ZAYIF ASAL SAYI TEOREMİ VE BAZI SONUÇLARI

Emre Alkan
Boğaziçi Üniversitesi, Matematik Bölümü,
Bebek-İSTANBUL

Asal sayıların dağılımları ile ilgili bir çok problem matematikçileri uzun bir süre uğraştırmıştır. Asal sayıların dağılımı üzerine köşe taşı kabul edilebilecek bir sonuç, Rus matematikcisi P. L. Chebyschev (1821-1894) tarafından elde edilmiştir. Chebyschev' in elde ettiği sonuç kabaca şöyle ifade edilebilir. Eğer $\pi(x)$, $\leq x$ olan asal sayıların sayısını veren fonksiyon ise, öyle a, b sabitleri vardır ki, $x \geq 2$ için,

$$a\frac{x}{\log x} < \pi(x) < b\frac{x}{\log x}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu sonuç **Zayıf Asal Sayı Teoremi** olarak bilinmektedir. Chebyschev 'in analizinde a, b sabitleri 1 'e oldukça yakındır. Bu ise **Asal Sayı Teoremi** olarak bilinen ve asal sayıların asimptotik davranışına ışık tutan,

$$\lim_{x\to\infty}\{\pi(x)\frac{\log x}{x}\} = 1$$

savının ortaya atılmasını desteklemiştir. Bu sonuç ise ilk defa 1896 'da J. Hadamard tarafından kanıtlanmıştır. Bu yazıdaki amacımız, Zayıf Asal Sayı Teoremini kanıtlayıp, bazı sonuçlarını elde etmektir.

Lemma: $1, 2, \cdots, n$ sayılarının en küçük ortak katı $f(n)$ olsun. $n \geq 1$ için $f(2n) \geq 2^n$ olur.

Kanıt: $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 \geq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ olduğu görülebilir. $n \geq 1$ için $f(2n) \geq \binom{2n}{n}$ olduğunu görclim. $\binom{2n}{n} = \frac{(n+1)\cdots 2n}{n!}$ sayısının $2n$ 'den büyük asal böleni olamaz. $2 \leq p < 2n$ olacak şekilde herhangi bir p asal sayısının $\binom{2n}{n}$ 'yi bölen en büyük kuvveti,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left\{[\frac{2n}{p^j}] - 2[\frac{n}{p^j}]\right\} = \sum_{j=1}^{m}\left\{[\frac{2n}{p^j}] - 2[\frac{n}{p^j}]\right\},$$

$$m = \left[\frac{\log 2n}{\log p}\right]$$

olarak bulunur. $[\frac{2n}{p^j}] - 2[\frac{n}{p^j}] < \frac{2n}{p^j} - 2(\frac{n}{p^j} - 1) = 2$ olduğundan $[\frac{2n}{p^j}] - 2[\frac{n}{p^j}] \leq 1$ elde ederiz. Böylece p 'nin $\binom{2n}{n}$ 'yi bölen en büyük kuvveti en fazla $m = [\frac{\log 2n}{\log p}]$ olabilir. Öte yandan en küçük ortak katın tanımından,

$$f(2n) = \prod_{2\leq p<2n} p^{[\frac{\log 2n}{\log p}]}$$

yazılabilir. Bu derhal $f(2n) \geq \binom{2n}{n} \geq 2^n$ olduğunu gösterir.

Teorem: Öyle a, b sabitleri vardır ki $x \geq 2$ için $a\frac{x}{\log x} < \pi(x) < b\frac{x}{\log x}$ olur.

Kanıt: Lemma yardımıyla,

$$\begin{aligned} n\log 2 \leq \log f(2n) &= \textstyle\sum_{2\leq p<2n} \log p[\frac{\log 2n}{\log p}] \\ &\leq \pi(2n)\log 2n \end{aligned}$$

ve hemen

$$\log 2\frac{n}{\log 2n} \leq \pi(2n)$$

elde ederiz. Herhangi bir $x \geq 2$ sayısı alalım. $2n$, $\leq x$ olan en büyük çift sayı olsun. Böylece $2n \leq x < 2n+2$ ve $\frac{x}{2} \leq 2n$ olduğu söylenebilir. Buradan kolayca

$$\pi(x) \geq \pi(2n) \geq \log 2 \frac{n}{\log 2n} = \frac{\log 2}{2} \frac{2n}{\log 2n} \text{ ve } \frac{x}{\log x}$$

artan bir fonksiyon olduğundan,

$$\frac{2n}{\log 2n} \geq \frac{x}{2 \log \frac{x}{2}} > \frac{x}{2 \log x}$$

ve sonuç olarak

$$\frac{\log 2}{4} \frac{x}{\log x} < \pi(x)$$

elde ederiz. $a = \frac{\log 2}{4}$ alabiliriz. Bundan sonra $\pi(2n) - \pi(n)$ ifadesi ile ilgileneceğiz.

