KUATERNİYONLAR VE DÖRT TAMKARE TEOREMİ

Oktay K. Pachaev-Engin Büyükaşık

İYTE,Matematik Bölümü, İZMİR

Geçen sayıdaki yazımızda $p = 4k+3$ şeklindeki asal sayıların iki tamkare toplamı şeklinde yazılamayaca ve dolayısıyla her tamsayının iki tamkare toplamı şeklinde yazılamıyacağını göstermiştik.
Doğal olarak her tamsayının üç tamkare toplamı olarak yazılıp yazılamıyacağı sorulabilir. Cevabın hayır olduğu aşağıdaki teorem yardımıyla kolaylıkla görülebilir.

Teorem.1 n pozitif bir tamsayı ve $n \equiv 7(mod\ 8)$ ise, n tamsayısı üç tamkare toplamı şeklinde yazılamaz.

İspat 0'dan 9'a kadar olan sayıların kareleri mod 8'e göre 0, 1 ya da 4'e denktir.Böylece üç tamkare toplamı mod 8'e göre 0, 1, 2, 3, 4, 5 ya da 6'ya denk olur ancak 7'ye denk olamaz.

Fermat her pozitif tamsayının dört tamkare toplamına eşit olduğunu iddia etmiştir. Lagrange 1770 yılında Fermat'ın bu iddiasını yani; her pozitif n tamsayısı için

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

olacak şekilde x, y, z, w tamsayılarının bulunduğunu ispatlamıştır. Örneğin;

$$100 = 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2$$

ve

$$118 = 10^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2.$$

Jacobi ise n tamsayısının bu şekildeki gösterimlerinin sayısını bulmuştur.

Dört Tamkare Özdeşliği: Eğer m ve n,

$$m = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$$

ve

$$n = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2$$

şeklinde yazılabilen iki tamsayı ise bu durumda $mn = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2$ dir.

İspat: Bu özdeşliğin ispatı,

$$c_1 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b4$$
$$c_2 = a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_4 + a_4b3$$
$$c_3 = a_1b_3 - a_3b_1 - a_2b_4 + a_4b2$$
$$c_4 = a_1b_4 - a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b2$$

eşitliklerinden doğrudan yapılabilir.

Yardımcı Teorem: Her asal sayı dört tamkare toplamı şeklinde yazılabilir.

İspat: p asal bir sayı olsun. $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$ olduğundan p'yi tek sayı olarak kabul edebiliriz. İlk olarak p'nin bir katının dört tamkare toplamı şeklinde yazılabileceğini gösterelim.
$X = \{x^2 | 0 \leq x \leq \frac{(p-1)}{2}\}$ ve $Y = \{-1 - y^2 | 0 \leq y \leq \frac{(p-1)}{2}\}$ kümelerinin herbiri $mod\ p$'ye göre birbirne kongürent olmayan $\frac{(p+1)}{2}$ eleman içerir (gerçekten X ve Y'deki bütün elemanlar p den küçük dolayısıyla birbirinden farklıdır). $mod\ p$'ye göre birbirine kongürent olmayan p tane eleman ve diğer taraftan X ve Y kümelerinde toplam $p+1$ eleman oldugundan; X kümesinin bir elemanı

Y kümesindeki bir elemana *mod* p'ye göre kongürent olmalıdır. Böylece $x^2 \equiv -1 - y^2 \pmod{p}$ yani $kp = 1 + x^2 + y^2$, ve buradan da $kp = x^2 + y^2 + 1^2 + 0^2$ olarak bulunur.
Şindi yaptığımız son işlemlerden dolayı $kp = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ ve $k \geq 1$ olduğunu kabul edebiliriz. Amaçladığımız şey k'yı $k = 1$ oluncaya kadar indirgemek.

k çift ise, x, y, z, w'den çift olanların sayısı tektir; gerekirse sıralarını değiştirerek $x \equiv y \pmod{2}$ ve $z \equiv w \pmod{2}$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda

$$\frac{k}{2}p = (\frac{x+y}{2})^2 + (\frac{x-y}{2})^2 + (\frac{z+w}{2})^2 + (\frac{z-w}{2})^2$$

olur. Ve bu işlemi p'nin başındaki sayi tek oluncaya kadar uygulayabileceğimizden, $kp = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$, $k \geq 1$ ve tek bir sayı olarak kabul edebiliriz.
Şimdi $x \equiv x_0$, $y \equiv y_0$, $z \equiv z_0$, $w \equiv w_0 \pmod{p}$ olsun. Burada $|x_0|$, $|y_0|$, $|z_0|$, $|w_0| \leq k/2$'dir. Bu nedenle

$$0 < x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + w_0^2 < (k/2)^2 + (k/2)^2 + (k/2)^2 + (k/2)^2 = k^2$$

ve böylece

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + w_0^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \equiv 0 \pmod{k},$$

buradan da $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + w_0^2 = kl$, $0 < l < k$ bulunur. Şimdi Dört Tamkare Özdeşliğinden;

