1. GÖRECE ULUSLARARASI MATEMATİK YARIŞMASI-2001 (SORULAR VE ÇÖZÜMLER)

Menderes İlçesi-Görece Belediye Başkanlığı, İZMİR

Bu sayımızda, İzmir'in Menderes ilçesi Görece Belediye Başkanlığı tarafından 26-29 Ekim 2001 tarihleri arasında matematik dalında ilk defa gerçekleştirilen 1. Görece Bilgi Yarışmasına yer vermek istiyoruz. Bu yarışmanın düzenleniş amacı "Elit bir bilim dalı ve tüm akademik branşların vazgeçilmez parçası olan matematik alanında yetenekli olan öğrencilerin rekabet güçlerinin arttırılması, matematik dalının sevdirilmesi ve özendirilmesi ile komşu ülkelerin öğrencileriyle ülkemiz öğrencileri arasında kardeşlik ve dostluk bağlarının geliştirilmesidir". Yarışmada ilk üçe giren okulların sıralaması aşağıdak gibi sonuçlanmıştır:

- Sofia Amerikan Koleji (105 puan)
- Özel Türk Fen Lisesi (103 puan)
- Turgutlu Fen Lisesi (95 puan)
- Özel Fatih Fen Lisesi (95 puan)

Yarışmada ilk üçe giren öğrenci sıralaması da şu şekilde gerçekleşmiştir:

- Venelin Gornishki (64 puan)
- Ekin Uzun (57 puan)
- Fırat Kıyak (50 puan)
- Hüsnü Erdöşemeci (50 puan)

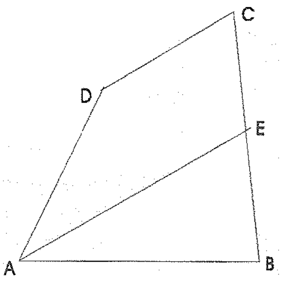
Dereceye giren okullar ve öğrencilere çeşitli ödüller verilmiştir. Matematik Dünyası olarak dereceye giren katılımcıları kutluyoruz. Ayrıca, Görece Belediyesi'ne, Yarışma Yürütme Kurulu'na ve Yarışma Komisyonu'na matematiğe olan duyarlılıklarından ve böyle bir etkinlikte bulunduklarından dolayı teşekkürlerimizi iletiriz. Yarışma hakkında daha fazla bilgi için Görece Belediye'sinin Telefon ve Faks numaraları: Tel(0.232.781 1244 ve 0.232.781 0967), Faks(0.232.781 1253). Şimdi de yarışma sorularına göz atalım:

YARIŞMA SORULARI

1. a, b, c ikişer ikişer aralarında asal tamsayılar olmak üzere $2a = 3b + c$, $2a^3 = 3b^3 + c^3$ denklem sistemi veriliyor. Buna göre $a + b + c$ toplamı kaçtır?

2. x, gerçel sayı olmak üzere; $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + \ldots + (x-2001)^2$ olduğuna göre $f(x)$ in alabileceği **en küçük** değeri bulunuz.

3. Aşağıdaki şekilde $[AE]$ kenarı $[CD]$ kenarına paralleldir. Ayrıca kenarlar arasında $|AD| = |AE| = |AB| = |BC|$ ve $|BE| = |CD|$ dir. Buna göre $\widehat{ADC}$ açısının ölçüsü kaç derecedir?



4. Kenar uzunlukları 1, x, x^2 olan bir üçgen için x gerçel sayılarının değer aralığını bulunuz.

5. $a \cdot b \cdot c \neq 0$ olmak üzere $a+b+c=0$ ise $\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$ oranının değeri kaçtır?

6. $S = 10^{10^1} + 10^{10^2} + \ldots + 10^{10^{10}}$ sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

7. 7 yolcu, 3 vagondan oluşan boş bir trene rastgele birer vagon seçerek binerler. Birinci vagonda tam olarak 2 yolcu bulunması olasılığı kaçtır?

ÇÖZÜMLER

Çözüm 1. Birinci denklemin heriki tarafına a eklersek

$$2a + a = 3b + c + a \Rightarrow 3(a-b) = a + c \tag{1}$$

ve ikinci denklemin heriki tarafına da a^3 eklersek

$$2a^3 + a^3 = 3b^3 + c^3 + a^3 \Rightarrow 3(a^3 - b^3) = c^3 + a^3 \tag{2}$$

elde ederiz. Şimdi (1) ve (2) eşitliklerini düzenleyerek

$$3(a-b)(a^2+ab+b^2) = (a+c)(a^2-ac+c^2)$$
$$3(a-b)(a^2+ab+b^2) = 3(a-b)(a^2-ac+c^2)$$
$$a^2+ab+b^2 = a^2-ac+c^2$$
$$ab+ac = c^2-b^2$$
$$a(b+c) = (c-b)(c+b)$$
$$c = a+b$$

elde edilir. Bu ifadeyi birinci denklemde yerine yazarsak, $2a = 3b + c = 3b + a + b \Rightarrow a = 4b$, bulunur. Diğer yandan a ve b nin aralarında asal olması için $b = 1$ ve $a = 4$ olması gerekir. Bu da $c = 5$ olacağını gösterir. O halde, $a + b + c = 10$, elde edilir.