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 \\ &\leq \left\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}\right\}^2 \\ &= 2^{2n} \end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Ayrıca $n < p < 2n$ olacak biçimde bir p asal sayısı için $p | \binom{2n}{n}$ olduğu açıktır. Böylece,

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)} < \prod_{n<p<2n} p \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$$

ve buradan

$$\pi(2n) - \pi(n) < 2 \log 2 \frac{n}{\log n} \leq 8\pi(n)$$

ve

$$\pi(2n) < 9\pi(n)$$

elde ederiz. Biz $\pi(x) < b\frac{x}{\log x}$ olacak biçimde bir b sabitinin yalnızca varlığını göstereceğiz, bu sabiti hesaplamayacağız. $\pi(2n) - \pi(n) < 2 \log 2 \frac{n}{\log n}$ sonucundan kolayca şu elde edilir:

$$x \geq 2 \text{ için } \pi(2x) - \pi(x) < k \frac{x}{\log x}$$

olacak biçimde bir k sabiti vardır. (k burada $2 \log 2$ 'den biraz farklı olabilir.)

$$\begin{aligned} \pi(x) - \pi(\frac{x}{2}) &< k \frac{x}{2 \log \frac{x}{2}}, \\ \pi(\frac{x}{2})\pi(\frac{x}{2^2}) &< k \frac{x}{2^2 \log \frac{x}{2^2}}, \cdots \end{aligned}$$

eşitsizliklerini toplayarak,

$$\pi(x) < k \sum_{j=1}^{m} \frac{x}{2^j \log \frac{x}{2^j}}, \quad m = \lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor - 1$$

elde edilir. Şimdi $f(x) = \sum_{j=1} m \frac{\log x}{2^j \log \frac{x}{2^j}}$ fonksiyonunun asimptotik davranışını anlamaya çalışalım.

$x \geq 2$ için $f(x) > \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2^j}$ olacağından, x büyük iken m de büyük olduğundan, x 'den bağımsız $f(x) \leq A < 1$ olacak biçimde A sabiti olamaz.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\log x}{2\log \frac{x}{2}} + \frac{\log x}{2^2 \log \frac{x}{2^2}} + \cdots + \frac{\log x}{2^{[\frac{m}{2}]} \log \frac{x}{2^{[\frac{m}{2}]}}} \\
&+ \frac{\log x}{2^{[\frac{m}{2}]+1} \log \frac{x}{2^{[\frac{m}{2}]+1}}} + \cdots + \frac{\log x}{2^m \log \frac{x}{2^m}} \\
&< \frac{\log x}{\log \frac{x}{2^{[\frac{m}{2}]}}} \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{[\frac{m}{2}]}}\right\} \\
&+ \frac{\log x}{2^{[\frac{m}{2}]+1}} \left\{\frac{1}{\log \frac{x}{2^{[\frac{m}{2}]+1}}} + \cdots + \right. \\
&\left. + \frac{1}{2^{m-[\frac{m}{2}]-1}} \log \frac{x}{2^m}\right\}
\end{aligned}
$$

Şimdi $k = 1, 2, \cdots, m - [\frac{m}{2}]$ için, $2^{k-1} \log \frac{x}{2^{[\frac{m}{2}]+k}} > 1$ olduğunu görelim. $k = 1$ için

$$\log \frac{x}{2^{[\frac{m}{2}]} + 1} > 1$$

eşitliği x yeterince büyük seçildiğinde sağlanır. Bundan sonra k üzerine tümevarım yapabiliriz. Tümevarım adımı için, $\log \frac{x}{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2} \log \frac{x}{2^n}$ olduğunu görmek yetecektir. Bu ise $n \leq \frac{\log x}{\log 2} - 2$ olmasına eşdeğerdir. Tümevarım sınırımızdan $n \leq m - 1 = [\frac{\log x}{\log 2}] - 2 \leq \frac{\log x}{\log 2} - 2$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla istediğimizi göstermiş olduk. Bu sonucu ve $m - [\frac{m}{2}] \leq [\frac{m}{2}] + 1$ olduğunu gözönüne alarak, x yeterince büyük iken

