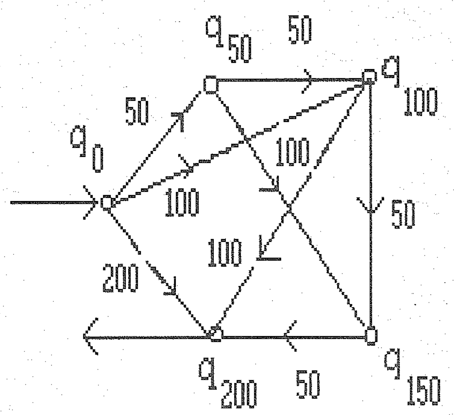
OTOMOTO İLE TANIŞALIM

Gonca Güngör Ayık
Çukurova Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, ADANA

Otomoto kelimesinin ingilizcesi 'automata' dır. Bunu Türkçeye çevirip otomata demek daha doğru olabilirdi fakat söyleyişte dile yatkınlık olarak otomoto demeyi tercih ediyorum. Evet, gerçekten matematikte hesaplama (computation), mantık (logic) ve çizge teori (graph theory) gibi pek çok dalı bir araya getiren bir çalışma alanı. Yalnızca matematikçilerin değil bilgisayar bilimlerinde çalışan insanlarında ilgisini çeken bir konudur. Benim otomoto ile tanışmam oldukça yeni. Bu teori, yarıgruplar ve otomatiklik yapılar arasında ilişki kurulduğundan dolayı ilgimi çekmeye başladı. Otomoto nasıl bir şey? Anlatmaya bir örnekle başlamak en doğrusu. Genelde biz matematikçilere sorarlar "Buluyorsunuz bir şeyler ama bunu günlük hayatta nerede kullanacağız?" Evet belki bugün kullanılmıyor gibi görülebilir fakat birgün hiç ummadık bir yerde yıllar önce bulunmuş teoriler kullanılır. Kola makinalarını bir düşünün. Şimdi bununla otomotonun ne alakası var demeyin. Bu makinaya istediğinizi yaptırmak için makinaya anlayacaği dilden yaptıracağımız şeyleri açıklamanız gerekir. Bu yüzden otomoto kullanılıyor.

Elimizde 50, 100, 200 TL. lık bozuk paralar olsun. Makinamız da 200 TL'ye bize kola veriyor olsun. Bu durumda makinaya kaç liralık bozuk paralardan kaç tane atarsak makina bize kola verir? Yanıt gayet kolay. $(50, 50, 50, 50)$, $(50, 100, 50)$, $(50, 50, 100)$, $(100, 50, 50)$, $(100, 100)$, (200) olmak üzere altı değişik biçimde makinaya para atabilirim. Şimdi bunu şekle dökelim:



Bu şeklin köşeleri durumları, kenarlarıda makinanın kabul ettiği bozuk paraları temsil ediyor. Parayı atmaya başladığımız anı q_0 köşesi temsil etsin, kola aldığımız anı q_{200} köşesi temsil etsin. İçe doğru okla para atmaya başlamayı, dışa doğru okla kola aldığımız anı gösterelim. İçe doğru okla başlayarak gittiğimiz tüm yollardaki paraları toplayarak dışa doğru oka ulaşmaya çalışalım. Yukarıda yazdığımız paraların tüm dizisini elde ediyorsunuz değil mi?

İşte yukarıdaki etiketli diagrama bir otomotonun *durum diagramı* denir. Tüm köşelerin kümesi, Q ile göstereceğimiz otomotonun *durumlarının kümesidir.* Kenarların üzerinde kullandığımız tüm etiketlerin kümesi A ile göstereceğimiz otomotonun *alfabesidir.* Tüm yolları tarif eden φ dönüşümü otomotomuzun *geçiş fonksiyonudur.* q_0 durumuna otomotonun *başlangıç durumu,* q_{200} durumuna otomotonun *bitiş durumu* diyeceğiz. O halde genel olarak Q ve A iki sonlu küme,

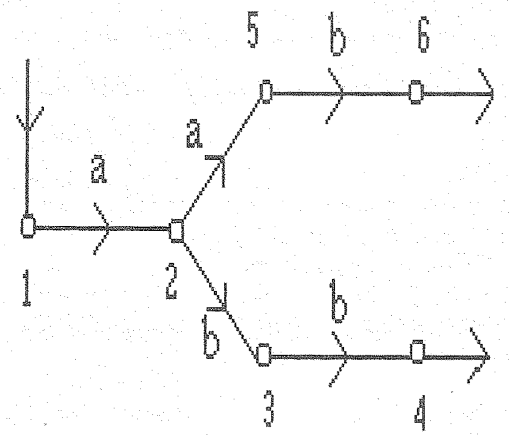
$$\varphi : Q \times A \longrightarrow Q$$

geçiş fonksiyonu, i başlangıç durumu ve T bitiş durumları olmak üzere bir $\mathcal{A}$ otomotosu (Q, A, φ, i, T) şeklinde bir beşlidir. Bir otomotoda kenarların herhangi bir dizisine *patika* denir. Bir patikadaki tüm kenarların temsil ettiği sembolleri ard arda yazarak oluşan ifadeye bu *patikanın etiketi* denir.

