TAMSAYILARIN BÖLÜNTÜSÜ İÇİN CEBİRSEL ÖZDEŞLİKLER VE ALGORİTMALAR

M. Cihan GİRGİNTAŞ - Selim ÖZGEN

İzmir Fen Lisesi

I. GİRİŞ

Bölüntü, bir pozitif tamsayının, pozitif tamsayıların toplamı biçiminde ifade edilmesidir. Bu ifadede toplananların sırasının bir önemi yoktur. Örneğin 3 sayısı için $3 = 2 + 1$ ve $3 = 1 + 2$ gösterimleri özdeş kabul edilmektedir. Bir sayının bölüntüsünde toplanan konumundaki tüm sayılara bölüntülenen sayının parçaları denmektedir. Bir n sayısına ait bölüntüler, bölüntüyü oluşturan parçaların azalmayan sırada listesi şeklinde ifade edilmektedir. Öte yandan birden fazla kez kullanılan parçaların kaç kez kullanıldığı parçanın üstüne yazılarak gösterilir. Örneğin, $12 = 3 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1$ için gösterimi, $(1^2 2^2 3^2)$ şeklindedir.

TANIM:

Bir n doğal sayısının tüm bölüntülerinin sayısı $p(n)$ bölüntü fonksiyonuyla ifade edilmektedir. $p(0) = 1$ kabul edilmektedir. Bölüntünün tanımından n negatif tamsayı ise $p(n) = 0$ olmaktadır. (Hiç bir negatif tamsayı pozitif tamsayıların toplamı şeklinde yazılamaz.)

n'nin küçük değerleri için $p(n)$ sayısını, n'nin bölüntülerini bir liste halinde yazarak hesaplamak mümkündür. Örneğin $p(5) = 7$ dir. Çünkü 5 sayısı tam olarak 7 farklı şekilde parçalanabilir. Bunlar, (5),(14),(23),$(1^2 3)$,(12^2),$(1^3 2)$,(1^5)dir. Şüphesiz, aynı yöntemi kullanarak çok daha büyük sayılar için $p(n)$'i - örneğin 1004 için $p(100) = 190569292$ - bilgisayar desteği olmadan hesaplamak imkansız gibi görünmektedir.

$p(n)$'in hesaplanması bir çok matematik otoritesini uzun yıllar meşgul etmiş bir problemdir. Problem, ilk olarak 16544 yılında Leibniz tarafından ifade edilmiştir. 1740'ta Alman matematikçi Philipp Node tarafından Leonhard Euler'e sunulmuş; Euler, bölüntüler üzerine yaptığı çalışmalarda bir çok ilginç özellik bulmuştur. Bunlar arasında ünlü "pentagonal teoremi" merkez teorem niteliğindedir.

İstatiksel Mekanik ve Dizgi Teorisi başta olmak üzere birçok modern fizik teorisinde ve Olasılık Teorisi ve İstatistiksel Analiz başta olmak üzere matematiğin birçok alanında, çok parçadan oluşan bir sistemin tüm olası konfigürasyonlarının bulunmasına, dolayısıyla bir sayının bölüntülerinin sayısına ve buna ait bölüntü fonksiyonlarına fazlasıyla ihtiyaç duyulmaktadır.

Bu yüzden n'nin büyük değerleri için $p(n)$'in bulunmasıyla ilgili etkili metodlar ve özelliklerin bulunması uygulamalı matematik için önemli bir problemdir.

II. PROJENİN AMACI

Bölüntüler teorisinde bir grup cebirsel ilişki kurulması ve buradan hareketle bir n sayısı için $p(n)$ değerinin bulunmasını sağlayan etkili algoritmalar elde edilmesi.

III. TEORİ

Tanım: H, pozitif tamsayılardan oluşan bir küme olsun. Bu durumda "H" parçaları H'nin içinden seçilen bölüntülerin kümesini ; $p("H", n)$ ise bir n sayısının, parçaları H kümesinin elemanları olan bölüntülerinin sayısını ifade eder.

IV. YÖNTEM

Bu iki bölümde $p(n)$ değerinin hesaplanması için iki farklı algoritma (yöntem) elde edilecektir. I. Bölümde Sonuç 1.1'de Algoritma I'e; II. Bölümde Teorem 2.1'de Algoritma II'ye ulaşılmıştır.

