PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

- Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

- Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

- Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla/İzmir adresine 31 Ağustos 2001 tarihine kadar gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.231. 1'den bir $n > 1$ pozitif tam sayısına kadar olan sayıların art arda yazılmasından elde edilen sayıya "seri" diyelim (örneğin, 1234, 12345678910111213 v.s.). İki serinin çarpımının seri olamayacağını ispatlayınız.

A.232. ABC dik üçgeninin AB hipotenüsü üzerinde, $BM - MC$ ve $|AN| = |AC|$ olacak şekilde, M ve N noktaları alınmıştır. Sonra $|BP| = |BN|$ ve $|AQ| = |AM|$ olacak şekilde, BC ve AC kenarları üzerinde sırasıyla P ve Q noktaları alındılar. C, Q, M, N, P noktalarının aynı çember üzerinde bulunduğunu gösteriniz.

A.233. $a_1, a_2, ..., a_{200}$ sayılarından bir kısmı mavi kalemle, geriye kalanları kırmızı kalemle yazılmıştır. Kırmızı sayıları silersek, geriye 1'den 100'e kadar olan tüm tam sayılar (artan sırayla) kalacak. Mavi sayıları silersek, geriye 100'den 1'e kadar tüm tam sayılar (azalan sırayla) kalacak. $a_1, a_2, ..., a_{100}$ sayıları arasında 12'den 100'e kadar olan tüm tam sayıların bulunduğunu ispat ediniz.

A.234. her n pozitif tam sayısı için

$$\{\sqrt{(1)}\} + \{\sqrt{(2)}\} + ... + \{\sqrt{(n^2)}\} \leq \frac{n^2-1}{2}$$

olduğunu gösteriniz. (Burada $\{x\} = x - [|x|]$, x sayısının kesir değerini göstermektedir).

A.235. $2x2x2$ boyutlu kübü dört tane $1x1x1$ boyutlu kübün açılımı ile kapatmak mümkün müdür?

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.231. Her $n > 2$ tam sayısı için

$$a_n = 2^{2^n - 1} - 2^n - 1$$

sayısının bileşik olduğunu gösteriniz.

Y.232. ABC ikizkenar üçgeninde ($|AB| = |AC|$)AK ve BL kenarortaylarıdır. $\widehat{BAK} = \widehat{CBL} = 30°$ ise, ABC üçgeninin iç açılarının kosinüsünü bulunuz.

Y.233. Bir ülkede N tane havayolu şirketi var ve her kentten tüm şirketlerin birer uçuşu bulunur. Herhangi iki kentten birinden diğerine uçakla gitmek mümkündür (doğrudan veya birkaç uçak değiştirerek). Ekonomik krizden dolayı N-1 tane uçuş iptal edildi, fakat hiçbir şirketin birden fazla uçuşu iptal edilmedi. Yine de herhangi kentten diğerine uçakla ulaşmanın mümkün olduğunu gösteriniz.

Y.234. Aşağıdaki koşulları gerçekleyen tüm $f : R \to R$ sürekli fonksiyonları bulunuz.

a-) Her $x \in R$ için $f(x) = x + f(x - f(x))$

b-) $f(0) = 0$

Y.235. Pozitif tam sayılar kümesi birbiriyle kesişmeyen iki sonsuz kümeye ayrılmıştır. Her iki kümede toplamları birbirine eşit olan 100'er sayı bulunduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

A.221. Terimleri tam sayılar olan bir sonsuz aritmetik dizinin bir terimini tam küp olduğunu varsayalım. bu dizinin terimleri içinde sonsuz çoklukta tam küpler bulunduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. Dizinin tam küp olan terimlerinden birine m^3 diyelim. Dizi farkı da d olsun. O halde k herhangi doğal sayı olmak üzere,

$$(m + kd)^3 = m^3 + 3mkd(m + kd) + k^3d^3 =$$

$$= m^3 + d \cdot [3m^2k + 3mk^2d + k^3d^2]$$

Sayısı bir tam küptür ve verilen aritmetik dizinin bir terimidir.

A.222. İstenilen dört tanesinin bir ortak noktası bulunan beş çemberin beşinin de bir noktadan geçtiğini kanıtlayınız.