$$x_1 = xx_0 + yy_0 + zz_0 + ww_0 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \equiv 0 \pmod{k},$$

$$y_1 = (xy_0 - x_0y) + (zw_0 - z_0w) \equiv 0 \pmod{k},$$

$$z_1 = (xz_0 - x_0z) - (yw_0 - y_0w) \equiv 0 \pmod{k},$$

$$w_1 = (xw_0 - x_0w) - (zy_0 - z_0y) \equiv 0 \pmod{k},$$

için;

$$\begin{aligned} k^2lp = (kp)(kl) &= (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + w_0^2) \\ &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + w_1^2 \end{aligned}$$

elde edilir, buradan da

$$lp = (x_1/k)^2 + (y_1/k)^2 + (z_1/k)^2 + (w_1/k)^2$$

dört tamkare toplamı olur ve $1 < l < k$'dir. Sonlu adım sonra aynı indirgeme yöntemi ile $k = 1$ elde edilir. Bu ise p'nin dört tamkare toplamına eşit olduğunu gösterir.

Şimdi yukarıda verdiğimiz teoremlere dayanarak aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç: Her pozitif tamsayı dört tamkare toplamı şeklinde yazılabilir.

Jacobi bir tamsayının farklı dört tamkare toplamı şeklindeki gösterimlerinin sayısı üzerinde çalışmış ve bununla ilgili aşağıdaki teoremi bulmuştur.

Theorem.2 n pozitif bir tamsayı olsun. $n = x^2 + y^2 + w^2 + z^2$ olan (x, y, w, z) dörtlülerinin sayısı, n tek ise, $8\sum_{d|n} d$; n çift ise, d tek olmak üzere $24\sum_{d|n} d$' ye eşittir.

Örneğin $n = 5$ ise teoreme göre, 5'in 8(1+5)=48 tane dört tamkare gösterimi vardır.

Kuaterniyonlar

Bir kuaterniyon, $q = w + ix + jy + kz$ karmaşık sayılarda olduğu gibi; reel kısım $w = Re(q) \in R$ ve sanal kısım olan $Im(q) = ix + jy + kz \in R^3$ nin toplamından oluşur.

Kuaterniyonlar $q = w + ix + jy + kz$ formundaki genelleşmiş karmaşık sayılar (hiperkompleks) olarak düşünülebilir. Buradaki i, j, k arasında aşağıdaki çarpım kuralları vardır;

$$ij = k = -ji,$$

$$jk = i = -kj,$$
$$ki = j = -ik$$

Yukarıda tanımlanan çarpım bağıntılarından, kuaterniyonlar kümesinin (H) çarpma işlemine göre değişmeli olmadığını görebiliriz.

$q = w + ix + jy + kz$ olmak üzere q'nun eşleniği $\bar{q} = w - ix - jw - kz$ olarak tanımlanır. Buradan da

$$q\bar{q} = (w + ix + jy + kz)(w - ix - jy - kz) = ... =$$
$$w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = |q|^2$$

elde edilir. Elde edilen $|q|$ reel sayısına q'nun *normu* adı verilir. Böylece $|q|^2 \neq 0$ yani $q \neq 0$ olduğunda $q(\frac{\bar{q}}{|q|^2}) = 1$ olur bunun anlamı ise, sıfırdan farklı her q'nin q^{-1} ile gösterilen çarpmaya göre tersi olduğudur ve

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

dir.

$q_a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4$ ve $q_b = b_1 + ib_2 + jb_3 + kb_4$ iki kuaterniyon olmak üzere, $q_a q_b$ çarpımı:

$$q_a q_b = (a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4)$$
$$+i(a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3)$$
$$+j(a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_4 b_2 - a_2 b_4)$$
$$+k(a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_3 - a_3 b_2)$$

bulunur. Buradan da iki kuaterniyonun çarpımının normu için

$$|q_a q_b|^2 = |q_a|^2 |q_b|^2$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Bu ise birinci bölümde gördüğümüz "Dört tamkare özdeşliği"'nden başka birşey değildir.

Geçen sayıdaki yazımızda $z = x + iy$ ve $|z| = 1$ koşullarını sağlayan her karmaşık sayının

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

biçiminde bir gösterimi olduğunu göstermiştik. Benzer şekilde $q = w + ix + jy + kz$, $|q| = 1$ ve

$$\vec{n} = \frac{ix + jy + kz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

olmak üzere, q kuaterniyonu

$$q = \cos(\varphi/2) + \vec{n}\sin(\varphi/2)$$

şeklinde yazılabilir.

Gauss tamsayılarının $Z[i] = \{x + iy | x, y \in Z\}$ şeklindeki karmaşık sayılardan oluştuğunu görmüştük. Benzer şekilde kuaterniyon tamsayıları yani katsayıları tamsayı olan kuaterniyonlar kümesini tanımlayabiliriz. Böylece "bir tamsayının dört tamkare toplamı şeklinde yazılabilmesi gerek ve yeter koşul bir kuaterniyon tamsayısının normuna eşit olmasıdır" sonucunu çıkarabiliriz.