I. BÖLÜM

Yardımcı Teorem 1.1: H pozitif tamsayılardan oluşan bir küme olsun. Bu durumda;

I. $f(q) = \sum_{n\geq 0} p("H", n)q^n = \prod_{n\in H}(1-q^n)^{-1}$

II. $f_d(q) = \sum_{n\geq 0} p("H"(\leq d), n)q^n = \prod_{n\in H}(1+q^n+...+q^{dn}) = \prod_{n\in H}(1-q^{(d+1)n})(1-q^n)^{-1}$

Not: $f_d(q)$ ifadesinin iki formunun eşitliği sonlu geometrik serilerin toplamındaki basit bir özellikte gelmektedir: $1+q+q^2+...+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

İspat: Yukarıdaki I ve II ifadelerinin ikisi de analitik bir yöntem izlenerek aşağıdaki gibi elde edilebilir. H kümesinin elemanları $H = \{h_1, h_2, h_3, ...\}$, $(h_1 \leq h_2 \leq h_3 ...)$ olsun.

$$\prod_{n\in H}(1-q^n)^{-1} = \frac{1}{1-q^{h_1}} \times \frac{1}{1-q^{h_2}} \times \frac{1}{1-q^{h_3}} \times ...$$

$$= (1+q^{h_1}+q^{2h_1}+...) \times (1+q^{h_2}+q^{2h_2}+...) \times (1+q^{h_3}+q^{2h_3}+...) \times ...$$

$$= \sum_{a_1\geq 0}\sum_{a_2\geq 0}\sum_{a_3\geq 0} ... q^{a_1h_1+a_2h_2+a_3h_3...}$$

Dikkat edilecek olursa q değerinin kuvveti, $(h_1^{a_1}h_2^{a_2}h_3^{a_3}...)$ şeklinde bir bölüntüdür. Yani, yukarıdaki toplamda q^N değeri, N'nin, parçaları H kümesinden alınmış her farklı bölüntüsü için bir kez görülecekt Buradan I elde edilir.

II'nin ispatı sonsuz geometrik serinin sonlu geometrik seriyle yerdeğiştirmesi dışında I ile özdeştir.

$$\prod_{n\in H}(1+q^n+...+q^{dn}) = \sum_{d\geq a_1\geq 0}\sum_{d\geq a_2\geq 0}\sum_{d\geq a_3\geq 0} ... q^{a_1h_1+a_2h_2+a_3h_3...}$$

$$= \sum_{n\geq 0} p("H", n)q^n$$

Yardımcı Teorem 1.2(Euler): Tüm n pozitif tamsayıları için $p(\theta, n) = p(\Delta, n)$.

İspat: Teorem 1.1'den faydalanılarak;

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n})}{(1-q^n)} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-1}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^{-1}(1-q^{2n})^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^{-1}$$

Sonuç olarak; $\sum_{n\geq 0} p(\theta, n)q^n = \sum_{n\geq 0} p(\Delta, n)q^n$.

Öyleyse, Özellik 1'den her $n \in Z^+$ için $p(\theta, n) = p(\Delta, n)$ dir.

Yardımcı Teorem 1.3: $p_e(\Delta, n)$; bir n sayısının, çift sayıda ve birbirinden farklı; $p_0(\Delta, n)$ ise tek sayıda ve birbirinden farklı parçalardan oluşan bölüntülerinin sayısını ifade etsin bu durumda:

$$p_e(\Delta, n) - p_0(\Delta, n) = \begin{cases} (-1)^n & , n = \frac{m(3m\pm1)}{2} \\ 0 & , n \neq \frac{m(3m\pm1)}{2} \end{cases} \quad \text{dir.}$$

Tanım: $r \in Z^+$ olmak üzere $\frac{r(3r\pm1)}{2}$ formundaki sayılara pentagonal sayılar denir. Pentagonal sayıların i ve ii'deki koşulları sağlayan bölüntüleri birebir eşlemenin dışında kaldığından bölüntünün r değerinden hareketle $p_e(\partial, n) = p_0(\partial, n) + (-1)^r$ eşitliği elde edilir.

Teorem 1.1:(Euler'in Pentagonal Teoremi)

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}}(1 + q^m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}}$$

İspat:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} &= \sum_{m=0}^{0}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + \sum_{m=-1}^{-\infty}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} \\
&= 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{-m} q^{\frac{(-m)(3(-m)-1)}{2}} \\
&= 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} \\
&= 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} q^m \\
&= 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}}(1 + q^m) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(p_e(\partial, n) - p_0(\partial, n))q^n \qquad \text{(bkz.Teorem 1.2)}
\end{aligned}$$

İspatın tamamlanması için aşağıdaki özdeşliğin doğru olduğu gösterilmelidir.

