi τ üyesi olmalıdır, (2) τ 'nun herhangi iki üyesinin kesişim kümesi τ üyesi olmalıdır ve, (3) $\emptyset$ ve X kümeleri τ üyesi olmalıdır. Peki, bu özellikleri gerçekleyen bir altkümeler ailesi neden özel bir isimle anılıp ayrıntılarıyla incelenme gereği duyulmuştur? Bunun nedeni sevgili okurlar, matematiğin iki temel taşı kavramı olan limit ve süreklilik kavramlarını soyut kümeler üzerinde tanımlayıp incelemeye elveren yapıyı belirlemeleridir. Bir X kümesi üzerinde bir topoloji tanımlamadan bu kümede "limit almaktan", o küme üzerinde tanımlanan bir fonksiyonun sürekliliğinden söz etmek olanaksızdır, üstelik fonksiyonun gönderildiği küme üzerinde de bir topoloji tanımlanmış olması gereklidir. Biz bu kavramları yalnızca yukarda tanımlanan τ_d topolojisi için, çok kısa bir biçimde, çok ayrıntıya girmeye sayfalar ve bu derginin amacı elvermediği için, kısaca vereceğiz. X kümesi ve onun üzerinde tanımlanan bir τ topolojisinin belirlediği **topolojik uzay** kısaca (X, τ) işareti ile gösterilir, τ 'nun üyelerine bu topolojik uzayın **açık kümeleri** denir. Demek ki yukarıdaki A koşulu (X, τ_d) uzayında açık küme olabilme koşulundan başka bir şey değildir, bu nedenle $S_d(x, \epsilon)$ yuvarlarına açık yuvar denilmiştir. (X, τ_d) metrik uzayında, bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için ancak ve yalnız $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$ ise, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ yazılır ve bu diziye $x_0 \in X$ **elemanına yakınsıyor** denir. Yukarıda belirttiğimiz gibi herhangi bir (X, τ) uzayı için limit kavramından ne yazık ki söz açamıyoruz. Şimdi bir $x_0 \in X$ elemanı için aşağıdaki koşulların eşdeğer olduklarını gösterelim:

(1) $\forall \varepsilon > 0$ için $S(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ olur ;

(2) Tüm terimleri A kümesinden seçilmiş bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ olur.

Gerçekten de (1) geçerliyse, her $n \in \mathbf{N}$ için $a_n \in S(x_0, \frac{1}{n}) \cap A$ elemanlarını seçerek tanımlanan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi, her $n \in N$ için $0 \leq d(a_n, x_0) < \frac{1}{n}$ geçerli olduğundan, kolayca $\lim_{n\to\infty} d(a_n, x_0) = 0$ verir; tersine A kümesinin (2) koşulunu gerçekleyen bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi varsa, $\{d(a_n, x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi için $\lim_{n\to\infty} d(a_n, x_0) = 0$ nedeniyle, $0 < \varepsilon$ verildiğinde

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}, \forall\, n \geq n_\varepsilon \text{ için } 0 \leq d(a_n, x_0) < \epsilon$$

olacağından $\{a_n : n_\varepsilon \leq n\} \subseteq S(x_0, \varepsilon) \cap A$ bulunur, yani (1) geçerli olur. Aslında bir metrik uzayda, herhangi $x \in X$ elemanı ve herhangi bir $\emptyset \neq A$ altkümesi için, $a \in A$ ne olursa olsun $0 \leq d(a, x)$ nedeniyle 0$\leq \inf\{d(x, a) : a \in A\}$ bulunur. (Dikkat: $A = \emptyset$ için $d(a, x)$ uzaklık değerlerinden söz edebileceğimiz $a \in A$ elemanları var olmadığından böyle bir infimum doğal olarak tanımlanamayacaktır.) Negatif olmayan bu infimuma, x noktası ile boştan farklı A altkümesinin arasındaki uzaklık denir ve bu gerçel sayı kısaca $d(x, A)$ işareti ile yazılır; elbette bu sayı $d(A, x)$ ile gösterilen $\inf\{d(a, x) : a \in A\}$ infimum değerine eşittir. Yukarıdaki eşdeğer (1) ve (2) koşullarının

