

## DESCARTES İŞARET KURALI

İsmail Aslan

İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Urla, İZMİR

e-posta: iaslan@likya.iyte.edu.tr

Tarih boyunca insanlığın yaptığı birçok aktivite matematiksel çıkarımlar ve çözümler gerektiriyordu. Örneğin, vergi toplamak ve ticaret yapmak amacıyla, tarımda toprağın alanını ve elde edilen ürünün miktarını ölçebilmek önemliydi. Denize ilk erişildiği zaman, bir geminin konumunu belirleme problemi ortaya çıkmıştı. Gemilerle birlikte topların geliştirilmesi; uzaklık, yükseklik ve yörünge kavramlarını içeren problemleri beraberinde getirdi. Köprüler, yollar ve binalar inşa etmek için bazı problemlerin çözümlerine gereksinim duyuldu. Tabiatana yanıtlanmayı bekleyen birçok soruyla donanmıştı. Bu sorular tipik olarak hareket, hız, ivme ve zaman gibi şeyleri kapsamaktaydı. Sözüünü ettiğimiz bütün bunlar kendileri ile ilgili bir tür matematiksel denklemlere sahiptirler. Bu nedenledir ki denklem çözümleri, matematikte, her zaman temel uğraşlardan biri olagelmıştır.

Yukarıda sözüünü ettiğimiz olayların bazılarının matematiksel modellenmesinde polinom denklemlerle karşılaşılır. Bu tercih edilebilir bir durumdur, çünkü polinom denklemler diğer denklemlere kıyasla daha iyi, daha hoş davranış gösterirler. Bu doğrultuda geliştirilen denklemler teorisi, polinom denklemlerin köklerinin yapısı ve kökleri bulma metodları ile ilgili olup, matematik ve fen bilimlerinin her dalında uygulama alanına sahip olmuştur. Polinom denklemler üzerine yapılan yoğun çalışmalar, bazı gözlemlere ve teoremlerin doğmasına yol açmış ve bunlardan biri de Descartes İşaret Kuralı olarak isimlendirilmiştir. Bu kural, kısaca, bir polinom denklemin köklerinin karakterini (pozitif, negatif ya da sanal) belirlemeye yardımcı bir araç olarak geliştirilmiştir.

Yeri gelmişken,  $n$ -inci dereceden gerçel katsayılı bir polinom denklemin,  $a_0, a_1, \dots, a_n \neq 0$  gerçel sayılar olmak üzere,

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

şeklinde tanımlandığını belirtelim. Bilindiği gibi, Cebirin Temel Teoremine göre,  $n$ -inci dereceden bir polinom denklemin (kompleks düzlemde)  $n$  tane kökü vardır. Yazımızın ana konusu Descartes İşaret Kuralı olmakla beraber, tam veya rasyonel katsayılı bir polinom denklemin tam ve rasyonel kökleri hakkında bilgi edinmeye ve bu kökleri bulmaya yarayan yöntemlerin birinden söz etmek yerinde olacaktır. Göz önüne alacağımız denklem eğer rasyonel katsayılı ise, kökleri değiştirmeksizin, katsayıların ortak paydası ile denklemin her iki tarafını çarparak orijinal denklemi, katsayıları tamsayı olan başka bir denkleme dönüştürebileceğimiz açık olsa gerek. Yani, rasyonel katsayılı bir denklem daima tam katsayılı bir denkleme indirgenebileceğinden, buradaki tartışmamızı tam katsayılı (1) denkleminin yerine tam katsayılı bir denkleme indirgenen bir denkleme yapmamız bize zaman kazandıracaktır.

Şimdi, (1) denkleminde  $a_0, a_1, \dots, a_n \neq 0$  katsayılarının tamsayı olduğunu kabul edelim. Herhangi bir  $k$  sayısının (1) denkleminin kökü olması

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0 = 0 \quad (2)$$

eşitliğinin gerçekleşmesi ile eşdeğerdir. Bir adım daha atarak, (2) eşitliğini

$$k(a_n k^{n-1} + a_{n-1} k^{n-2} + \dots + a_1) = -a_0 \quad (3)$$

şeklinde düzenleyebiliriz. Eğer  $k$  bir tamsayı ise, her  $i$  için  $a_i$  tamsayı olduğundan, (3) eşitliğinden  $k \mid a_0$  olduğunu, yani  $k$ 'nin  $a_0$  sabit terimini böleceği sonucunu çıkarırız. Böylece **Tam Kök Testi** olarak isimlendirdiğimiz şu gerçeği ifade edebiliriz:

*$a_0, a_1, \dots, a_n \neq 0$  tamsayılar olmak üzere (1) denklemini göz önüne alalım. (1) denkleminin tam kökü olabilecek sayılar,  $a_0$  sabit teriminin bölenleridir.*

Başka bir deyişle,  $a_0$  sabit teriminin bölenleri (1) denklemi için aday tam kökler olacaktır. Eğer  $a_0 \neq 0$  ise, bu durumda  $a_0$  sabit teriminin sonlu sayıda bölenleri olacağından, bu bölenlerden hangisinin denklemin kökü olacağını (denkleminde yerine koyarak) birkaç adımda görebiliriz. Eğer  $a_0 = 0$  ise,  $x = 0$  bir tam kök olup, diğer olası tam kökleri bulmak için de  $a_1$  katsayısının bölenlerini sınamak gerekecektir. Şimdi bir örnek verelim.

**Örnek 1 :**  $x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 6 = 0$  denkleminin (varsa) tam köklerini bulmaya çalışalım. Sabit terim  $-6$  olup,  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$  bölenlerine sahiptir. Bunları denkleminde yerlerine koyup sınyarak,  $1$  ve  $-3$  tamsayılarının denklemin kökleri olduğunu kolayca görebiliriz. Diğer taraftan,  $(x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$  ifadesi denklemin bir çarpanı olacağından, sentetik bölme yöntemiyle, denklemin diğer çarpanını  $x^2 + 2$  olarak elde ederiz. Yani,  $x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 6 = (x-1)(x+3)(x^2 + 2) = 0$  olup, denklemin başka tam köklerinin olmayacağı görülür.

Şimdi de, tam katsayılı (1) denkleminin rasyonel köklerinin nasıl bulunacağı sorusunu irdelleyelim. Bilindiği gibi, herhangi bir  $r$  rasyonel sayısı,  $p$  ve  $q$  aralarında asal tamsayılar,  $q \neq 0$  olmak üzere,  $p/q$  olarak yazılabilir. Bu şekildeki bir  $r$  rasyonel sayısının (1) denkleminin kökü olması

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

eşitliğinin gerçekleşmesi ile eşdeğerdir. Bu eşitlikten de aşağıdaki özdeş eşitlikleri elde edebiliriz:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

$$a_n p^n = -q(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) \quad (4)$$

$$a_0 q^n = -p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}) \quad (5)$$

O halde, (4) eşitliğinden,  $q \mid (a_n p^n)$  olduğunu kolayca görürüz. Ayrıca,  $p$  ve  $q$  aralarında asal olduğundan,  $q$  ve  $p^n$  aralarında asal olacaktır. Buradan da,  $q \mid a_n$  sonucunu çıkarırız. Aynı yaklaşımla, (5) eşitliğinden de  $p \mid a_0$  olduğu görülecektir. Bu gözlemin sonucundan, **Rasyonel Kök Testi** olarak isimlendirdiğimiz başka güzel bir gerçeği de şu şekilde ifade etmek olanaklıdır:

*$a_0, a_1, \dots, a_n \neq 0$  tamsayılar olmak üzere (1) denklemini göz önüne alalım. (1) denkleminin rasyonel kökü olabilecek sayılar,  $p \mid a_0$  ve  $q \mid a_n$  olmak üzere,  $p/q$  formundaki rasyonel sayılardır.*