Çözüm. 1.,2.,4. ve 5. çemberlerin ortak noktasına A; 1.,3.,4. ve 5. çemberlerin ortak noktasına B; 2.,3.,4. ve 5. çemberlerin de ortak noktasına C diyelim. A, B ve C noktaları içinde en az ikisi çakışmak zorundadır. Çünkü bu noktaların üçü de 4. ve 5. çemberlerin kesişme noktaları içindedir. (İki ayrı çember, en fazla iki farklı noktada kesişebilir). Böylece, noktalardan en az ikisi (diyelimki, A ve B) çakışmak zorundadır. O halde, çemberlerin hepsi A noktasından geçecektir.

A.223. Düzlem üzerine alınmış A, B, C, D noktaları öyledir ki, herhangi P noktası için $|PA| + |PD| \geq |PB| + |PC|$ eşitsizliği sağlanmaktadır. B ce C noktalarının AD doğru parçası üzerinde bulunduklarını ve $|AB| = |CD|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. P noktasının seçimi üzerine bir kısıtlama olmadığından, önce $P = A$ koyalım. O halde $|AD| \geq |AB| + |AC|$ olur. Sonra da $P = D$ koyalım. Bu durumda $|AD| \geq |BD| + |DC|$ olur. Eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak, $2|AD| \geq |AB| + |AC| + |BD| + |CD|$ elde ederiz. Öte yandan, üçgen eşitsizliğine göre, $|AD| \leq |AC| + |CD|$ ve $|AD| \leq |AB| + |BD|$'dir. Bu eşitsizliklerin eşitliğe dönüşmesi için C ve B noktalarının AD parçası üzerinde olmasıdır. Son iki eşitsizliği taraf tarafa toplarsak, $2|AD| \leq |AB| + |AC| + |BD| + |CD|$ olur. Yukarıdaki eşitsizliği de göz önüne alırsak, $2|AD| = |AB| + |BD| + |DC| + |CA|$ elde ederiz.Bu sonuncu eşitlikten de A, B, C, D nin doğrusal olması ve yukarıda yazılan eşitsizliklerin hepsinin eşitlik olması çıkar. Bundan sonra $|AB| = |CD|$ olacağını görmek zor değildir.

A.224. Negatif olmayan her a ve b sayıları için $\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$ eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm. Eşitsizliği şu biçimde yazalım:

$$\frac{a+b}{2} \cdot [a + b + \frac{1}{2}] \geq \sqrt{ab}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \qquad (1)$$

Şimdi, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ve $a + b + \frac{1}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (sonuncuyu siz kanıtlayınız) eşitsizlikleri doğru eşitsizlikler olduğundan, (1) eşitsizliğide doğrudur.

A.225. ABC üçgeninin [AD] yüksekliği üzerinde bir P noktası alınıyor, BP ve CP doğrularının [AC] ve [AB] ile kesişim noktaları sırasıyla E ve F ile gösteriliyor. [DA'nın, FDE açısına ait açıortay olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. A noktasından geçen ve BC doğrusuna paralel olan doğru ile DE ve DF doğrularının kesişim noktaları H ve G olsun. Ceva teoremi gereğince,

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

ve ilgili üçgenlerin benzerliğinden

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AG}{BD}, \frac{CE}{EA} = \frac{DC}{AH}$$

yazılarak, bunlardan $AG{=}AH$ elde edilir. $AD \perp GH$ olduğundan DGH ikizkenardır, dolayısıyla [DA, $\widehat{FDE}$ nın açıortayıdır.

Y.221. Her $i = 1, 2, ..., n$ için $x_i \geq 0$ ve $x_1 + x_2 + ... + x_n = 10$ bağlantılarını sağlayan $x_1, x_2, ..., x_n$ sayıları için $S = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n$ toplamının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

Çözüm. $max\{x_1, x_2, ..., x_n\} = x_k$ olsun.O halde

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1} + \sum_{i=k}^{n-1} x_i x_{i+1} \leq$$

$$x_k \cdot \sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k \cdot \sum_{i=k+1}^{n} x_i = x_k \cdot (10 - x_k) \leq$$

$$[\frac{x_k + (10 - x_k)}{2}]^2 = (\frac{10}{2})^2 = 25 \Rightarrow S \leq 25$$

Öte yandan, $x_1 = x_2 = 25$, $x_3 = x_4 = ... = x_n = 0$ için $S(x_1, x_2, ..., x_n) = 25$ olur. Dolayısıyla, $x_1, x_2, ..., x_n$ sayılarının sağladığı koşullar altında $S(x_1, x_2, ..., x_n)$ toplamının alabileceği en büyük değer 25'tir.