(3) $d(x_0, A) = 0$

koşuluna eşdeğer olduklarını gözlemek güç değildir. Gerçekten (2) koşulundaki dizi yardımıyla, (infimumun bir alt sınır olması nedeniyle herhangi bir $a \in A$ için $d(x_0, A) \leq d(x_0, a)$ geçerli olduğundan) her $n \in \mathbf{N}$ için $d(x_0, A) \leq d(x_0, a_n)$ bulunur ve kolayca $0 \leq d(x_0, A) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_0, a_n) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, x_0) = 0$ ve sonuçta (3) koşulu elde edilir. Tersine, (3) koşulunu gerçekleyen $x_0 \in X$

elemanı için, bu yazının başında infimum için söylenen temel gerçek nedeniyle, uygun bir $a_\varepsilon \in A$ için

$$d(x_0, a_\varepsilon) < \inf\{d(x_0, a) : a \in A\} + \frac{\varepsilon}{2} = d(x_0, A) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ve dolayısıyla $a_\varepsilon \in S(x_0, \varepsilon) \cap A$ bulunarak (1) elde edilir. Yeri gelmişken $\emptyset \neq A \subseteq B$ ise, herhangi bir $x \in X$ için $d(x, B) \leq d(x, A)$ gerçeklendiğini görelim; gerçekten her $a \in A$ için $d(x, B) \leq d(x, a)$ olduğundan $d(x, B) \leq \inf\{d(x, a) : a \in A\} = d(x, A)$ bulunur. Bu arada yeni kavramlara geçmeden d eğer bir ultrametrik ise, $S_d(x, \varepsilon)$ açık yuvarının tüm elemanlarının bu açık yuvarın merkezi olduğunu söyleyen şaşırtıcı iddiayı gösterelim. Aman ne saçmalık, olmaz böyle şey diyorsunuz, ama gerçek böyle! Herhangi bir $y \in S_d(x, \varepsilon)$ için $S_d(x, \varepsilon) = S_d(y, \varepsilon)$ gerçekleşir; çünkü $z \in S_d(y, \varepsilon)$ için $d(z, x) \leq d(z, y) \vee d(y, x) < \varepsilon$ olur çünkü hem $d(z, y) < \varepsilon$ hem de $d(y, x) < \varepsilon$ geçerlidir ve sonuçta $z \in S_d(x, \varepsilon)$, yani $S_d(y, \varepsilon) \subseteq S_d(x, \varepsilon)$ bulunur; tümüyle benzer biçimde $S_d(x, \varepsilon) \subseteq S_d(y, \varepsilon)$ gösterilir. Demek ki d bir ultrametrikse ve $y \in S_d(x, \varepsilon)$ ise, bu y elemanı $S_d(x, \varepsilon)$ yani $S_d(y, \varepsilon)$ 'un "merkezidir". İlgili ve meraklı okuyucu, eğer d bir ultrametrikse, $x \in X$ elemanı ve $0 < \varepsilon$ ne olursa olsun $S_d(S_d(x, \varepsilon), \varepsilon) = \{y \in X : d(y, S_d(x, \varepsilon)) < \varepsilon\}$ yuvarının $S_d(x, \varepsilon)$ yuvarına eşit olduğunu kolayca ve şaşırarak gösterebilir.

Aslında ultrametrik kadar alışılmadık ve garip özellikleri olan başka metrikler de vardır. Ve ultrametriklerin daha nice şaşırtıcı özellikleri de ... , ama amacımız bu özel bilgileri anlatmak değildir. Şimdi de metrik uzaylarda düzgün sürekli fonksiyonların ne denli yalın ve kolay tanımlanabildiklerini gözleyelim. Boştan farklı herhangi bir A altkümesi yardımıyla, her $x \in X$ için $f(x) = d(x, A)$ biçiminde tanımlanan gerçel değerli f fonksiyonu düzgün süreklidir, hatta $d(x, y) < \varepsilon$ ise, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gerçekler, neden mi? Önce herhangi bir $a \in A$ için $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ gözleyerek $d(x, A) - d(x, y) \leq \inf\{d(y, a) : a \in A\} = d(y, A)$ ve dolayısıyla, $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ elde edelim. Benzer biçimde, ya da x ve y 'nin üstlendikleri rolleri değiştirerek bu kez $d(y, A) - d(x, y) \leq d(x, A)$ buluruz. Tüm bunlar ise $-d(x, y) \leq d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ ve dolayısıyla, $|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ verir ve yukarıda söylenen düzgün süreklilik iddiası elde edilir. Aman sakın yanlış anlamayın lütfen, bir metrik uzayda tanımlanan tüm düzgün sürekli fonksiyonların yukarıdaki biçimde tanımlandığı düşünülmesin; örneğin, her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = \sin x$ biçiminde tanımlanan ünlü sinüs fonksiyonu $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ gerçekler ve düzgün süreklidir, ve yukarıdaki fonksiyon gibi tanımlanmamıştır.