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(p_e(\partial, n) - p_0(\partial, n))q^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n).$$

Bu özdeşlik aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n) &= \sum_{a_1=0}^{1}\sum_{a_2=0}^{1}\sum_{a_3=0}^{1}...(-1)^{a_1+a_2+a_3+...}q^{a_1\times1+a_2\times2+a_3\times3+...} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(p_e(\Delta, n) - p_0(\Delta, n))q^n.
\end{aligned}$$

Uyarı: q'nun kuvveti olan $(a_1 \times 1 + a_2 \times 2 + a_3 \times 3 + ...)$ değeri $\lambda = (1^{a_1}2^{a_2}3^{a_3}...)$ formunda birbirinden farklı parçalardan oluşan bir bölüntüdür. Ayrıca, bu ifadenini önünde yer alan $(-1)^{a_1+a_2+a_3+}$ değeri bölüntünün tek sayıda parçası varsa (-1), çift sayıda parçası varsa (1) olmaktadır. $\sum_{a_i=0}^{1}(i =$

$1,2,3,...)$ ifadesi herhangi bir parçanın bölüntüde en fazla bir kez yer alabileceğini gösterir. Teorem 1.3'den de faydalanılarak pentagonal sayıların katsayılarının (-1) ve (1)'den biri; bunların dışında kalan sayıların katsayılarının ise (0) olacağı açıkca anlaşılmaktadır. (bkz.Yardımcı Teorem 1.2). Eşitliğin sol tarafındaki 1 değeri $a_1 = a_2 = a_3 = ... = 0$ iken elde edilir.

Sonuç 1.1(Algoritma I): $\forall n > 0$ için;

I. $p(n) + (-1)^m p(n-1) + ... + (-1)^m p(n - \frac{m(3m-1)}{2}) + (-1)^m p(n - \frac{m(3m+1)}{2}) + ... = 0$

($\forall M < 0$ için $p(M) = 0$ ve $p(0) = 1$'dir.)

İspat: I eşitliğinin sol tarafı a_n olsun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[p(n) - p(n-1) + ... + (-1)^m p(n - \tfrac{m(3m-1)}{2}) + (-1)^m p(n - \tfrac{m(3m+1)}{2}) + ...\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n - \sum_{n=0}^{\infty} p(n-1)q^n + ... + (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} p(n - \tfrac{m(3m-1)}{2})q^n +$$

$$(-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} p(n - \tfrac{m(3m+1)}{2})q^n + ...$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n - \sum_{n=0}^{\infty} p(n-1)q^n q + ... + (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n q^{\frac{m(3m-1)}{2}}) +$$

$$(-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n q^{\frac{m(3m+1)}{2}}) + ...$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n \left(1 - q + ... + (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} + (-1)^m q^{\frac{m(3m+1)}{2}} + ...\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} (p_e(\Delta, r) - p_0(\Delta, r))q^r\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} (1 + q^m)\right)$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^n)^{-1} \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^n) = 1.$$

Uyarı: Özellik 1'den $a_i = 0 (i = 1, 2, ...)$ olur. Elde edilen 1 değeri $p(0) = 1$ eşitliğinden gelmektedir. Bu eşitlikten faydalanarak $p(n)$'in hesaplanmasında kullanılabilen Algoritma I elde edilir.

II. BÖLÜM

Tanım: H, pozitif tamsayılardan oluşan bir küme olsun.Bu durumda $p("H", m, n)$, n sayısının m tane parçadan oluşan bölüntülerinin sayısını ifade eder. Bu gösterimi iki değişkenli bir özel tanımlı fonksiyon şeklinde aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$f_s(z; q) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p("H", m, n) z^m q^n$$

$$= \sum_{\lambda \in H} z^{\sharp(\lambda)} q^{\sigma(\lambda)}. \quad (\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_r), \sharp(\lambda) = r, \sigma(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_r \text{ dir}).$$

H pozitif tamsayılar kümesi ise $p(\text{"}H\text{"}, m, n)$; $p(\Omega, m, n)$ sembolüyle ifade edilir.

