## PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

**Uyarı:** Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

– Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

– Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

– Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla/İzmir adresine 30 Kasım 2001 tarihine kadar gönderiniz.

### ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

**A.236.** 347777743 sayısı asal mıdır?

**A.237.** $ABC$ ikizkenar dik üçgeninin $AC$ hipotenüsü üzerinde, $\widehat{MBN} = 45°$ olacak şekilde $M$ ve $N$ noktaları alınmıştır.

$$|AM|^2 + |NC|^2 = |MN|^2$$

olduğunu kanıtlayınız.

**A.238.** 1x5 boyutlu dikdörtgeni öyle 5 parçaya ayırın ki, bunlar birleştirilerek bir kare oluşturulabilsin.

**A.239.**

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{21}$$

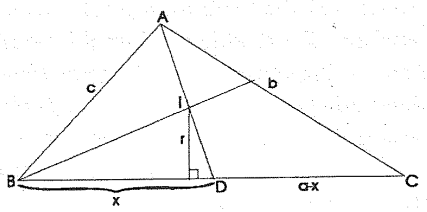
denklemini çözünüz.

**A.240.** 20 kişinin katıldığı bir satranç turnuvasında herkes birbiriyle birer maç yaptı. Sonuçta katılanlardan her birinin kazandığı ve berabere kaldığı maçların sayısı aynı olabilir mi?

### YARIŞMA PROBLEMLERİ

**Y.236.** Sonsuz sayıda n pozitif tam sayısı için, n'nin iki tam sayının kareleri toplamı şeklinde gösterilebileceğini; n-1 ve n+1 sayılarının ise bu şekilde gösterilemeyeceğini kanıtlayınız.

**Y.237.** M dışbukey çokgeni bir nokta etrafında 90° dönme sonucu kendisine dönüşüyor. Birisi M'yi içeren, diğeri de M'nin içinde bulunan ve yarıçapları biri diğerinin $\sqrt{2}$ katı olan iki daire bulunduğunu kanıtlayınız.



Şekil 1

**Y.238.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{100}$ sayılarından oluşan ve çift sayıda eleman içeren tüm kümeler alınıyor ve her kümedeki sayıların çarpımı hesaplanıyor. Tüm çarpımların toplamını bulunuz.

**Y.239.** $a < b < c$ sayıları $x^2 - 3x + a = 0$ denkleminin çözümleridir. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ toplamını bulunuz.

**Y.240.** Her $n > 1$ tam sayısı için,

$$x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n = M$$

denkleminin negatif olmayan tam sayılardan oluşan $x_1, x_2, ..., x_n$ kökünün bulunmamasını sağlayan sonsuz sayıda M sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

### ÇÖZÜMLER

**A.226.** $ABC$ üçgeninde açıortayların kesişim noktası I, iç teğet çemberin yarıçapı ise,

$|AI| + |BI| + |CI| \geq 6r$ olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.**(Şekil 1), $[AD]$ açıortay, $[BD] = x$ ise, $\frac{c}{a} = \frac{x}{a-x}$, buradan da $x = \frac{ac}{b+c}$ elde edilir. $[BI]$, $ABD$ üçgeninin açıortayı olduğundan

$$\frac{|AI|}{|ID|} = \frac{c}{x} = \frac{b+c}{a}$$

dır. $r \leq |ID|$ eşitsizliğini gözönünde bulundurursak, $|AI| \geq r \cdot \frac{b+c}{a}$ sağlandığını görürüz. Benzer şekilde $|BI| \geq r \cdot \frac{a+c}{b}$ ve $|CI| \geq r \cdot \frac{a+b}{c}$ eşitsizlikleri elde edilir. Aritmetik ve geometrik ortalamalar arasındaki eşitsizlik kullanılarak

$$|AI| + |BI| + |CI| \geq r(\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c}) =$$

$$r[(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}) + (\frac{c}{a} + \frac{a}{c}) + (\frac{c}{b} + \frac{b}{c})] \geq$$

$$r(2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} + 2\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c}}) = 6r$$

olduğu gösterilir.

**A.227.** Bir pozitif tamsayının art arda gelen herhangi iki rakamının oluşturduğu iki basamaklı sayı 17 'ye veya 23 'e bölünüyorsa, bu sayıya "ilginç sayı" diyelim. Kaç tane 2001 basamaklı ilginç sayı vardır?