Şimdi de bir metrik uzayda "kapalı olma" kavramından bahsedelim. Bunun için **yapışık nokta** kavramını bilmeliyiz. Boştan farklı bir A kümesi verildiğinde $d(x, A) = 0$ koşulunu gerçekleyen bir $x \in X$ elemanına, A kümesine **yapışık ya da yanaşık nokta** denir. A kümesine yapışık tüm noktaların oluşturduğu altkümeyi, şimdilik ve geçici olarak $Yap(A)$ ya da daha kısa olarak $Y(A)$ işareti ile gösterelim. Küçük küçük ama her biri yalın ve önemli bazı gözlemler yapabiliriz: Örneğin, öncelikle, $Y(A) = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$ tanımını vurguladıktan sonra herhangi bir $x \in A$ için $0 \leq d(x, A) \leq d(x, x) = 0$ gözleyip, her A altkümesi için $A \subseteq Y(A)$ kapsamasını elde ederiz; sonra, $\emptyset$ kümesine uzaklık tanımsız olduğundan $d(x, \emptyset) = 0$ gerçekleyen bir $x \in X$ elemanının var olması söz konusu olamayacaktır ve kolayca $Y(\emptyset) = \emptyset$ buluruz; bir başka şaşırtıcı gerçek her $x \in X$ ve boş olmayan her A altkümesi için $d(x, A) = d(x, Y(A))$ eşitliğini gözlemektir, dikkat edilirse zaten $A \subseteq Y(A)$ nedeniyle $d(x, Y(A)) \leq d(x, A)$ geçerlidir, üstelik herhangi bir $y \in Y(A)$ için yukarıda gösterilen $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ eşitsizliği ve $d(y, A) = 0$ gerçeği kullanılarak $d(x, A) \leq d(x, y)$ bulunur ve sonuçta infimum alarak $d(x, A) \leq \inf\{d(x, y) : y \in Y(A)\} = d(x, Y(A))$ ters eşitsizliği de bulunur. Bir de şunu gözleyelim: A kümesine yapışık olmayan tüm noktaların kümesi olan $\{x \in X : 0 < d(x, A)\}$ açık bir kümedir. Neden mi? Önce bu kümeye, gerektiği için, bir isim verelim dilerseniz. Evet sevgili okurlar bu kümeye **A 'nın dışı** denir ve *dışA* ile gösterilir. $Y(A)$ kümesine ait bir $x \in X$ elemanının $0 < d(x, A)$ koşulunu gerçeklemeyeceği kolayca görülür, demek ki yalnızca A değil $Y(A)$ bile dış A ile ayrıktır; üstelik $x_0 \in$ dış A ise, $0 < \varepsilon_0 < d(x_0, A)$ gerçekleyen pozitif ε_0 sayesinde $S(x_0, \varepsilon_0) \subseteq$*dışA* olur, çünkü $x \in S(x_0, \varepsilon_0)$ ise, $d(x, A) > d(x_0, A) - d(x_0, x) > d(x_0, A) - \varepsilon_0 > 0$ geçerlidir. Evet artık kapalı küme kavramını öğrenebiliriz: (X, τ_d) metrik uzayında ancak ve yalnız $Y(A) \subseteq A$ (ve dolayısıyla, ters kapsama zaten geçerli olduğundan $A = Y(A)$ koşulunu) gerçekleyen bir A altkümesine **kapalı küme** denir. Tüm altkümeler gibi $Y(X)$ kümesi de X kümesi tarafından kapsandığı için, öncelikle X ana kümesi ve $\emptyset$ kümesinin kapalı oldukları gözlenir. Üstelik **her A altkümesi için $Y(A)$ kümesi kapalıdır**, çünkü daha önce gözlediğimiz gibi her $x \in X$ için $d(x, A) = d(x, Y(A))$ idi, dolayısıyla bu uzaklıklardan ikincisi sıfır ise elbette birincisi de sıfır olur ve sonuçta $Y(Y(A)) \subseteq Y(A)$ bulunur. Ayrıca, boş olmayan bir A altkümesi ve $0 < \varepsilon$ sayesinde tanımlanan