Yardımcı Teorem 2.1:

I. $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} p(\Omega, m, n) z^m q^n = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - zq^n)^{-1}$

II. $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} p(\text{"}H\text{"}(\leq d), m, n) z^m q^n = \prod_{n\in H}(1 - z^{d+1}q^{(d+1)n})(1 - zq^n)^{-1}$

İspat:

I. $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - zq^n)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + zq^n + zq^{2n} + ...)$

$= (1 + zq^{h_1} + zq^{2h_1} + ...) \times (1 + zq^{h_2} + zq^{2h_2} + ...) \times ...$

$= \sum_{a_1\geq 0}\sum_{a_2\geq 0}\sum_{a_3\geq 0} ... z^{a_1+a_2+a_3 ...} q^{a_1h_1+a_2h_2+a_3h_3 ...}$

Uyarı: q'nun kuvveti, $(h_1^{a_1}h_2^{a_2}...)$ bölüntüsü; z 'nin kuvveti ise bu bölüntüdeki parçaların sayısıdır.

Sonuç olarak aşağıdaki ifadede $z^M q^N$ değeri N 'nin parçaları H kümesinden alınmış M tane parçadan oluşan her farklı bölüntüsü için bir kez yer alacaktır. I için ispat biter.

II'nın ispatı sonsuz geometrik serinin sonlu geometrik seriyle yer değiştirmesi dışında I ile özdeştir.

Yardımcı Teorem 2.2:

$$\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-atq^n)}{(1-tq^n)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-a)(1-aq)...(1-aq^{n-1})t^n}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^n)}$$

Özellikler 2:

i. $(a)_n = (a;q)_n = (1-a)(1-aq)...(1-aq^{(n-1)})$, küçülecek

ii. $(a)_0 = 1$,

iii. Tüm n sayıları için $(a)_n = \frac{(a)_\infty}{(aq^n)_\infty}$.

İspat:

$$F(t) = \prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-atq^n)}{(1-tq^n)} = A_0 + A_1t + A_2t^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} A_nt^n \text{ olsun.}$$

Öyleyse;

$$(1-t)F(t) = (1-at)\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-atq^n)}{(1-tq^n)}, \qquad \left(n = 0, \frac{1-atq^n}{1-tq^n} = \frac{1-at}{1-t}\right)$$

$$= (1 - at)\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-atq^{n+1})}{(1-tq^{n+1})}$$

$$= (1 - at)F(tq) \qquad \left(F(qt) = \prod_{n=0}^{\infty}\frac{1-a(tq)q^n}{1-(tq)q^n} = \prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-atq^{n+1})}{(1-tq^{n+1})}\right)$$

Uyarı: $A_0 = F(0) = 1$ olduğu açıktır. t^n'li terimlerin katsayılarının eşitliğinden (bkn. özellikler 1.i)aşağıdaki özdeşlikler elde edilir:

$$(1-t)\sum_{n=0}^{\infty}A_n t^n = (1-at)\sum_{n=0}^{\infty}A_n(tq)^n \Rightarrow A_{n-1} = q^n A_n - aq^{n-1}A_{n-1}.$$

Buradan;

$$A_n = \frac{(1-aq^{n-1})}{(1-q^n)}A_{n-1} = \frac{(1-aq^{n-1})(1-aq^{n-2})...(1-a)A_0}{(1-q^n)(1-q^{n-1})...(1-q)} = \frac{(a)_n}{(q)_n}$$

Teorem 2.1:

I. $\prod_{n=0}^{\infty}(1-tq^n)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^n)}$

II. $\prod_{n=0}^{\infty}(1+tq^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^n)}$.

İspat: I için Yardımcı teorem 2.2 ' de a yerine 0 yazılırsa istenilen ifade elde edilir. II için Yardımcı Teorem 2.2 'de aynı yöntem kullanılarak a yerine $\frac{a}{b}$; t yerine $b \cdot z$ yazılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\frac{a}{b}q^{n-1})(1-\frac{a}{b}q^{n-2})...(1-\frac{a}{b})}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^n)}b^n z^n = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-azq^I)}{(1-bzq^I)}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(b-aq^{n-1})(b-aq^{n-2})...(b-a)z^n}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^n)}$$

Son ifadede $b = 0$ ve $a = -1$ atanır ve z yerine t yazılırsa ispat biter:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^n)} = \prod_{n=1}^{\infty}(1+tq^n)$$

Teorem 2.2:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}z^n q^{n^2} = \prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+2})(1+zq^{2n+1})(1+z^{-1}q^{2n+1}).$$

İspat: Teorem 2.3 II 'de t yerine zq; q yerine q^2 yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+zq^{2n+1}) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(zq)^m (q^2)^{\frac{m(m-1)}{2}}}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2m})}$$

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+zq^{2n+1}) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m q^{(m^2)}}{(q^2;q^2)_m}, \qquad (1.*)$$

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+zq^{2n+1})=\frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}z^m q^{(m^2)}(q^{2m+2};q^2)_\infty. \qquad \textbf{(2.*)}$$

Uyarı: **(2.*)** ifadesinde m 'in $(-\infty)$' dan gelmesi ifadenin değerinde herhangi bir değişikliğe neden olmamaktadır. Çünkü $\forall m<0$ için çarpıma $(1-q^0)=0$ çarpanı gelecek ve ifadeyi 0 yapacaktır.

