SEKİZ TAMKARE TEOREMİ VE CAYLEY SAYILARI

Oktay K. Pashaev - Fatih Erman
İYTE, Fen Fakültesi, Urla, İZMİR

Daha önceki sayılarımızda [1, 2] iki ve dört tamkare özdeşliklerini, ilgili teorem ve bağıntıları kompleks sayılar ve kuaterniyonlar yardımıyla incelemiştik. Bu özdeşlikler kompleks sayılar ve kuaterniyonların çarpımlarının normları yardımıyla yorumlanmıştı. Buradan, doğal olarak şöyle bir soru sorulabilir: İki n-tamkarenin toplamlarının çarpımı, bir n-tamkarenin toplamına eşit olabilir mi? Daha doğrusu, n'nin hangi değerleri için aşağıdaki özdeşlik sağlanır?

$$(a_1^2 + ... + a_n^2)\,(b_1^2 + ... + b_n^2) = A_1^2 + ... + A_n^2 \tag{1}$$

Burada A_i' ler $(i = 1, 2, ..., n)$ a ve b' lerin bilineer formu olarak verilmiştir. (Örnegin, $a_1 b_1 + 9a_1 b_2 - 3a_3 b_5 + 4a_3 b_4$ ifadesi bilineer bir formdur) Gördüğümüz gibi $n = 2$ olduğunda , $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ ve (A_1, A_2) ikilileri kompleks sayıları temsil eder : $(z_1, z_2) \leftrightarrow z_1 + iz_2$

$n = 4$ olduğunda da $(a_1, ..., a_4)$, $(b_1, ..., b_4)$ ve $(A_1, ..., A_4)$ sayı dörtlüleri, Hamilton'un kuaterniyonlarını temsil eder: $(q_1, ..., q_4) \leftrightarrow q_1 + q_2\, i + q_3\, j + q_4\, k$

Hamilton'un kuaterniyonları keşfinden kısa bir süre sonra Arthur Cayley, problemin $n = 8$ değeri için bir çözümü olduğunu gösterdi ve Hamilton'un birimlerinin bir genelleştirilmesi olan 8 birimi(units) aşağıdaki çarpım bağıntılarını sağlayacak şekilde

$$i_1^2 = -1, ..., i_7^2 = -1 \quad ; \quad i_1\, i_2 = i_4 = -i_2\, i_1 \quad ; \quad i_2\, i_3 = i_5 = -i_3\, i_2 \quad ; \quad i_1\, i_3 = i_7 = -i_3\, i_1$$

ve benzer çarpım bağıntılarını da aşağıdaki çarpım tablosuna göre tanımladı.

	i_1	i_2	i_3	i_4	i_5	i_6	i_7
i_1	-1	i_4	i_7	$-i_2$	$-i_6$	$-i_5$	$-i_3$
i_2	$-i_4$	-1	i_5	i_1	$-i_3$	i_7	$-i_6$
i_3	$-i_7$	$-i_5$	-1	i_6	i_2	$-i_4$	$-i_1$
i_4	i_2	$-i_1$	$-i_6$	-1	i_7	i_3	$-i_5$
i_5	$-i_6$	i_3	$-i_2$	$-i_7$	-1	i_1	i_4
i_6	i_5	$-i_7$	i_4	$-i_3$	$-i_1$	-1	i_2
i_7	i_3	i_6	$-i_1$	i_5	$-i_4$	$-i_2$	-1

(Burada çarpımın sonucu i. satırdaki elemanla j. sütundaki elemanın çarpımıdır) Oktonyanlar olarak da adlandırılan Cayley sayıları, $x_0, x_1, ..., x_7 \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$x = x_0 + x_1\, i_1 + ... + x_7\, i_7 \tag{2}$$

Bir oktonyanın eşleniğini de aşağıdaki şekilde tanımlamak uygun olacaktır:

$$\overline{x} = x_0 - x_1\, i_1 - ... - x_7\, i_7 \tag{3}$$

Buradan x ve $\overline{x}$ çarpımı

$$x\,\overline{x} = \overline{x}\,x = x_0^2 + ... + x_7^2 \tag{4}$$

oktonyanın normunun karesini veren gerçel bir sayı olur.