Y.222. Her $n \in \mathbb{N}$ için sistemin reel çözümlerini bulunuz:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 3$$
$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 3^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n = 3^n$$

Çözüm. n=1 için $x_1 = 3$; n=2 için

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 3^2$$

sistemi elde ediliyor. Birinci eşitlikte her tarafın karesi alınıp, ikinci ile taraf tarafa çıkarılırsa, $x_2x_2 = 0$ olur. Buradan: ya $x_1 = 0, x_2 = 3$; ya da $x_1 = 3, x_2 = 0$.

Şimdi, $n \geq 3$ olsun. Sistemden aşağıdaki iki denklemi ele alalım:

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 3^2,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3 = 3^3.$$

Birinci eşitliği $(\frac{x_1}{3})^2 + (\frac{x_2}{3})^2 + ... + (\frac{x_n}{3})^2 = 1$ biçiminde yazarsak, her $i = 1, ..., n$ için $(\frac{x_i}{3})^2 \leq 1$ ve dolayısıyla, $(\frac{x_i}{3})^3 \leq (\frac{x_i}{3})^2 \leq 1$ olur. Böylece,

$$1 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{x_i}{3})^3 \leq \sum_{i=1}^{n} (\frac{x_i}{3})^2 = 1$$

ifadesinden

$$\sum_{i=1}^{n} [(\frac{x_i}{3})^2 - (\frac{x_i}{3})^3] = 0 \Rightarrow$$

Her $i = 1, 2, ..., n$ için

$$(\frac{x_i}{3})^2 - (\frac{x_i}{3})^3 = 0 \Rightarrow$$

$$(\frac{x_i}{3})^2 (1 - \frac{x_i}{3}) = 0, \ (i = 1, 2, ..., n)$$

elde ederiz. Dolayısıyla, her i için ya $x_i = 0$, ya da $x_i = 3$ olmalıdır. Yani, sistemin çözüm kümesi $(3, 0, ..., 0), (0, 3, 0, ..., 0), (0, 0, ...0, 3)$ tür. (Göründüğü gibi, $n \geq 3$ için tüm sistemin çözüm kümesi, II. ve III. denklemlerden oluşan sistemin kümesi ile çakışıyor.)

Y.223. Her $\alpha \leq 1$ ve $1 \geq x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n > 0$ sayıları için $(1 + x_1 + x_2 + ... x_n)^\alpha \leq 1 + 1^{\alpha-1}x_1^\alpha + 2^{\alpha-1}x_2^\alpha + ... + n^{\alpha-1}x_n^\alpha$ eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz.

Çözüm. Tümevarım uygulayalım. n=1 için eşitsizlik açıktır. Şimdi, eşitsizliğin bir n için doğru olduğunu varsayarak n+1 için ispatlayalım.

$$(1+x_1+x_2+...x_n+x_{n+1})^\alpha - (1+x_1+x_2+...x_n)^\alpha =$$

$$1+x_1+x_2+...x_n)^\alpha[(1+\frac{x_{n+1}}{1+x_1+x_2+...x_n})^\alpha - 1] \leq$$

($(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$ eşitsizliğini (Bernoulli eşitsizliği) uyguluyoruz)

$\leq (1 + x_1 + x_2 + ...x_n)^{\alpha-1} \cdot x_{n+1} \leq$ ($\alpha - 1 < 0$ olduğunu gözönüne alıyoruz)

$\leq [(n+1)x_{n+1}]^{\alpha-1} \cdot x_{n+1} = (n+1)^{\alpha-1}x_{n+1}^\alpha$ eşitsizliğinden ve tümevarım varsayımından

$$(1 + x_1 + x_2 + ...x_n + x_{n+1})^\alpha \leq$$

$$(1 + x_1 + x_2 + ...x_n)^\alpha + (n+1)^{\alpha-1} \cdot x_{n+1}^\alpha \leq$$

$$1+1^{\alpha-1}x_1^\alpha+2^{\alpha-1}x_2^\alpha+...+n^{\alpha-1}x_n^\alpha+(n+1)^{\alpha-1}x_{n+1}^\alpha$$

elde ederiz.

Y.224. Uzayda uzunlukları eşit olan 3 doğru parçası rasgele yerleştirilmiştir. Bu parçaların ortogonal(dikey) izdüşümlerinin eşit olduğu bir düzlemin varlığını gösteriniz.