Not: **(1.*)**ifadesinde z yerine $(-q^{2m+1})$ yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+(-q^{2m+1})q^{2n+1}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-q^{2m+1})^r q^{(r^2)}}{(q^2;q^2)_r}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(q^{r^2+2mr+r})}{(q^2;q^2)_r}.$$

Ayrıca;

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+(-q^{2m+1})q^{2n+1}\right)=(1-q^{2m+2})(1-q^{2m+4})...=(q^{2m+2};q^2)_\infty$$

olduğundan

$$(q^{2m+2};q^2)_\infty=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(q^{r^2+2mr+r})}{(q^2;q^2)_r}.$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade **(2.*)**' da yerine konursa,

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+zq^{2n+1})=\frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}z^m q^{(m^2)}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r(q^{r^2+2mr+r})}{(q^2;q^2)_r}\right).$$

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+zq^{2n+1})=\frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r q^r z^{-r}}{(q^2;q^2)_r}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}q^{(m+r)^2}z^{(m+r)}\right)$$

$$=\frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{-q}{z})^r}{(q^2;q^2)_r}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}q^{m^2}z^m\right)$$

Teorem 2.1 de t yerine $\frac{-q}{z}$, q yerine q^2 yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1-z^{-1}q^{2n+1})^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{-q}{z})^n}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2n})}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\frac{-q}{z})^r}{(q^2;q^2)_r}$$

Bu eşitlikten faydalanarak,

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+zq^{2n+1})=\frac{1}{(q^2;q^2)_\infty}\prod_{n=0}^{\infty}(1-z^{-1}q^{2n+1})^{-1}(\sum_{-\infty}^{\infty}q^{m^2}z^m)$$

Buradan,

$$\sum_{-\infty}^{\infty}q^{m^2}z^m=(q^2;q^2)_\infty\prod_{n=0}^{\infty}(1+zq^{2n+1})(1-z^{-1}q^{2n+1})$$

$$=\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+2})(1+zq^{2n+1})(1+z^{-1}q^{2n+1}).$$

Sonuç 2.1 (Algoritma II :)

$$p(4n)\equiv p(n)+p(n-7)+p(n-9)+...+p(n-\alpha_m)+... \qquad (\text{mod } 2),$$

$$p(4n+1) \equiv p(n) + p(n-5) + p(n-11) + ... + p(n-\beta_m) + ... \qquad (\text{mod } 2),$$

$$p(4n+3) \equiv p(n) + p(n-3) + p(n-13) + ... + p(n-\gamma_m) + ... \qquad (\text{mod } 2),$$

$$p(4n+6) \equiv p(n) + p(n-1) + p(n-15) + ... + p(n-\delta_m) + ... \qquad (\text{mod } 2).$$

Not: Kongruans sisteminde denkliğin sağ tarafındaki ifadelerde seri, parantez içindeki değer negatif olana dek sürecektir. Öte yandan $\alpha_m = m\ (8m \pm 1)$, $\beta_m = m\ (8m \pm 3)$, $\gamma_m = m\ (8m \pm 5)$, $\delta_m = m\ (8m \pm 7)$, $(m = 0, 1, ...)$ formunda sayılardır.

Özellik 3: İspatlarda kullanılacak olan kongruanslar $p^k (k = 0, 1, ...)$ lı terimin katsayıları arasında kullanılmaktadır. Bir örnekle ifade edilecek olursa;

$$(1-x)^5 = 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5,$$

$$(1-x)^5 = 1 + 5(-x + 2x^2 - 2x^3 + x^4) - x^5,$$

$$\equiv 1 - x^5 \qquad (\text{mod } 5).$$

TEŞEKKÜR

Projemizin başından itibaren çalışmamızın gelişiminde ve kaynak tespitinde bize destek olan Prof.Dr. Oktay PASHAEV'e teşekkürü bir borç biliriz.

KAYNAKÇA :

[1] G. E. Andrews: The Theory Of Partition, 1976

[2] F. V. Vainshtein: Partitions Of Integers in KVANT SELECTRA, Algebra and Analysis , 1999

[3] Partitions Chapter XIX, Number Theory, Oxford Press.