Çözüm 2. Parantezleri açarak gerekli düzenleme yapılırsa

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 2.2x + 2^2) + \ldots + (x^2 - 2.2001x + 2001^2)$$

$$f(x) = 2001x^2 - 2(1+2+\ldots+2001)x + (1^2+2^2+\ldots+2001^2)$$
$$f(x) = 2001x^2 - 2001.2002x + \frac{2001.2002.4003}{6}$$

parabolü elde edilir. Bu parabolün minimum değeri tepe noktasının ordinatıdır. O halde, $a = 2001$, $b = -2001.2002$, ve $c = \frac{2001.2002.4003}{6}$ olmak üzere, $f(x)$ in enküçük değeri $\frac{4ac-b^2}{4a} = 667667000$ olacaktır.

Çözüm 3. D ile B yi birleştirelim. $[AE]$ kenarı $[DC]$ kenarına parallel olduğundan $m(\widehat{DCB}) = m(\widehat{AEB})$ dir. Ayrıca, $|DC| = |EB|$ ve $|CB| = |EA|$ oldukları da göz önüne alınırsa, $\overset{\triangle}{DCB} \cong \overset{\triangle}{BEA}$ bulunur. Buradan da $|DB| = |AB|$ olacaktır. Yani, $\overset{\triangle}{ABD}$ eşkenar üçgen, $\overset{\triangle}{DBC}$ ikizkenar üçgen olur. Şimdi, $m(\widehat{DBC}) = \alpha$, dersek, $m(\widehat{ABE}) = 60 + \alpha = m(\widehat{AEB})$ olur. Diğer ynadan, $\overset{\triangle}{DCB} \cong \overset{\triangle}{BEA}$, olduğundan, $m(\widehat{EAB}) = m(\widehat{CBD}) = \alpha$, olacaktır. Sonuç olarak, $60 + \alpha + 60 + \alpha + \alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 20° \Rightarrow m(\widehat{BDC}) = 80° \Rightarrow m(\widehat{ADC}) = 140°$ elde edilir.

Çözüm 4. Üçgen eşitsizliğini kullanarak $x^2 - x < 1 < x^2 + x$ yazabiliriz. O halde

$$x^2 - x - 1 < 0$$
$$x^2 + x - 1 > 0$$
$$x > 0$$

eşitsizlik sistemini çözmeliyiz.(Diğer kenarlar için de aynı eşitsizlik sistemi elde edilir.) Bu sistemin çözümünün $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olduğu kolayca elde edilir.

Çözüm 5. Çözüm için $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ özdeşliğinden yararlanacağız. O halde

$$(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$$
$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + [3ab(a+b+c) + 3ac(a+b+c) + 3bc(b+c)]$$
$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + [3ab(a+b+c) + 3ac(a+b+c) - 3abc]$$

Diğer yandan $a+b+c=0$ olduğundan, son eşitlik kullanılarak, $a^3+b^3+c^3-3abc=0$ bulunacaktır. Buradan da $\frac{a^3+b^3+^3}{abc} = 3$ sonucu çıkar.

Çözüm 6. $10 \equiv 3 \pmod 7$ olduğundan, bu sorunun yanıtı için

$$3^{10^1} + 3^{10^2} + \ldots + 3^{10^{10}} \equiv x \pmod 7$$

olacak şekildeki x değerini arıyoruz. Şimdi, $3^1 \equiv 3 \pmod 7$, $3^2 \equiv 2 \pmod 7$, $3^3 \equiv 6 \pmod 7$, $3^4 \equiv 4 \pmod 7$, $3^5 \equiv 5 \pmod 7$, $3^6 \equiv 1 \pmod 7$, olduğu için, $10^1, 10^2, \ldots, 10^{10}$ sayılarının $\pmod 6$ deki değerlerini bulalım. Her $n > 1$ tamsayısı için $10^n \equiv 4 \pmod 6$ dır. O halde, $3^{10^1} \equiv 3^4 \pmod 7$, $3^{10^2} \equiv 3^4 \pmod 7, \ldots$, $3^{10^{10}} \equiv 3^4 \pmod 7$ olacaktır. Buradan da $3^4 + 3^4 + \ldots + 3^4 = 3^4 \cdot 10 \equiv 4 \cdot 3 \pmod 7 \Rightarrow x \equiv 5 \pmod 7$ bulunur.

Çözüm 7. Yanıt $\binom{7}{2} \cdot 2^5/3^7 = 21 \cdot 2^5/3^7 = \frac{224}{729}$ dir.