$$f(x) < \frac{\log x}{\log x - [\frac{m}{2}] \log 2} + \frac{\log x([\frac{m}{2}] + 1)}{2^{[\frac{m}{2}]+1}}$$

elde ederiz. $\frac{\log x([\frac{m}{2}]+1)}{2^{[\frac{m}{2}]+1}}$ ifadesi $\frac{(\log x)^2}{2^{\frac{\log x}{2\log 2}}}$ ifadesi civarındadır. Bunu,

$$\frac{\log x([\frac{m}{2}] + 1)}{2^{[\frac{m}{2}]+1}} = O(\frac{(\log x)^2}{2^{\frac{\log x}{2\log 2}}})$$

olarak ifade ederiz. $x \to \infty$ iken $\frac{(\log x)^2}{2^{\frac{\log x}{2\log 2}}} \to 0$ olduğundan, x yeterince büyük iken ikinci terim ihmal edilebilir. Öte yandan,

$$\frac{m}{2} \leq \frac{\log x}{2\log 2} - \frac{1}{2}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\frac{\log x}{\log x - [\frac{m}{2}] \log 2} &\leq \frac{\log x}{\log x - \log 2(\frac{\log x}{2\log 2} - \frac{1}{2})} \\
&= \frac{2\log x}{\log x + \log 2} < 2
\end{aligned}
$$

olduğundan $f(x)$ asimptotik olarak üstten sınırlıdır. Ek olarak, toplamı, $[\frac{m}{2}]$ yerine bir $n \geq 2$ için $[\frac{m}{n}]$ keserek, $\frac{\log x}{\log x - [\frac{m}{n} \log 2]} < \frac{n}{n-1}$ olmasını sağlayabiliriz. $\eta > 0$ sayısı verilsin; hem x hem de n yeterince büyük seçilirse,

$$\pi(x) < k(1 + \eta) \frac{x}{\log x}$$

lacaktır. x büyük iken, $n = [x]$ alırsak, $\pi(2n) - \pi(n)$ ve $\pi(2x) - \pi(x)$ ifadeleri hemen hemen aynı lacaktır. $\pi(2n) - \pi(n) < 2\log 2\frac{n}{\log n}$ olduğunu biliyoruz. Böylece x büyük iken $(2x) - \pi(x) < 2\log 2\frac{x}{\log x}$ olacaktır. $k = 2\log 2$ seçebiliriz. Sonuç olarak M uygun bir sınır lmak üzere $x \geq M$ iken $\pi(x) < (2+\varepsilon)\log 2\frac{x}{\log x}, \varepsilon = 2\eta$ sağlanır. Bu eşitlik $x < M$ değerleri ;in de sağlanacak biçimde $(2+\varepsilon)\log 2$ sabiti uygun bir b sabitiyle değiştirilebilir. Böylece $x \geq 2$;in $\pi(x) < b\frac{x}{\log x}$ olacak biçimde bir b sabitinin varolduğunu gösterdik. Bu sonuç zayıf asal sayı eoreminin kanıtı tamamlar.

Şimdi bazı sonuçları ele alalım:

onuç 1: Yeterince büyük x için, $\pi(9x) - \pi(x) = O(\frac{x}{\log x})$ sağlanır.

Kanıt: $x \geq M = M(\varepsilon)$ iken

$$\pi(9x) - \pi(x) \quad > \tfrac{9}{4}\log 2\frac{x}{\log 9x} - (2+\varepsilon)\log 2\frac{x}{\log x},$$

$$\varepsilon > 0$$

ıyısını $2+\varepsilon < \frac{9}{4}$ olacak biçimde seçelim. $\frac{x}{\log 9x} = \frac{x}{\log 9 + \log x}$, $\frac{x}{\log x}$ civarında olacağından, x büyük ken $\alpha\frac{x}{\log x} < \pi(9x) - \pi(x)$ olacak biçimde bir $\alpha > 0$ bulunabilir. Öte yandan,

$$\pi(9x) - \pi(x) < \pi(9x) < \beta\frac{x}{\log x}$$

klindeki bir $\beta > 0$ ise zayıf asal sayı teoreminin bir sonucudur. Bu ise $\pi(9x) - \pi(x) = O(\frac{x}{\log x})$ duğunu gösterir.