**Örnek 2 :**  $6x^4 - 19x^3 + 5x^2 - 38x - 14 = 0$  denkleminin (varsa) rasyonel köklerini bulalım. Olası rasyonel kökler,  $p \mid -14$  ve  $q \mid 6$  koşulu ile,  $p/q$  formundadır. O halde,  $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$  ve  $q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$  olup  $p/q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14, \pm 1/2, \pm 1/3, \pm 1/6, \pm 2/3, \pm 7/2, \pm 7/3, \pm 7/6, \pm 14/3\}$  kümesi olası bütün rasyonel kökleri gösterecektir. Denkleminde yerine koyarak bu sayıları kontrol edersek bulacağımız ilk rasyonel kök  $-1/3$  dir. O halde,  $3x + 1$  ifadesi denklemin bir çarpanı olup sentetik bölme yöntemi ile denklem  $6x^4 - 19x^3 + 5x^2 - 38x - 14 = (3x + 1)(2x^3 - 7x^2 + 4x - 14) = 0$  olarak yazılabilecektir. Diğer kökleri bulmak için, aynı yöntemi  $2x^3 - 7x^2 + 4x - 14$  çarpanına uygulayalım. Bu defa aradığımız aday rasyonel kökler,  $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14, \pm 1/2, \pm 7/2$  olup bu sayıları da  $2x^3 - 7x^2 + 4x - 14 = 0$  denklemi için kontrol edersek,  $7/2$  sayısının diğer bir rasyonel kök olduğunu keşfederiz. Yani,  $2x - 7$  ifadesi de denklemin bir çarpanı olacaktır. Yaptığımız bu gözlemlerden sonra, denkleminizi  $6x^4 - 19x^3 + 5x^2 - 38x - 14 = (3x + 1)(2x - 7)(x^2 + 2) = 0$  şeklinde düzenleyerek başka rasyonel köklerin olamayacağı sonucunu çıkarırız.

Denklemler teorisinde üstesinden gelinmeye çalışılan bir başka soru da, bir denklemin pozitif, negatif, ve kompleks köklerinin sayısının tahmin edilebilmesiydi. Cardan (1501-1576), bir denklemin kompleks kökünün eşleniğinin de aynı zamanda bir kök olacağını farkına varmıştı. Bu durum, günümüzde, eşlenik-çift teoremi olarak anılmaktadır. Newton (1643-1727), *Aritmetica Universalis* adlı eserinde bu teoremin kanıtını verdi. Fakat, yazımızın akışından, bizim polinom denklemlerin gerçel (reel) kökleriyle ilgilendiğimiz açık olsa gerek. Descartes (1596-1650), devrim yaratan *La Geometrie* adlı yapıtında polinom denklemlerin köklerini tartışırken, işaretlerle ilgili kuralından söz etmiş ama kanıtına dair herhangi bir ipucu vermemişti. Büyük dikkat çeken söz konusu kuralı şu şekilde sunmuştu:

On connoift auffy de cecy combien il peut y auoir de vraves racines, & combien de fauffes en chafque Equation. A fçauoir il y en peut auoir autant de vraves, que les fignes + & -- s'y trouuent de fois efre changes; & autant de fauffes qu'il s'y trouue de fois deux fignes +, ou deux fignes- quie s'entrefuiuent.

Aynı zamanda, bir denklemin doğru ve yanlış köklerinin sayısını aşağıdaki gibi belirleyebiliriz: Bir denklem, en fazla, + dan - ye veya - den + ya, içerdiği işaret değişimi kadar doğru köklere; ve, en fazla, ardışık olarak bulunan iki + işareti veya iki - işaretinin sayısı kadar yanlış köklere sahip olabilir.

Descartes, burada, pozitif kökler için doğru kökler, negatif kökler için de yanlış kökler terimlerini kullanmıştı. Bu işaret kuralının Descartes'in, *La Geometrie* adlı yapıtından önce bilinip bilinmediği konusunda anlaşmazlıklar yaşanmıştır. Bazıları, bu kuraldan Thomas Harriot'ın (1560-1621), 1631 yılında yayımlanan *Artis analyticae praxis* adlı eserinde yer verdiğinden söz eder. Cantor (1845-1918), bu görüşe, Harriot'ın negatif köklerin varlığını kabul etmediği savıyla karşı çıkar. Cardan da, ayrıca, pozitif köklerin ortaya çıkışı ve işaretçe bir ya da iki değişimin varlığı arasında ilişki kuran bir bağıttan söz etmişti. Newton, sanal köklerin sayısını bulan bir yöntem geliştirdi. Leibniz (1646-1716), ispatın ana hatlarını duyurdu, fakat ayrıntısına girmedi. 1745'den 1828'ye kadar birçok matematikçi, Descartes kuralının ispatı üzerinde çalıştı ve bu kuralı daha anlaşılır, arı bir şekilde ifade etmek için uğraş verdi. Gauss (1777-1855), 1828 yılında, bu kurala bir ifade daha ekledi: Eğer pozitif köklerin sayısı işaret değişiminin sayısından az olursa, bu durumun bir çift sayı eksiği kadar gerçekleştirileceğini vurguladı. Negatif kökler için de aynı şey geçerlidir. Özetle, Descartes İşaret Kuralı'nı kesin ve yalın bir biçimde ifade etmek istersek:

$a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_n \neq 0$  gerçel sayılar olmak üzere (1) denklemini göz önüne alalım. (1) denkleminin pozitif köklerinin sayısı; ya denklemin katsayıları arasındaki işaret değişiminin sayısına eşit ya da işaret değişimi sayısının bir çift tamsayı eksiği kadardır.

Negatif kökler için de şu gözlemi yapabiliriz. Eğer  $x$  sayısı denklemin negatif kökü ise,  $-x$  sayısının pozitif kök olacağı kolayca görülebilir. O halde, denklemde  $x$  yerine  $-x$  koyarak yukarıda belirttiğimiz gerçeği negatif kökler için uygulamak yerinde bir davranış olacaktır. Descartes İşaret Kuralı, bir bakıma, denklemin pozitif (negatif) köklerinin sayısının maksimumunu vermektedir. Şimdi de bu kuralın uygulanabilirliğini görebilmek için örnekler verelim.

**Örnek 3 :**  $6x^4 - 31x^3 + 25x^2 + 33x + 7 = 0$  denklemini göz önüne alalım. Denklemden de görüldüğü gibi katsayıların işareti (soldan-sağa), sırasıyla,  $+, -, +, +, +$  olup, katsayılar arasındaki işaret değişimi 2 kez gerçekleşmektedir. O halde pozitif köklerin sayısı ya 2 dir ya da 0 dir. Negatif köklerin sayısını belirlemek için de  $x$  yerine  $-x$  koyarak  $6x^4 + 31x^3 + 25x^2 - 33x + 7 = 0$  denklemini elde eder ve bu denklemin katsayıları arasındaki işaret değişimine bakarız. Benzer bir bakışla, bu denklemde de 2 işaret değişiminin varlığı kolayca görülür. O halde negatif köklerin sayısı ya 2 dir ya da 0 dir.

**Örnek 4 :**  $4x^3 - 5x^2 + 6 = 0$  denklemini ele alalım. Katsayıların işareti, sırasıyla,  $+, -, +$  olup, katsayılar arasındaki işaret değişimi 2 defa gerçekleşmektedir. O halde pozitif köklerin sayısı ya 2 dir ya da 0 dir. Ayrıca,  $-4x^3 - 5x^2 + 6 = 0$  denkleminin katsayıları arasında işaret değişimi 1 dir. O halde 1 tane negatif kök vardır.

**Örnek 5 :**  $x^3 - 6x^2 + 14x - 15 = 0$  denklemine bakalım. İşaretlere bakacak olursak, sırasıyla,  $+, -, +, -$  olup, katsayılar arasındaki işaret değişiminin sayısı 3 dür. O halde pozitif köklerin sayısı ya 3 dür ya da 1 dir. Ayrıca,  $-x^3 - 6x^2 - 14x - 15 = 0$  denkleminin katsayıları arasındaki işaret değişimi 0 dir. O halde hiç negatif kök yoktur.

**Örnek 6 :**  $x^6 - x^5 + x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 2x - 4 = 0$  denklemini inceleyelim. Sırasıyla, işaretler  $+, -, +, -, -, -, -$  olup, katsayılar arasındaki işaret değişimi 3 dür. O halde pozitif köklerin sayısı ya 3 dür ya da 1 dir. Ayrıca,  $x^6 + x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2x - 4 = 0$  denkleminin katsayıları arasındaki işaret değişimi yine 3 dür. Aynı şekilde negatif köklerin sayısı da ya 3 dür ya da 1 dir.

Yukarıdaki örneklerde elde ettiğimiz sonuçların tutarlılığına tanık olmak için Tam veya Rasyonel Kök Testlerini uygulayarak denklemin bütün köklerini bulup karşılaştırma yapabiliriz.