$$\{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\}, \{x \in X : \varepsilon \leq d(x, A)\}$$

altkümeleri de kapalıdır. Birinci kümeye K_1 diyelim ve $Y(K_1) \subseteq K_1$ gösterelim. $d(x, K_1) = 0$ gerçekleyen bir x elemanı için, eğer, $x \in K_1$ olmasaydı $0 < d(x, A) - \varepsilon$ olur ve sonuçta her bir $y \in K_1$ için $d(x, A) \leq d(y, A) + d(x, y) \leq d(x, y) + \varepsilon$ nedeniyle $0 < d(x, A) - \varepsilon \leq \inf\{d(x, y) : y \in K_1\} = d(x, K_1) = 0$ çelişkisi doğardı. Öteki kümeyi $K_A(\varepsilon)$ ile gösterip onun kapalılık kanıtlamasını okuyucuya bırakalım. Üstelik *dış*$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_A(\frac{1}{n})$ gerçeklendiğini söylemekle yetinelim. İlgili ve istekli okurların biraz çabayla bu şaşırtıcı gerçeği gösterebileceklerini umuyoruz. Demek ki metrik uzayda açık bir kümenin sayılabilir tane kapalı kümenin birleşimi olarak yazılması gerçekleşebiliyormuş. Bu saydıklarımdan farklı kapalı kümeler de vardır, örneğin $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi x_0 limitine yakınsıyorsa, $\{x_0, x_1, x_2, ...\}$ kümesi kapalıdır. Ayrıca bir metrik uzayda sonlu sayıda elemanlı tüm kümeler de kapalıdır; gerçekten $A = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ kümesine yapışık bir $x \in X$ alındığında, bu elemanın x_k elemanlarına uzaklıkları olan gerçel sayılar için, yeniden numaralama sayıları kullanarak, sözgelimi $d(x, x_{n_1}) \leq d(x, x_{n_2}) \leq ... \leq d(x, x_{n_m})$ gerçekleşiyorsa, sonuçta

$$0 = d(x, A) = \inf\{d(x, x_k) : 1 \leq k \leq m\} = d(x, x_{n_1})$$

olur ve dolayısıyla metrik koşullarının birincisi nedeniyle $x = x_{n_1} \in A$ bulunur.

Son olarak şunları vurgulayalım. Bir (X, τ_d) metrik uzayında herhangi bir A altkümesini kapsayan kapalı kümelerin en "küçüğü" $Y(A)$ kümesidir. Öncelikle $A \subseteq B$ ise, $Y(A) \subseteq Y(B)$ gerçeklendiğini gözlemleyelim, gerçekten her bir $x \in X$ elemanı için geçerli olan $0 \leq d(x, B) \leq d(x, A)$ bize isteneni verir. Üstelik yukarda $A \subseteq Y(A)$ gerçeklendiğini ve $Y(A)$ 'nın kapalı olduğunu kanıtlamıştık, ayrıca A kümesini kapsayan herhangi bir K kapalı kümesi için bu son gözlem yardımıyla $Y(A) \subseteq Y(K) \subseteq K$ buluruz. Demek ki $Y(A)$ kapalı kümesi A 'yı kapsayan tüm kapalı kümeler tarafından kapsanmaktadır. Genel olarak herhangi bir topolojik uzayda ancak ve yalnız tümleyenleri açık küme olan altkümelere kapalı küme denir ve bir altkümeyi kapsayan tüm kapalı kümelerin en küçüğüne ise o kümenin **kapanışı** denir; aslında A 'nın kapanışı $\overline{A}$ işareti ile gösterilir ve A 'yı söz konusu uzayda kapsayan tüm kapalı kümelerin oluşturduğu aile $\mathcal{K}(A)$ ile gösterilirse, $\overline{A} = \cap\{K : K \in \mathcal{K}(A)\}$ eşitliği geçerlidir. Bu genel bilgiler (X, τ_d) metrik uzayında da geçerlidir, çünkü $X - Y(A) =$ dış A nedeniyle $Y(A)$ 'nın tümleyeni açıktır ve söz konusu metrik uzayda $Y(A) \in \mathcal{K}(A)$ ve her bir $K \in \mathcal{K}(A)$ için $Y(A) \subseteq K$ geçerli olduğundan $Y(A) = \cap\{K : \mathcal{K}(A)\}$ bulunur; kısaca metrik uzaylarda bir A kümesinin kapanışı