**Çözüm.** İki basamaklı "ilginç sayılar" aşağıdakilerdir: 17,23,34,46,51,68,69,85,92. Bunlar arasında 7 ile başlayan sayı bulunmadığından, herhangi "ilginç sayıda" 7 rakamı sadece sonuncu basamak olabilir. Bir "ilginç sayıda" 1 rakamı varsa, bundan sonra 7 rakamı gelmek zorundadır. O halde sadece 2000. veya 2001. basamak 1 rakamı olabilir. Benzer şekilde 5 rakamı ilk 1998 ve 8 rakamı ilk 1997 basamak arasında yer alamaz. Böylece bir "ilginç sayı" 2,3,4,6,9 rakamlarından biri ile başlamak zorunda ve örneğin 2 ile başlamışsa, ilk 1995 basamağı 2346923469...23469 şeklinde olacaktır. Dolayısyla 2001 basamaklı "ilginç sayılar" tam 9 tanedir: 23...692,23...685,34...6923,34...6851,46...69234, 46...68517,69...692346,92...69,92...68.

**A.228.** Her pozitif gerçel $a, b, c$ sayıları ve pozitif $n$ sayısı için

$$(\frac{a+b}{c})^n + (\frac{b+c}{a})^n + (\frac{c+a}{b})^n \geq 3 \cdot 2^n$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.** Aritmetik ve geometrik ortalamalar arasındaki eşitsizliği iki kez kullanarak aşağıdakileri elde ederiz:

$$(\frac{a+b}{c})^n + (\frac{b+c}{a})^n + (\frac{c+a}{b})^n \geq$$

$$3\sqrt[3]{(\frac{a+b}{c})^n \cdot (\frac{b+c}{a})^n \cdot (\frac{c+a}{b})^n} =$$

$$3\sqrt[3]{[\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}]^n} \geq$$

$$3\sqrt[3]{[\frac{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca}}{abc}]^n} =$$

$$3\sqrt[3]{2^{3n}} = 3 \cdot 2^n$$

**A.229.** Tüm gerçel sayılar kümesinde tanımlı olan f fonksiyonu her $x$ için

$$f(x+3) \leq f(x) + 3, f(x+2) \geq f(x) + 2$$

eşitsizliklerini sağlar. $g(x) = f(x) - x$ fonksiyonunun periyodik olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.** İlk koşuldan $g(x+6) = f(x+6) - x - 6 \leq f(x+3) + 3 - x - 6 \leq f(x) + 3 + 3 - x - 6 = g(x)$ ve ikinci koşuldan $g(x+6) = f(x+6) - x - 6 \geq f(x+4) + 2 - x - 6 \geq f(x+2) + 2 + 2 - x - 6 \geq f(x) + 2 + 2 + 2 - x - 6 = f(x) - x = g(x)$ elde edilir. Dolayısıyla, $g(x+6) = g(x)$ eşitliği her $x$ için gerçekleşir, yani $g(x)$ fonksiyonu periyodiktir.

**A.230.** $N$ arkadaş birkaç kere beraber tiyatroya gittiler. Her gidişlerinde aynı sırada bulunan yan-yana $N$ koltuğu paylaştılar. Her ikili tam bir kez yan-yana oturdular. $N$'nin çift sayı olduğunu gösteriniz.

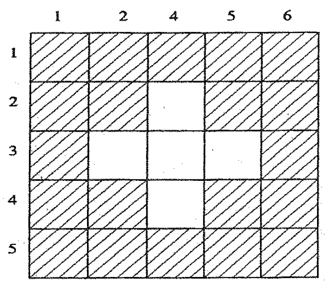
**Çözüm.** Her gidişte yan-yana oturan çiftlerin sayısı N-1'dir, tüm çiftlerin sayısı ise $\frac{N \cdot (N-1)}{2}$'dir. O halde arkadaşlar $\frac{N}{2}$ kez tiyatroya gitmişler, dolayısıyla $N$ çift sayıdır.

**Y.226.** Pozitif tamsayılardan oluşan kesin olarak artan sonsuz dizide 4.'den başlayarak her terimin karesi bundan daha önce gelen herhangi üç terimin kareleri toplamına eşittir. Bu dizide sonsuz sayıda bileşik sayıya rastlanacağını ispat ediniz.