$$q_0 \xrightarrow{50} q_{50} \xrightarrow{100} q_{150} \xrightarrow{50} q_{200}$$

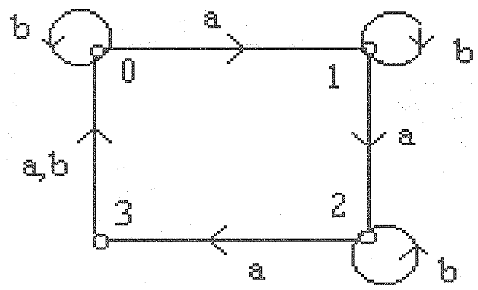
ifadesi q_0 başlangıç durumu ile başlayarak q_{200} bitiş durumuna ulaştığımız bir kenarların dizisidir. Kenarların böyle bir dizisine *başarılı patika* diyeceğiz. Bu başarılı patikanın etiketi 5010050 dir. Tüm başarılı patikaların etiketlerinin kümesine de $\mathcal{A}$ otomotosu tarafından tanınan *lisan* denir ve $L(\mathcal{A})$ ile gösterilir. Yukarıda şekli verilen otomotonun tanıdığı lisan

$$L(\mathcal{A})=\{200, 100100, 5010050, 1005050, 5050100, 50505050\}$$



dir. Örneğin durum diagramı yukarıdaki gibi olan bir otomoto tarafından tanınan lisan $\{a^2b, ab^2\}$ dir. Bir $\mathcal{A}$=(Q, A, φ, i, T) otomotosunda her $q \in Q$ ve her $a \in A$ için $\varphi(q, a)$ tek şekilde tanımlı ise $\mathcal{A}$ otomotosuna ***deterministik otomoto*** denir. Bir otomoto deterministik değil ise o otomotonun tanıdığı lisanı tanıyan yeni bir deterministik otomoto bulabiliyoruz. Bununla ilgili bilgileri [2] nolu kaynakta bulabilirsiniz.

Evet konu gerçekten güzel ama yıllardır çözüm bekleyen açık problemleri de çok. Matematik Dünyası okuyucularına Cern's conjecture olarak adlandırılan problemden bahsetmek istiyorum. $|Q| = n$ olan deterministik bir $\mathcal{A} = (Q, A, \varphi)$ otomotosunu düşünelim. Problem için başlangıç ve bitiş durumları önemsiz olduğundan otomotoyu yazarken bunlara yer vermedim. Her $q \in Q$ için $qw =$ olacak şekilde $p \in Q$ varsa w etiketine $\mathcal{A}$ da ***senkronizedir*** denir. Eğer bir$\mathcal{A}$ otomotosunda bir senkronize etiketli patika varsa $\mathcal{A}$ otomotosuna ***senkronize*** denir. Aşağıda durum diagramı verilen otomoto $|Q| = 4$ duruma sahip bir senkronize otomotodur.



Çünkü ba^3ba^3b etiketi için $0.ba^3ba^3b = 1ba^3ba^3b = 2.ba^3ba^3b = 3ba^3ba^3b = 0$ dir. Cern's conjecture bir n durumlu otomoto senkronize ise $(n-1)^2$ uzunluğunda bir senkronize etiketli patikanın var olduğunu söyler. Fakat bu henüz ispatlanamamıştır. Gerçekten de bizim örneğimize bakacak olursak $ba^3ba^3b (= baaabaaab)$ etiketinin uzunluğu $9 = (4-1)^2$ dir. Evet soru gayet kolay gibi gözükse de doğru olduğunu gösteren bir ispat bulunmamakla birlikte aksini söyleyen bir örneğe de rastlanamadığından hala yanıt bekliyor. İlgi duyanlar, otomoto ile ilgili açık problemlerin bir kısmına

$$http://www.liafa.jussieu.fr/\sim jep/Problemes$$

Web sayfasından ulaşabilirler.

KAYNAKÇA :

[1] J. E. Hopcroft and J. D. Ullman: Introduction to Automata Theory, Languages and Computation, Addison-Wesley, 1978

[2] J. M. Howie: Automata and Languages, Clarendon Press-Oxford, 1991