$$\overline{A} = Y(A) = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$$

gerçekler. Öte yandan dış $(X - A)$ açık kümesine ise A **kümesinin içi** denir ve bu küme kısaca *iç*A ile gösterilir. O halde, *iç*$A = \{x \in X : 0 < d(x, X - A)\}$ geçerlidir. Eğer $x \in$ *iç*A ise, $0 < \varepsilon_x < d(x, X - A)$ gerçekleyen pozitif ε_x sayısı sayesinde $S(x, \varepsilon_x) \subseteq A$ gözlemek güç değildir. Tersine eğer bir $x \in X$ elemanı için, uygun bir $0 < \varepsilon$ yardımıyla, $S(x, \varepsilon) \subseteq A$ gerçekleşiyorsa, $X - A$ tümleyen kümesine ait herhangi bir y elemanı $S(x, \varepsilon)$ yuvarına ait olamaz ve sonuçta

$$0 < \varepsilon \leq \inf\{d(x, y) : y \in X - A\} = d(x, X - A)$$

nedeniyle $x \in$ *iç*A bulunur. Demek ki bir metrik uzayda, herhangi bir A altkümesi için *iç*$A = \{x \in X : 0 < d(x, X - A)\} = \{x \in X : \exists \varepsilon_x > 0, S(x, \varepsilon_x) \subseteq A\}$

geçerlidir, kısacası ancak ve yalnız uygun bir yuvarı A tarafından kapsanabilen elemanlar iç A **kümesine aittirler**. İlgili okuyucu, *iç*A 'nın aslında A kümesinin kapsadığı tüm açık yuvarların birleşim **kümesi olduğunu** kolayca gösterecektir, yanılıyor muyum? Aman dikkat, boş olmayan bir kümenin içi boş olabilir; $\mathbf{R}$ kümesi üzerinde tanımlanan bir boyutlu Öklid metriğinde, rasyonel sayılar kümesi, hiç bir $S(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbf{R} : |y-x| < \varepsilon\} = \{y \in \mathbf{R} : x-\varepsilon < y < x+\varepsilon\} = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ yuvarını kapsayamaz, çünkü bu yuvarda yani $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ aralığında sonsuz tane irrasyonel sayı vardır, dolayısıyla bu metrik uzayda rasyonel sayılar kümesi $\mathbf{Q}$ için $iç\mathbf{Q}=\emptyset$ gerçeklenir.

Bir metrik uzayda bir A altkümesi için $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X-A}$ kümesine, yani hem A ve hem de onun tümleyeni $X-A$ kümesine yapışık olabilen noktaların kümesine A **'nın sınır kümesi** denir. Bu kümenin elemanlarına hem A kümesinin ve hem $X-A$ kümesinin elemanlarını kullanarak tanımlanan yakınsak dizilerle yakınsanabilir. Herhangi bir kapanış kümesi için $\overline{A} = içA \cup \partial A$ gerçekleştiğini ve $içA \cap \partial A = \emptyset$ olduğunu söylemekle yetinelim. Bir boyutlu Öklid metriğinde $\partial\mathbf{Q} = \mathbf{R}$ olduğunu gözlemek çok kolaydır. $x \in \mathbf{R}$ ne olursa olsun, $r_n \in (x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n})$ gerçekleyen r_n rasyonel ve $q_n \in (x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n})$ gerçekleyen q_n irrasyonel sayılarının belirlediği $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizilerinin ikisi de $x \in \mathbf{R}$ gerçel sayısına yakınsarlar.