**Çözüm.** Koşulları sağlayan bir $\{a_n\}$ dizisinde bileşik terimlerin sonlu olduğunu varsayalım. O halde $t > 3$ olmak üzere bir $t$. terimden başlayarak tüm terimleri asaldır. $s = \sum_{i=1}^{t-1} a_i^2$ ve $n = max\{a_t, 5\}$ alalım. $n! + 2, n! + 3, ..., n! + n$ sayılarından her biri bileşik olduğundan (çünkü her $0 < k \leq n$ için $k \backslash (n! + k)$), bu sayıların hiçbirisi dizinin bir terimi değildir. Dolayısıyla $a_m \leq n! + 1 < n! + n < a_{m+1}$ olacak şekilde bir $m$ vardır. O halde $a_{m+1} - a_m \geq n$'dir. Diğer taraftan $u < v < w < m+1$ olmak üzere

$$a_{m+1}^2 = a_u^2 + a_v^2 + a_w^2 \qquad (1)$$

yazılabilir. Bir tam sayının karesi ya 3'e bölünür, yada bölündüğünde kalan 1 olur. $a_{m+1}$ asal oluğundan $a_{m+1}^2 \equiv 1 \pmod 3$ 'tür. o halde (1) eşitliğinden $a_u, a_v, a_w$ sayılarından ikisi 3'e bölünecek (ve dolayısıyla ya 3'e eşittir, ya da




Sekil 2

bileşiktir). Bu durumda $u < t$ ve $v < t$'dir. Böylece

$$n \leq a_{m+1} - a_m \leq a_{m+1} - a_w = a_u^2 + a_v^2 \leq s \leq n$$

eşitsizliğinden çelişki elde ederiz.

**Y.227.** 5x5 boyutlu tabloya 1' den 25'e kadar olan pozitif tam sayılar yazılmıştır. İçerdikleri sayılar arasındaki fark en az 5 olacak şekilde iki komşu hane bulunacağını gösteriniz.

Not:Bir ortak kenarı bulunan iki haneye komşu haneler denir.

**Çözüm.** $i$. satır ve $j$. sütün kesişimindeki haneyi $(i,j)$ ile gösterelim. $(i,j)$ ve $(k,m)$ haneleri arasındaki uzaklık dediğimizde $|k-i|+|m-j|$ sayısını kastedeceğiz.Tüm komşu hanelerdeki sayıların farkının en fazla 4 olduğunu varsayalım. O halde aralarındaki uzaklık $n$ olan iki hanedeki sayıların farkı en fazla 4n olur. Dolayısıyla $a-b > 20 = 5 \cdot 4$ ise, $a$ ve $b$ sayılarının bulunduğu haneler arasındaki uzaklık en az 6 olacak. Bu durumda 1,2,3,4,22,23,24,25 sayıları (şekil 2)' deki taralı hanelerde bulunmak zorunda. Ayrıca 1,2,3,4 sayıları bir köşedeki üçgende (örneğin $(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1)$ hanelerinde); 22,23,24,25 sayıları da karşı köşedeki üçgende ($(5,5)$'in bulunduğu köşe) bulunacaklar. O halde 1,2,3,4 sayılarından en az biri $(3,1),(2,2),(3,1)$ hanelerinden birinde; 22,23,24,25 sayılarından en az biri de $(3,5),(4,4),(5,3)$ hanelerinden birinde bulunacaktır. Bu iki sayı arasındaki fark en az 22-4=18'dir, fakat bunların bulundukları haneler arasındaki uzaklık 4'dür. $4 \cdot 4 < 18$ olduğundan çelişki elde etmiş olduk.

**Y.228.** $a_0, a_1, ..., a_n$ pozitif sayılar olmak üzere $x^{n+1} + a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - ... - a_0$ polinomunun $x_0, x_1, ..., x_n$ kökleri için

$$x_n \leq x_{n-1} \leq ... \leq x_2 \leq x_1 \leq x_0$$

eşitsizlikleri sağlanır. $-x_1, -x_2, ..., -x_n$ sayılarının $x^n - nx^{n-1} + b_n x^{n-2} + ... + b_2 x^2 - nx + 1$ polinomunun kökleri olduğu bilinirse,

$$x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = x_n$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm.** Önce $x_1 < 0$ olduğunu gösterelim. $a_0 > 0$ olduğundan

$$f(x) = x^{n+1} + a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - ... - a_0$$

polinomunun kökleri sıfırdan farklıdır. $x_1 > 0$ olduğunu varsayalım. O halde $g(x) = \frac{f(x)}{x^n}$ için $g(x_1) = 0$'dır. Diğer taraftan $0 < x_1 < x_0$ olduğundan

$$g(x_1) = x_1 + a_n - \frac{a_{n-1}}{x_1} - ... - \frac{a_0}{x_1^n} <$$

$$x_0 + a_n - \frac{a_{n-1}}{x_0} - ... - \frac{a_0}{x_0^n} = g(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0^n} = 0$$

olacak. $0 < 0$ çelişkisinden $x_1 < 0$, buradan da $-x_1, -x_2, ..., -x_n$ sayılarının pozitif olduğunu elde ederiz. Vieta teoreminden