Herhangi sıfırdan farklı bir oktonyanın tersi

$$x^{-1} = (x\,\overline{x})^{-1}\,\overline{x} \tag{5}$$

olarak verilir ve burada $x\,x^{-1} = x^{-1}\,x = 1$ dir. Bundan daha önceki sayılarımızda kuaterniyonların çarpımının yerdeğiştirme özelliğine sahip olmadıklarını görmüştük. Tablodan da görüleceği üzere Cayley sayılarının çarpımının yerdeğiştirme özelliğine sahip olmamalarının yanında, ayrıca birleşme özelliğine de sahip olmadıkları görülür. Örneğin,

$$i_1\,(i_2\,i_3) = i_1\,i_5 = i_6 \quad , \quad (i_1\,i_2)\,i_3 = i_4\,i_3 = -i_6$$

$$i_1\,(i_2\,i_3) \neq (i_1\,i_2)\,i_3 \tag{6}$$

Cayley sayıları genel bir birleşme özelliğine sahip olmamalarına karşın, birleşme özelliğinin özel bir formunu sağlar. x, y oktonyanları için

$$x\,(y\,y) = (x\,y)\,y \quad , \quad (x\,x)\,y = x\,(x\,y) \tag{7}$$

dir. x ve y gibi iki oktonyanın çarpımının

$$(x_0 + x_1\,i_1 + ... + x_7\,i_7)\,(y_0 + y_1\,i_1 + ... + y_7\,i_7) = z_0 + z_1\,i_1 + ... + z_7\,i_7 \tag{8}$$

gibi yazılabileceği tablodan kolaylıkla görülebilir. Burada,

$$\begin{array}{ll} z_0 = x_0\,y_0 - x_1\,y_1 - ... - x_7\,y_7 & z_1 = 2\,3 + 4\,5 + 7\,6 + \overline{0\,1} \\ z_2 = 3\,1 + 4\,6 + 5\,7 + \overline{0\,2} & z_3 = 1\,2 + 6\,5 + 4\,7 + \overline{0\,3} \\ z_4 = 5\,1 + 6\,2 + 7\,3 + \overline{0\,4} & z_5 = 1\,4 + 3\,6 + 7\,2 + \overline{0\,5} \\ z_6 = 2\,4 + 5\,3 + 1\,7 + \overline{0\,6} & z_7 = 2\,5 + 3\,4 + 6\,1 + \overline{0\,7} \end{array} \tag{9}$$

ve $j\,k = x_j\,y_k - x_k\,y_j$, $\overline{0\,j} = x_0\,y_j + x_j\,y_0$ 'dır. Bu çarpım formülünden sekiz tamkare özdeşliğini sağlayan normların karelerinin çarpımını

$$(x_0^2 + x_1^2 + ... + x_7^2)\,(y_0^2 + y_1^2 + ... + y_7^2) = (z_0^2 + z_1^2 + ... + z_7^2) \tag{10}$$

olarak bulabiliriz. Fakat biz bunun yerine daha farklı bir yöntem izleyeceğiz. Cayley-Dickson ikilemesi (doubling) olarak bilinen bu yöntem kuaterniyonları ikilemenin bir sonucudur[3]. Göreceğimiz üzere bu yöntem sadece kuaterniyonlardan Cayley sayılarını elde etmek için değil, aynı zamanda kompleks sayılardan kuaterniyonları ve gerçel sayılardan da kompleks sayıları elde etmek için kullanılır.

a) İlk olarak, daha basit bir örnek olan dört tamkare özdeşliğini ve kuaterniyonları inceleyelim. Herhangi bir kuaterniyon $q \in \mathcal{H}$,

$$q = x_0 + x_1\,i + x_2\,j + x_3\,k \tag{11}$$

olarak ifade edilir. Aynı zamanda eğer i ve j birimlerinin çarpım özelliğini kullanırsak ($i\,j = k$) q' yu

$$q = x_0 + x_1\,i + x_2\,j + x_3\,i\,j = (x_0 + x_1\,i) + (x_2 + x_3\,i)\,j \tag{12}$$

şeklinde temsil edebiliriz.