Temel bilgilere ayırdığımız bu bölümü, metrik uzaylarda tanımlı gerçel değerli fonksiyonların sürekliliğine ilişkin bir iki temel bilgiyle sürdürelim. (X, τ_d) metrik uzayında tanımlanmış gerçel değerli bir f fonksiyonuna, ancak ve yalnız, herhangi $0 < \varepsilon$ verildiğinde, $x_0 \in X$ noktasının

$$f(S(x_0, \delta_\varepsilon)) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon), \quad \text{yani } d(x, x_0) < \delta_\varepsilon \text{ ise, } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

koşulu gerçeklenecek biçimde δ_ε yarıçaplı bir açık yuvarı bulunabiliyorsa, evet işte ancak bu koşul altında $x_0 \in X$ **noktasında süreklidir** denir. f fonksiyonuna, (X, τ_d) uzayının tüm noktalarında sürekli olabiliyorsa **sürekli fonksiyon** denir. x_0 noktasında süreklilik için bir başka önemli eşdeğer koşul, (X, τ_d) metrik uzayında $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gerçekleyen **her** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisinin $f(x_0)$ gerçel sayısına yakınsaması koşulunun gerçekleşmesidir. Bu iddianın yalnızca yeterliliğini göstermekle yetinelim. x_0 noktasına yakınsayan her $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $f(x_n) \to f(x_0)$ olsun. Bu hipotez altında f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında süreksiz olsa, yani her $0 < \delta$ için $f(S(x_0, \delta)) \not\subseteq (f(x_0) - \varepsilon_0, f(x_0) + \varepsilon_0)$ gerçeklenecek biçimde bir $0 < \varepsilon_0$ var olsaydı, özellikle her $n \in \mathbf{N}$ için

$$f(S(x_0, \frac{1}{n})) \not\subseteq (f(x_0) - \varepsilon_0, f(x_0) + \varepsilon_0)$$

olurdu; bu ise en az bir $x_n \in S(x_0, \frac{1}{n})$ elemanı için $f(x_n)$ gerçel sayısının $(f(x_0) - \varepsilon_0, f(x_0) + \varepsilon_0)$ aralığına ait olmaması demektir. Oysa $0 \le d(x_n, x_0) \le 1/n$ eşitsizlikleri her $n \in \mathbf{N}$ için geçerli olduğundan $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$, yani $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ olduğu halde $f(x_n) \to f(x_0)$ gerçekleşmez çünkü $f(x_n)$ gerçel sayılarının hiç birisi $(f(x_0) - \varepsilon_0, f(x_0) + \varepsilon_0)$ aralığına ait değildir.

Temel bilgilere ayrılan bu kısmı olağanüstü önemli bir bilgiyle kapatalım: X kümesi üzerinde tanımlı bir d metriğinin belirlediği τ_d topolojisi ile $\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ biçiminde tanımlanan ρ metriğinin belirlediği τ_ρ topolojisi eşittir, başka bir deyişle τ_d ve τ_ρ altküme toplulukları **eşittir**. Öncelikle $\rho(x,y) \le d(x,y)$ yardımıyla, $x \in X$ ve $0 < \varepsilon$ ne olursa olsun $S_d(x,\varepsilon) \subseteq S_\rho(x,\varepsilon)$ ve sonra da çok zorlanmadan $S_\rho(x, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}) \subseteq S_d(x,\varepsilon)$ gözleyebiliriz. O halde, bu bilgiler yardımıyla, τ_d topolojisinin tanımındaki A koşulunu gerçekleyen boştan farklı herhangi bir G kümesinin, ρ metriğinin belirlediği τ_ρ topolojisinin tanımındaki benzer

$$\forall x \in U \ \exists \varepsilon_x > 0, \ \ S_\rho(x, \varepsilon_x) \subseteq U$$

koşulunu gerçekleyeceği ve tersine bu yeni koşulu gerçekleyen U kümelerinin de önceki A koşulunu gerçekleyeceği kolayca görülür, yani kısacası τ_d ve τ_ρ altküme toplulukları tümüyle aynı kümelerden oluşurlar. Metrik uzaylar terminolojisinde d ve ρ metriklerine **eşdeğer metrikler** denir. Dikkat, $0 \le \rho(x,y) \le 1$, kısaca $0 \le \rho \le 1$ gerçeklendiğini unutmayalım. Evet, bu kadar temel bilgi yeter! Yazımızın ikinci bölümünde ise bu konunun devamını bulabileceksiniz...