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_1 x_2 ... x_n}{x_i} = (-1)^{n-1} \cdot (-n)$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = (-1)^n$$

yazabiliriz. Aritmetik ve geometrik ortalamalar arasındaki eşitsizlikten

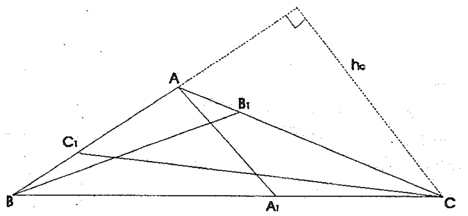
$$n^2 = \frac{n(-1)^{n-1}(-n)}{(-1)^n} =$$

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)(\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}) \geq$$

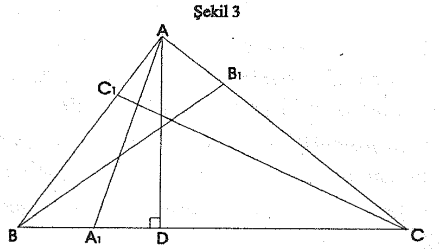
$$n \cdot \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 ... \cdot x_n} \cdot n \cdot \sqrt{\frac{1}{x_1} \cdot ... \cdot \frac{1}{x_n}} = n^2$$

elde edilir ve eşitlik durumu sadece $x_1 = x_2 = ... = x_n$ olduğunda sağlanır.

**Y.229.** $ABC$ üçgeninin $BC, CA$ ve $AB$ kenarları üzerinde, $|AA_1| \leq 1, |BB_1| \leq 1, |CC_1| \leq$




Şekil 3




Şekil 4

1 olacak şekilde sırasıyla $A_1, B_1$ ve $C_1$ noktaları alınmıştır. $ABC$ üçgeninin alanının $\frac{1}{\sqrt{3}}$'ü aşmadığını gösteriniz.

**Çözüm.** Önce geniş açılı üçgen durumunu inceleyelim (şekil 3). A açısı geniş olsun. O halde $|AB| < |BB_1| \leq 1$ ve $h_c \leq |CC_1| \leq 1$ olduğundan $A(\overset{\triangle}{ABC}) \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ olacak. Şimdi $\overset{\triangle}{ABC}$ bir dar açılı üçgen, $\widehat{A}$ açısı da bunun en küçük açısı olsun. O halde $s(\widehat{A}) \leq 60°$'dir. (Şekil 4), dolayısıyla $\widehat{BAD}$ ve $\widehat{DAC}$ açılarından en az biri $30°$'den küçük veya eşittir (burada $AD$ yüksekliktir). $|AD| = h_a \leq |AA_1| \leq 1$ olduğundan

$$min\{|AB|, |AC|\} \leq \frac{|AD|}{Sin30°} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

elde ederiz. $h_B \leq |BB_1| \leq 1$ ve $h_c \leq |CC_1| \leq 1$ olduğundan $A(\overset{\triangle}{ABC}) \leq \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$'dür.

**Y.230.** Öğle saatinde (12:00'de) üç sinekten biri saatin akrepinin, diğeri yelkovanın ve üçüncüsü de saniye göstergesinin üzerine oturdular. Bunlardan biri diğerine yetiştiğinde yer değiştirdiler (saniye göstergesi aynı zamanda yelkovana ve akrepe yetiştiğinde saniye göstergesi ve akrep üzerindeki sinekler yer değiştirdiler). Gece yarısına kadar sineklerin her biri kaç kez merkez etrafında döndü?

**Çözüm.** Koşullara dikkat ettiğimizde sineklerin birbirini geçmediğini görürüz. Dolayısıyla, iki sineğin dönme sayısı arasındaki fark en fazla 1 olabilir. 12 saat içinde akrep 1 kez, yelkovan 12 kez ve saniye göstergesi 720 kez merkez etrafında dönüyor. O halde üç sinek toplam 720+12+1=733 kez dönmüştür. Bu sayıyı, aralarındaki fark en fazla 1 olan üç sayının toplamı şeklinde gösterelim. 733=244+244+245. İlk baştan saniye göstergesi üzerinde bulunan sinek önde gittiği için diğerlerinden 1 fazla sayıda dönmüştür: 245 kez. Akrep ve yelkovan üzerinde yola çıkan sinekler 244'er kez dönmüşler.