Bu ifade herhangi bir kuaterniyonun $x_0 + x_1\,i$ ve $x_2 + x_3\,i$ gibi bir kompleks sayı çifti ile temsil edilebileceğini gösterir. Buradan, q ve r gibi iki kuaterniyon aşağıdaki biçimde tanımlanırsa,

$$q = (x_0 + x_1\,i) + (x_2 + x_3\,i)\,j = v + V\,j \quad ve \quad r = (y_0 + y_1\,i) + (y_2 + y_3\,i)\,j = w + W\,j \tag{13}$$

çarpımları

$$q\,r = (v + V\,j)\,(w + W\,j) = (v\,w - V\,\overline{W}) + (v\,W + V\,\overline{w})\,j \tag{14}$$

şeklinde olacaktır. Son ifade kuaterniyon çarpımını (Hamilton'unkine eşdeğer)kompleks sayı ikililerinin çarpımı şeklinde tanımlayabilmemize sağlar:

$$(v,V)\,(w,W) = (v\,w - V\,\overline{W}, v\,W + V\,\overline{w}) \tag{15}$$

Buradan 4 tam kare özdeşliğini, kompleks iki tam kare özdeşliğini kullanarak doğrudan ispatlayabiliriz:

$$\begin{aligned} |q\,r|^2 &= |v\,w - V\,\overline{W}|^2 + |v\,W + W\,\overline{w}|^2 \\ &= |v|^2\,(|w|^2 + |W|^2) + |V|^2\,(|w|^2 + |W|^2) \\ &= (|v|^2 + |V|^2)\,(|w|^2 + |W|^2) \\ &= |q|^2\,|r|^2 \end{aligned} \tag{16}$$

b)Benzer bir yolla herhangi bir oktonyon, kuaterniyonlar ikilileri ile temsil edilebilir. Burada $1, i_1, i_2, i_3$ birimleri, kuaterniyonların birimleri arasındaki bağıntıları sağladığından , bunları $1, i, j, k$ olarak değiştirebiliriz. Diğer kalan dört birim ise $e = i_4$, $i\,e = i_5$, $j\,e = i_6$ *ve* $k\,e = i_7$ olarak alalım. Bu takdirde, herhangi bir Cayley sayısı $x = x_0 + x_1\,i_1 + ... + x_7\,i_7$, $q + Qe$ biçiminde yazılır. Burada,

$$q = x_0 + x_1\,i + x_2\,j + x_3\,k \qquad Q = x_4 + x_5\,i + x_6\,j + x_7\,k \tag{17}$$

olarak belirlenen kuaterniyonlardır. Dolayısıyla $(q + Q\,e)$ ve $(r + R\,e)$ gibi iki oktonyonun çarpımı

$$(q + Q\,e)\,(r + Re) = q\,r - \overline{R}\,Q + (R\,q + Q\,\overline{r})\,e \tag{18}$$