Zayıf Asal Sayı Teoreminin kanıtında ister istemez $\psi(x) = \log f(x) = \sum_{p \leq x} \log p[\frac{\log x}{\log p}]$ fonksiyonunu e aldık. $\left[\frac{\log x}{\log p}\right]$ kuvvetleri saydığından $\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p$ olarak da şöyle gösterilebilir: Bu toplamda ıskın terimler, $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ fonksiyonunda geçer. $\theta(x) = O(x)$ ve $\psi(x) = O(x)$ olduğu linmektedir. Burada bunların kanıtlarına girmeyip, yalnız şu ilginç sonucu vermekle yetinelim.

eorem: (Erdös-Kalmar) $x \geq 2$ için $\theta(x) < 2x\log 2$ olur.

anıt: $\prod_{n \leq p \leq 2n} p$ çarpımının $\binom{2n}{n+1}$ sayısını böldüğü görülebilir. $\binom{2n}{n+1} < \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}$ olacağından garitma alarak

$$\theta(2n-1) - \theta(n-1) = \sum_{n \leq p \leq 2n} \log p < 2n\log 2$$

le ederiz. n üzerine tümevarım yapalım. $n = 2$ için yapılacak bir şey yok. $m < n$ için $\theta(m) <$ $\imath \log 2$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned}
n \text{ çift ise } \theta(n) &= \theta(2m) = \theta(2m-1) \\
&< 2(2m-1)\log 2 < 2.2m\log 2 \\
&= 2n\log 2, \\
n \text{ tek ise } \theta(n) &= \theta(2m-1) = \theta(2m-1) \\
&= \theta(m-1) + \theta(m-1) \\
&< 2m\log 2 + 2(m-1)\log 2 \\
&= 2(2m-1)\log 2 = 2n\log 2.
\end{aligned}$$

ımevarım tamamlanır. $x \geq 2$ için $n = [x]$ alırsak,

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= \textstyle\sum_{p \leq x} \log p = \sum_{p \leq n} \log p \\
&= \theta(n) < 2n\log 2 \leq 2x\log 2
\end{aligned}$$

olması kanıtı tamamlar.

Sonuç 2: P_n, $n-$inci asal sayı olsun. Bu durumda öyle a, b sabitleri vardır ki, $n \geq 2$ için $a\,n \log n < P_n < b\,n \log n$ eşitsizlikleri sağlanır.

Kanıt: $x \geq 2$ için $\pi(x) < b\frac{x}{\log x}$ olduğunu biliyoruz. $x = P_n$ alarak $n = \pi(P_n) < b\frac{P_n}{\log P_n}$ ve hemen $\frac{1}{b}n \log P_n < P_n$ elde ederiz. $n < P_n$ olduğundan kolayca $\frac{1}{b}n \log n < P_n$ bulunur. Benzer biçimde $a\frac{x}{\log x} < \pi(x)$ olduğunu biliyoruz, $x = P_n$ olarak,

$$P_n < \frac{1}{a}n \log P_n$$

elde ederiz. Şimdi, n yeterince büyük olduğu zaman $P_n < n^2$ olacağını görelim. Tersine kesin artan bir n_k dizisi için $P_{n_k} \geq n_k^2$ olsaydı,

$$a\frac{n_k^2}{2\log n_k} < \pi(n_k^2) \leq n_k$$

elde ederdik. Fakat n_k yeterince büyük iken elde edilen eşitsizlik sağlanmaz. O halde $n \geq N$ için $P_n < n^2$ olmalıdır. Böylece

$$P_n < \frac{2}{a}n \log n, \; n \geq N$$

elde ederiz. $n = 2, 3, \cdots, N-1$ için de $P_n < c\,n \log n$ olacak biçimde bir c sabiti olarak kolayca $n \geq 2$ için

$$P_n < max(c, \frac{2}{a})n \log n$$

elde ederiz. Bu sonuç 2 'nin kanıtını tamamlar.

Sonuç 3: $g(x) = \sum\limits_{p \leq x} \frac{1}{p}$ ise, $g(x) = O(\log \log x)$ olur.

Kanıt: Sonuç 2 'den P_n asal sayısı $n \log n$ civarındadır. Böylece

$$g(x), \sum_{P_n \leq x} \frac{1}{n \log n}$$

civarında olur. Bu seri ise integral testi ile,

$$\int_2^x \frac{dt}{t \log t} = O(\log \log x)$$

civarındadır. Ayrıntıları okuyucuya bırakıyoruz.