---

**DÜZELTME Cilt:10, Sayı:2** Problemler ve Çözümlerin Sayfa 29' daki Y232 sorusu aşağıdaki şekilde düzeltilmiştir.

**Y.232.** İkizkenar olmayan $ABC$ üçgeninde $AK$ ve $BL$ kenarortaylardır. $\widehat{BAK} = \widehat{CBL} = 30°$ ise, $ABC$ üçgeninin iç açılarının kosinüsünü bulunuz.

---

**Kitap Tanıtımı**

**Papağan Teoremi**
**(Le Theoreme du Perroquet)**
Denis Guedj

İkinci Dünya Savaşı'ndan sonra Amazonya'ya yerleşen 84 yaşındaki Elgar Grosrouvre, matematik fakültesinden eski arkadaşı ve Paris'te sahaflık yapan tekerlekli sandalye mahkumu Pierre Ruche'e çok değerli bir matematik kitapları kolleksiyonunu gönderdikten sonra evinde çıkan bir yangında ölür. Elgar, Pierre'e yazdığı mektuplarda ünlü matematikçi Fermat ve Goldbach'ın teoremlerini tanıtladığını yazmaktadır. Yangından kurtulan Elgar'ın papağanı "Nofutur", değerli kuş kaçakçılarının sayesinde Paris'e, Pierre'nin sahaf dükkanı "Binbir Sayfa"ya rastlantı sonucu ulaşır. Elgar'ın ölümü bir cinayet mi, intihar mı, yoksa kaza mıdır? Bu sorulardan sonra Pierre Ruche ve meraklı ailesinin müthiş polisiye araştırmaları ve kovalamacaları başlar.

Japonya'dan Brezilya'ya, Mısır'dan Sicilya'ya uzanan bu muammalar zincirinin gerçek kahramanı matematiğin ta kendisi elbette. Yaşamımızın felsefi sınırları içinde matematiğin gerçek yerini sorgulayarak onu tüm açıklığıyla saptamamıza yardımcı olan Papağan Teoremi, azılı matematikçilerden dört işlem ustalarına (yediden yetmişe) kadar herkesin elinden düşmeyecek bir felsefi roman. Matematik tarihinin en gizemli yanları ve kişiliklerinin de başrolleri paylaştığı bu edebiyat polisiye şöleninin oyuncuları, aslında Nizamülmülk, Hasan Sabbah ve Ömer Hayyam'ın günümüz uyarlamalarından başkaları değil...

"Denis Guedj Papağan Teoremi ile olağanüstü bir şey gerçekleştirdi: Matematiği ve edebiyatı uzaklaştırmak! Jostein Gaarder'ın "Sofi'nin Dünyası"nda felsefe için yaptığını Denis Guedj Papağan Teoremi'nde matematik için yaptı. Bu kitabın amacı, bize matematiğin yaşayan bir şey olduğunu göstermek... Meğer okulda bunu bizden saklamışlar" La Voıx Du Nord

"Papağan Teoremi'ni okurken son derece etkileyici matematik portreleri karşısında insan hayranlığını gizleyemiyor; dramlar karşısında ürperiyor; birkaç saniye bile sürse, denklemlere ve metin akışıni resimleyen geometrik şekillere takılmadan edemiyor."

"Papağan Teoremi, matematik ve felsefenin tarihleri ve ünlü matematikçilerin teoremleri boyunca devam eden; sayıların ve denklem soyutlamalarının soğuk yüzünden uzakta sıcak, sevimli, sürükleyici bir roman.

Bu romanda okuma zevki, matematiği yeniden öğrenme ve keşfetme keyfiyle son sınırlarına ulaşıyor." Le Monde

**Çeviri: İsmail Yerguz, Güncel Yayıncılık**

---

## YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

* Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

**Matematik Dünyası**
**İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,**
**Matematik Bölümü, 35435**
**Gülbahçe-Urla,İZMİR**

adresine posta ile gönderilmeli, ya da *mdunyasi@galois.iyte.edu.tr* adresine elektronik posta ile gönderilmelidir.

---