DOKUZ NOKTA ÇEMBERİ

Svetlana Gadetska
Ukrayna Bankacılık Akademisi, Kharkov Şubesi, Kharkov, UKRAYNA

Halide Sagıdova

247 sayılı okul, Nesimi Bölgesi, Bakü, AZERBAYCAN

GİRİŞ

Eski zamanlarda matematik denildiğinde geometri anlaşılıyordu. Son yüzyılda matematiğin çok çeşitli dallarının ortaya çıkmasına rağmen geometri çağdaş matematikte önemini korumaktadır.

Eski zamanlardan beri ilgilenen her kişiyi büyüleyen çok sayıda geometrik problem bilinmektedir. Kübün üç katı büyütülmesi, açının üç eşit parçaya bölünmesi ve bir dairenin alanına eşit karenin bulunması gibi, ünlü geometrik çizim problemlerini çözme çabası matematiğin yeni dallarının ortaya çıkmasına neden oldu.

19. asırda yapılan birçok ciddi incelemeler sonucu klasik noktalar, doğrular ve çemberlere yenileri eklendi.

Biz bu yazıda Euler doğrusu ve dokuz nokta çemberinden bahsedeceğiz.

EULER DOĞRULARI

Bir üçgenin kenarlarının orta noktalarını birleştirdiğimizde elde edilen üçgene, o üçgenin orta üçgeni diyelim. Şekil 1'deki $A_1B'C'$ üçgeni ABC üçgeninin orta üçgenidir. Bu üçgenlerin elemanları arasındaki bazı bağıntıları görelim.

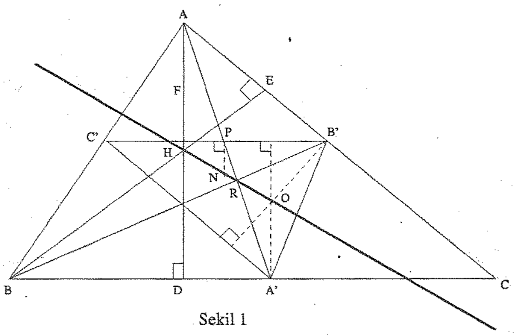
ABC üçgeninin ağırlık merkezini R ile, diklik merkezini H ile, çevrel çemberinin merkezini O ile gösterelim. *O noktası aynı zamanda $A'B'C'$ üçgeninin diklik merkezidir.*

$AB'A'C'$ paralelkenar olduğundan, $[AA']$ ve $[B'C']$ köşegenlerinin P kesişim noktası bu köşegenleri yarıya böler, dolayısıyla $A'B'C'$ üçgeninin $[A'P]$ kenarortayı, ABC üçgenin $[AA']$ kenarortayı üzerinde Benzer şekilde $A'B'C'$ üçgeninin diğer kenarortaylarının da ABC üçgeninin karşılık gelen kenarortayları üzerinde olduğu görülür. Böylece R noktası, $A'B'C'$ üçgeninin de ağırlık merkezidir. ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerinin benzerlik oranı 2:1 olduğundan, $\mid AH \mid = 2 \mid A'O \mid$ ve $\mid AR \mid = 2 \mid A'R \mid$ dir. $[BC]$ kenarına ait yükseklik $[AD]$ olsun. AD ve $A'O$ doğrularının paralelliğinden, AHR ve $A'OR$ üçgenlerinin Kenar-Açı-Kenar (K.A.K.) benzerlik teoreminden 2:1 oranıyla benzer olduğunu, buradan da $\widehat{ARH}$ ve $\widehat{A'RO}$ açılarının eşit olduğunu elde ediyoruz. Dolayısıyla H,R,O noktaları doğrusaldır. Ayrıca $\mid HR \mid = 2 \mid RO \mid$ olduğundan, bu da R noktasının H ve O noktalarının arasında bulunduğunu göstermektedir.

Böylece, aşağıdaki teoremi kanıtladık.

Teorem 1. Her hangi bir üçgenin ağırlık merkezi, diklik merkezi ve çevrel çemberinin merkezi doğrusaldır. Ağırlık merkezi, diklik merkezi ile çevrel çemberinin merkezi arasındaki uzaklığı 2:1 oranında böler. □

Teoremde sözü geçen bir üçgenin ağırlık merkezi, diklik merkezi ve çevrel çemberinin merkezinin üzerinde yer aldığı doğruya **Euler doğrusu** denir.



Sekil 1

DOKUZ NOKTA ÇEMBERİ

Şekil 1'i incelemeye devam edelim. ABC üçgeninin $A'B'C'$ orta üçgeninin çevrel çemberine bakalım. O ve R noktaları $A'B'C'$ üçgeninin sırasıyla diklik ve ağırlık merkezleri olduğundan OR, bu üçgenin *Euler doğrusudur*. $PN, [B'C']$ kenarının orta dikmesi olsun (burada N bu dikmenin OR ile kesişim noktasıdır). Teorem 1'den dolayı $A'B'C'$ üçgeninin çevrel çember merkezi (bu merkez doğal olarak PN üzerindedir) OR Euler doğrusu üzerinde bulunacaktır. Öyleyse $A'B'C'$ üçgeninin çevrel çember merkezi N noktasıdır, ayrıca $r = |NA'| = |NB'| = |NC'|$ yarıçapı ABC üçgenin çevrel çember yarıçapının yarısıdır (ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerinin 2:1 oranıyla benzerliklerinden dolayı).