şeklinde yazılabileceği açıktır. Burada q, Q, r ve R kuaterniyonlardır. Bu formül oktonyon çarpımını kuaterniyon sayı ikililerinin çarpımı olarak tanımlar:

$$(q, Q)\,(r, R) = (q\,r - \overline{R}\,Q, R\,q + Q\,\overline{r}) \tag{19}$$

Bu şekilde $\overline{q}$ kuaterniyonu, q' nun eşleniği olmak üzere , $x = q + Q\,e$ oktonyonunun eşleniğini $\overline{x} = \overline{q} - Q\,e$ olarak tanımlayabileceğimiz açıktır. Şimdi, herhangi bir Cayley sayısı x ile onun eşleniği $\overline{x}$'in çarpımı,

$$\begin{aligned} x\,\overline{x} = (q + Q\,e)\,(\overline{q} - Q\,e) &= (q\,\overline{q} + \overline{Q}\,Q) + (-Q\,q + Q\,q)\,e \\ &= q\,\overline{q} + Q\,\overline{Q} \end{aligned} \tag{20}$$

olur ve kuaterniyonlar için $q\,\overline{q} = \overline{q}\,q = |q|^2$ olduğundan,

$$|x|^2 = \sum_{i=0}^{7} x_i^2 = x\,\overline{x} = |q|^2 + |Q|^2 \tag{21}$$

olarak yazılabilir. Buradan, iki Cayley sayısının çarpımının mutlak değerleri, bu iki Cayley sayısının mutlak değerlerinin çarpımı olduğu kolayca ispatlanabilir($|x\,y|^2 = |x|^2|y|^2$). İki oktonyonun çarpımı

$$x\,y = (q + Q\,e)\,(r + R\,e) = (q\,r - \overline{R}\,Q)\,\overline{(q\,r - \overline{R}\,Q)} + (R\,q + Q\,\overline{r})\,\overline{(R\,q + Q\,\overline{r})} \tag{22}$$

dır. Kuaterniyonların eşleniğinin özelliğinden,

$$|x\,y|^2 = (q\,r - \overline{R}\,Q)\,(\overline{r}\,\overline{q} - \overline{Q}\,R) + (R\,q + Q\,\overline{r})\,(\overline{q}\,\overline{R} + r\,\overline{Q}) \tag{23}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Diğer yandan,

$$|x|^2\,|y|^2 = (q\,\overline{q} + Q\,\overline{Q})\,(r\,\overline{r} + R\,\overline{R}) \tag{24}$$

olur. Son iki ifadenin farkı alınırsa,

$$S = |x\,y|^2 - |x|^2\,|y|^2 = R\,q\,r\,\overline{Q} + Q\,\overline{r}\,\overline{q}\,\overline{R} - q\,r\,\overline{Q}\,R - \overline{R}\,Q\,\overline{r}\,\overline{q} \tag{25}$$

olur. Şimdi, herhangi q,Q,r,R gibi dört kuaterniyon için S' nin sıfır olduğunu göstermeliyiz. İlk olarak eğer R gerçel bir kuaterniyon ise ($R = R_0 + 0\,i + 0\,j + 0\,k$), S' nin sıfır olacağı açıktır (kuaterniyonların değişme özelliğine sahip olmayıp, birleşme özelliğine sahip olduğu hatırlanmalıdır). Öte yandan, R sadece sanal kuaterniyon ise ($R = 0 + R_1\,i + R_2\,j + R_3\,k$) , $\overline{R} = -R$ ve $S = R(q\,r\,\overline{Q} + Q\,\overline{r}\,\overline{q}) - (q\,r\,\overline{Q} + Q\,\overline{r}\,\overline{q})R$ olur. Parantezdeki ifadeler $q\,r\,\overline{Q} + Q\,\overline{r}\,\overline{q}$ iki eşlenik kuaterniyonun toplamıdır. Dolayısıyla, sonuç bir C gerçel sayısına eşit olur. Buradan,

$$S = R\,C - C\,R = 0 \tag{26}$$

olur. Eğer S , $R = a$ ve $R = b$ için sıfır oluyorsa $R = a + b$ için de sıfır olacaktır. Tüm kuaterniyonlar bir gerçel sayı ve sanal kuaterniyonun toplamından oluştuğu için ve de bunların her biri için S sıfır olduğundan, S her zaman sıfır olacaktır. Böylece ispat tamamlanmış olur. Şimdi, elde ettiğimiz bu özdeşliği bileşenleri cinsinden yazarsak