Çözüm. Önce basit bir gözlem yapalım: Verilen bir parçayı kendi kendine paralel olacak biçimde kaydırırsak, onun bir düzlem üzerindeki ortogonal izdüşümünün uzunluğu bundan etkilenmez.

Şimdi, bir O noktası alalım ve parçaları kendilerine paralel kaydırarak bir uçlarını O noktasına getirelim. Ortaya çıkan parçalara OA,OB,OC diyelim. $|OA| = |OB| = |OC|$ olduğundan, A,B ve C noktaları bir doğru üzerinde değilller (bir çember üzerindeler). Şimdi, O noktası A,B ve C noktalarını üzerinde bulunduran düzlem üzerinde ise, problemde istenen düzlem olarak bu düzlemi alırız. (Çünkü OA, OB, OC 'nin bu düzleme izdüşümleri kendileridir ve $|OA| = |OB| = |OC|$'dir.) O boktası ABC düzleminde olmasın. Bu takdirde ABC düzlemi istenen düzlemdir. Gerçekten, O ABC düzlemine indirilen dikmenin ayağına P dersek, OPA, OPB, OBC dik üçgenlerinin hipotenusları ve bir dik kenarları eşit olduğundan diğer dik kenarları da eşit olacaktır: $|PA| = |PB| = |PC|$

Y.225. Biçimini değiştirmeyen bir ABC üçgeninin A köşesi sabit olup B köşesi bir çember üzerinde hareket etmektedir. C köşesinin geometrik yerinin bir çember olduğunu ispatlayınız.

Çözüm. B köşesi O merkezli çember üzerinde hareket etsin. AC üzerinde $AB' = AB$ alıp AOB üçgenine eş $AO'B'$ üçgenini çizelim. $\widehat{O'AB'} \cong \widehat{OAB}$ ve $\widehat{O'AO} \cong \widehat{B'AB}$ olur. Dolayısıyla AO', sabit AO doğrusu ile sabit açı yapar. AO' nün doğrultusunun sabit oluğu böylece anlaşılır. $AO = AO'$ nedeniyle O' sabittir. $O'B' = OB$ den de B' nün O' den daima OB uzaklığında olduğu yani B' nün geometrik yerinin O' merkezli OB yarıçaplı çember olduğu anlaşılır. $\frac{AC}{AB'} = \frac{AC}{AB}$ sabittir. O halde C nin geometrik yeri B'

nün geometrik yeri olan çemberin homotetiği olan çemberdir.

(13. Sayfanın devamı)

DOĞANIN SAYILARI
Yazan: I. Stewart, İzdüşüm Yayınları, 2000

Her gece gökyüzünde yıldızlar dairesel yörüngelerde hareket ediyor. Mevsimler yıllık ritimlerde kendilerini tekrarlıyor. Hiçbir kar tanesi bir diğerinin aynı değil, fakat hepsi de altıgen simetriye sahip. Kaplanların ve zebraların kürkleri çubuk desenli, leoparlarla sırtlanlarınki benekli, vb. Doğa modellerle ve bu modeller de yaşam bilmecesine ilişkin ipuçlarıyla dolu. Matematiğin doğaya yaklaşımı, Sherlock Holmes'un küçük bir kanıt parçasına yaklaşımına benziyor. Ünlü dedektif nasıl bir sigara izmaritinden sahibinin özelliklerine ilişkin sonuçlar çıkarabiliyorsa, matematik de, örneğin kar tanelerinin altıgen formundan buz kristallerinin atom geometrisine varabiliyor. stewart bu kitabında, keman yaylarından damlatan musluklara, hayvanların yürüyüş ritimlerinden çiçek yapraklarının sayısal düzenine kadar, hayatın içerdiği pek çok somut model üzerinden giderek, yaşamdaki değişim ile süreklilik ilişkisi, kelebek etkisi ve kaos teorileri, vb. birçok soyut tartışma konusuna ulaşıyor. Kitap boyunca matematiksel evrende bize rehberlik yapan Stewart, okuyuculara matematiksel bir Sherlock Holmes olmanın nasıl birşey olduğunu göstermeyi amaçlıyor.

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

* Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

Matematik Dünyası
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,
Matematik Bölümü, 35435
Gülbahçe-Urla,İZMİR

adresine posta ile gönderilmeli, ya da *mdunyasi@galois.iyte.edu.tr* adresine elektronik posta ile gönderilmelidir.