AH, PN ve $A'O$ doğruları paralel olduğundan ve $[AA']$ doğru parçası PN doğrusu ile kendi orta noktası olan P noktasında kesiştiğiden, PN doğrusu AH ve $A'O$ doğrularından eşit uzaklıktadır. Böylece N, $[HO]$ doğru parçasının orta noktasıdır. $[AH]$ doğru parçasının F orta noktasını ele alalım. Daha önce elde ettiğimiz $|AH| = 2|A'O|$ bağlantısından $|NA'| = |NF|$ eşitliğini elde ediyoruz, yani A' ve F, N merkezli r yarıçaplı çember üzerindeki antipodal (çember ve bir çapının kesiştiği iki nokta) noktalardır. O halde F noktası $A'B'C'$ üçgeninin çevrel çemberi üzerindedir. ABC üçgeninin diğer yüksekliklerinin köşeden H diklik merkezine kadar olan parçalarının orta noktalarının da aynı özelliğe sahip olacağı açıktır. Bu üç nokta da *Euler'in* adını taşıyorlar.

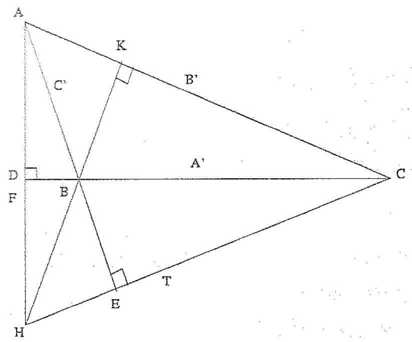
$\widehat{A'DF}$ dik açısı sözü geçen çemberin $[A'F]$ çapını gördüğünden, D noktasının (ve benzer şekilde ABC üçgeninin diğer yüksekliklerinin ayaklarının da) bu çemberin üzerinde olduğunu elde ediyoruz. Böylece $A'B'C'$ üçgeninin çevrel çemberi ABC üçgeninin Euler noktalarından ve yüksekliklerinin ayaklarından geçer.

Başka bir deyişle, ABC üçgeninin dokuz özel noktasından geçen bir çemberin bulunduğunu kanıtladık. Bu önemli sonucu aşağıdaki teorem şeklinde verelim.

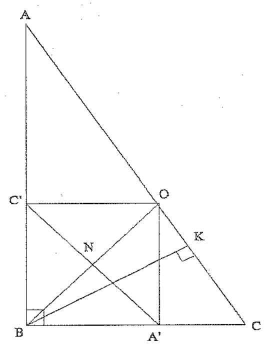
Teorem 2. Herhangi bir üçgenin tüm yüksekliklerinin ayakları, tüm kenarlarının orta noktaları ve Euler noktaları aynı bir çember üzerinde bulunur. Bu çemberin yarıçapı, üçgenin çevrel çemberinin yarıçapının yarısına eşittir, merkezi de Euler doğrusu üzerindedir ve üçgenin diklik merkezi ile çevrel çemberinin merkezi arasında bulunur. □

Teoremde bahsedilen çember **dokuz nokta çemberi** olarak bilinir.

Teoremin ispatında kullandığımız şekildeki üçgen dar açılıydı. Geniş açılı üçgende diklik merkezi üçgenin dışında kalacaktır (Şekil 2'deki H noktası). Dik üçgende ise ele alınan 9 nokta Şekil 3'teki B, A', K, O, C' gibi beş noktaya dönüşür.



Sekil 2



Sekil 3

Aşağıdaki dört problem ise okuyuculara alıştırma olarak verilmiştir.

Dokuz nokta teoremi hakkında daha fazla bilgi için kaynakçada belirtilen kitablara bakabilirsiniz.

PROBLEMLER

1. Geniş açılı üçgen için Teorem 2'yi detaylı şekilde kanıtlayınız.

2. Dik üçgen için Teorem 2'yi detaylı şekilde kanıtlayınız.

3. ABC üçgeninin iç açıortaylarını, çevrel çemberi D, E, F noktalarında kesene kadar uzatalım. Açı ortaylarının kesişim noktası L olmak üzere, $[AL], [BL], [CL], [DL], [EL], [FL], [DE], [EF], [DF]$ doğru parçalarının orta noktalarının aynı çember üzerinde bulunduğunu kanıtlayınız.

4. Bir kirişler dörtgenin köşegenleri birbirine dik ise, bunun kenarlarının orta noktaları ve köşegenlerin kesişim noktasından kenarlara inilen dikmelerinin ayakları aynı çember üzerindedir. Kanıtlayınız.

Kaynakça

1. H.S. Coxeter, S.L. Greitzer. Geometry Revisited. Mathematical Assn. of America, New-York

2. H.S. Coxeter. Introduction to Geometry. 2-*nd* Ed., J.Wiley&Sons, 1989