Yazımızı noktalamadan önce, geçerliliği kabul görmüş ve doğruluğu kanıtlanmış olan Descartes İşaret Kuralı'nı, pozitif kökler için, iki durumu ele alarak yorumlayalım:

Önce, (1) denklemini  $a_1x + a_0 = 0$  şeklinde birinci dereceden denklem olarak düşünelim. Bu durumda,  $x = -a_0/a_1$  denklemin tek kökü olacaktır. Buradan da,  $a_1$  katsayısı ve  $a_0$  sabit teriminin zıt işaretli olması durumunda, yani katsayılar arasındaki işaret değişiminin bir olması halinde, bir tane pozitif kökün var olacağı kolayca görülebilir. Diğer yandan  $a_1$

ve  $a_0$ 'ın aynı işaretli olması (denklemin katsayıları arasında işaret değişiminin olmaması) durumunda pozitif kökün var olamayacağı da açıktır.

Şimdi de, (1) denklemini,  $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$  şeklindeki ikinci dereceden denklem olarak düşünelim. Bu denklemin her iki tarafını  $a_2$  katsayısı ile bölerek, orijinal denklemle aynı köklere ve katsayılar arasında aynı sayıda işaret değişimine sahip yeni bir  $x^2 + bx + c = 0$  denklemini elde ederiz. Dahası, bu denklemin köklerinin de  $x_1$  ve  $x_2$  olduğunu kabul edelim. O halde,  $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$  ve buradan da  $b = -(x_1 + x_2)$  ve  $c = x_1x_2$  sonucunu çıkarırız. Ayrıca, incelediğimiz bu ikinci dereceden denklemin köklerini veren

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \quad (6)$$

formülünü de anımsayarak aşağıdaki analizi yapalım:

- Eğer  $b < 0$  ve  $c > 0$  ise (katsayılar arasında iki işaret değişimi varsa), bu durumda  $x_1x_2 > 0$  ve  $x_1 + x_2 > 0$  olacaktır. Yani gerçel kökler varsa, ikisi de pozitif olacaktır. Fakat, (6) formülünden,  $b^2 - 4c < 0$  olacak şekilde  $c$  nin yeteri kadar büyük olması durumunda gerçel köklerin varlığı olanaksızlaşacaktır.  
**Sonuç:** Katsayılar arasında iki işaret değişiminin var olması durumunda, ya kesin iki pozitif kök var ya da hiç yoktur.
- $b$ 'nin işareti ne olursa olsun,  $c < 0$  ise, (katsayılar arasında bir tane işaret değişimi varsa), bu durumda  $x_1x_2 < 0$  ve  $x_1 + x_2 < 0 (> 0)$  olacaktır. Yani gerçel kökler varsa, zıt işaretli olacaklardır. Diğer taraftan, (6)'dan  $b^2 - 4c > 0$  olduğundan, gerçel köklerin varlığı kesindir.  
**Sonuç:** Katsayılar arasında bir tane işaret değişiminin var olması durumunda, kesin bir tane pozitif kök vardır.
- Eğer  $b > 0$  ve  $c > 0$  ise (katsayılar arasında işaret değişimi yoksa), bu durumda  $x_1x_2 > 0$  ve  $x_1 + x_2 < 0$  olacaktır. Yani gerçel kökler varsa, ikisi de pozitif olamayacaktır.  
**Sonuç:** İşaret değişimi yoksa pozitif kök de yoktur.

Böylece, Descartes İşaret Kuralı'nın geçerliliğini birinci ve ikinci dereceden denklemler için göstermiş olduk. Peki, daha büyük dereceli denklemler için nasıl bir kanıtlamaya gidilebilir? Şunu belirtelim ki,  $n \geq 3$  dereceli denklemler için Descartes İşaret Kuralı'nın doğruluğunu göstermek amacıyla yukarıdaki biçimde bir girişimde bulunmak pratik olmayacaktır. Daha sistematik bir yaklaşıma gereksinim vardır. Bunu da ilgili okuyucuya bırakalım.

**Alıştırma :** Aşağıdaki denklemlerin pozitif ve negatif köklerinin sayısını belirleyiniz.

- (1)  $x^{12} - 14x^{10} + 183x^8 - 612x^6 - 2209x^4 - 35374x^2 + 38025 = 0$
- (2)  $x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 25x = 0$
- (3)  $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 2x - 1 = 0$

#### KAYNAKÇA :

Smith, D.E and Latham, M.L : The Geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition, Dover, New York, 1954