Sonuç 4: $\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$, asal sayıların yoğunluğu sıfırdır.

Kanıt: $\frac{\pi(x)}{x}$, $\frac{1}{\log x}$ civarında olduğundan kolayca görülebilir.

Sonuç 5: $k \geq 1$ sayısı verilsin, $n \geq N = N(k)$ için $P_k^n = P_1 P_2 \cdots P_{n-1}$ olur.

Kanıt: Logaritma alınca istenen,

$$k \log P_n < \sum_{i=1}^{n-1} \log P_i$$

şeklinde yazılabilir. $P_n < c\,n \log n$ olduğundan,

$$k \log P_n < k(\log n + \log \log n + \log c) = O(\log n)$$

olur. Öte yandan,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \log P_i = \theta(P_{n-1}) = O(P_{n-1}) = O(n \log n)$$

sağlanır, çünkü Sonuç 1 'den x büyük iken x ile $9x$ arasında bir asal sayı vardır ve bu $P_{n-1} < P_n < 9P_{n-1}$ olması demektir ki $P_n = O(P_{n-1})$ yazılabilir. Sol taraf $\log n$ civarındadır. Bu, kanıtı tamamlar.

Teorem: $g(x) = \Pi_{p\leq x}(1-\frac{1}{p})$ ise $x \geq 2$ için $(\log x)^{-\varepsilon} < g(x) < c(\log x)^{-1}$ c, $\varepsilon > 0$ sabitleri vardır.

Kanıt: $\frac{1}{g(x)} = \Pi_{p\leq x}(1-\frac{1}{p})^{-1}$ yazalım.

$$(1-\frac{1}{p})^{-1} = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots$$

yazılarak $p \leq x$ bu serilerin Cauchy çarpımı yapılırsa, çıkan toplamda, $[x]$ 'e kadar olan doğal sayıların tersleri geçer. Böylece,

$$\frac{1}{g(x)} = \pi_{p\leq x}(1-\frac{1}{p})^{-1} > \sum_{n=1}^{[x]}\frac{1}{n} > k\log x$$

olacak biçimde bir k sabiti vardır. ($\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} = O(\log x)$ olduğunu biliyoruz.) Böylece,

$$g(x) < \frac{1}{k}(\log x)^{-1}$$

elde ederiz. Şimdi

$$(\log x)^{-\varepsilon} < g(x)$$

olacak şekilde bir $\varepsilon < 0$ sabiti bulalım. Logaritma alarak,

$$-\varepsilon\log\log x < \log g(x) = \sum_{p\leq x}\log(1-\frac{1}{p})$$

ve

$$\sum_{p\leq x}\log\frac{p}{p-1} < \varepsilon\log\log x$$

elde ederiz. $\frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1}$ ve $0 < x \leq 1$ için $\log(1+x) < x$ olduğundan,

$$\sum_{p\leq x}\log\frac{p}{p-1} < 2\sum_{p\leq x}\frac{1}{p-1} < \sum_{p\leq x}\frac{1}{p}\ \varepsilon\log\log x$$

elde edilebilir (Sonuç 3 'den dolayı). Bu, kanıtı tamamlar.

Pozitif tamsayıların kesin artan öyle bir n_k dizisini ele alalım ki dizinin herhangi iki terimi aralarında asal olsun. Örnek olarak asal sayılar dizisi ve Fermat sayıları dizisi $k = 1, 2, \cdots$ için 2^{2^k+1} verilebilir. Daha zor örneklerin hepsinde sözü edilen dizilerin yoğunluğu sıfırdır ve bu bir raslantı değildir. Bu son sonuçla yazıyı bitirelim:

Teorem: n_k yukarda söylendiği gibi bir dizi olsun. $f(x)$, bu dizinin $\leq x$ olan terimlerinin sayısı ise, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$ olur.

Kanıt: Dizinin terimlerinin en az bir asal çarpanı vardır ve bu çarpanlar farklıdır. Böylece hemen $f(x) \leq \pi(x)$ elde ederiz. Sonuç 4 kanıtı tamamlar.

KAYNAKLAR

[1] E. Alkan, Fermat ve Euler Teoremleri Üzerine Uygulamalar, Matematik Dünyası, Cilt: 5, Sayı: 3.

[2] G. H. Hardy, An Introduction to the Theory of Numbers, E. M. Wright, 1979.