$$(x_0^2 + x_1^2 + ... + x_7^2)(y_0^2 + y_1^2 + ... + y_7^2) = (z_0^2 + z_1^2 + ... + z_7^2) \tag{27}$$

sonucuna varırız. Burada $x\,y = z_0 + z_1\,i_1 + ... + z_7\,i_7$, $x = x_0 + x_1\,i_1 + ... + x_7\,i_7$ ve $y = y_0 + y_1\,i_1 + ... + y_7\,i_7$. Ayrıca z_i , x_i ve y_i'ler cinsinden (9)'da verilmiştir. Bu ulaştığımız sonuç, sekiz tam kare özdeşliğinden başka bir şey değildir. Buradan bazı diğer n değerleri için de n tam kare özdeşliği probleminin çözümü olduğunu düşünebilirsiniz[5]. Aslında bu fikir ilk olarak 1844 yılında oktonyonları Hamilton'la yazışmalarında ortaya atan John T.Graves'e aittir. Fakat bu yazışmalar 1847 yılına kadar yayımlanmadı ve daha sonra Cayley tarafından tekrar keşfedildi. Dolayısıyla Graves genel bir teori olarak $n = 2^m$-yonlar ($n = 2^m$-ions) ve $n = 2^m$ özdeşlikleri fikrini düşündü. Fakat 1896 yılında Alman matematikçi A.Hurwits'in çalışmaları bu özdeşliklerin sadece $n = 1, 2, 4$ ve 8 için varolabileceğini gösterdi. Bu özdeşlikleri sağlayan sayı sistemleri de gerçel sayılar $\mathcal{R}$, kompleks sayılar $\mathcal{C}$, kuaterniyonlar $\mathcal{H}$ ve de oktonyanlar $\mathcal{O}$ dır. Tam sayıların, kompleks, kuaterniyon ve oktonyonlar tamsayılarına genelleştirilmesi ve bunların geometrik yorumu doğal bir sorudur[6]. Gaussian tamsayıları $Z[i] = \{n + m\,i\,|n, m \in \mathcal{Z}\}$ ve Minkowski tamsayıları $Z[i, j, k] = \{n + m\,i + l\,j + p\,k\,|n, m, l, p \in \mathcal{Z}\}$ iki ve dört boyutlu polihedronların örgüleri ile ilgilidir. Tam kuaterniyonların dört boyutta sıkı paketleme ile ilgili olmasına benzer olarak, tam Cayley sayılarıda sekiz boyutta kürelerin sıkı paketlenmesinden sorumludur. Kuaterniyonlar ve oktonyanların ayrıcalıklı özellikleri ve de bunların gerçek dünya ile ilişkileri doğadaki temel etkileşimleri "süpersimetri" , "sicim teorisi" ve çokboyutlu uzaylar yardımıyla birleştiren modern fizik teorilerinde farkedilmiştir. Bu konuya Türk bilim adamımız Feza Gürsey önemli katkılarda bulunmuştur[4].

KAYNAKLAR

[1] O.K. Pashaev, E. Büyükaşık, Karmaşık Sayılarda İki Tamkare Teoremi, Matematik Dünyası, Cilt:10, Sayı:1

[2] O.K. Pashaev, E. Büyükaşık, Kuaterniyonlar Dört Tamkare Teoremi, Matematik Dünyası, Cilt:10, Sayı:2

[3] I.L.Kantor, A.S.Solodovnikov, "Hypercomplex Numbers. An Elementary Introduction to Algebras", Springer 1989

[4] F.Gürsey, Chia-Hsiung Tze, "On The Role Of Division, Jordan And Related Algebras in Particle Physics" W.S.1996

[5] C.W.Curtis "The Four And Eight Square Problem And Division Algebras"

[6] H.S.M.Coxeter "Integral Cayley Numbers" Am.Math.Monthly, 53(1946)136