SÜREKLİ VE TÜREVLENEBİLİR FONKSİYONLAR ÜZERİNE

Şafak Alpay
ODTÜ, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, ANKARA

Gerçel sayıların $[a,b]$ kapalı aralığından gerçel sayılarda değerler alan bir $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $x_0\in[a,b]$ noktasındaki türevlenebilirliği

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\quad a\le x\le b,\quad x\ne x_0 \tag{1}$$

limitinin varlığı ile ifade edilen ve f fonksiyonunun x_0 noktasındaki yerel bir özelliğidir. Limitin değerine, türevin x_0 noktasındaki değeri denir ve $f'(x_0)$ ile gösterilir. Bu şekilde yine $[a,b]$ aralığından, gerçel sayılarda değer alan yeni bir f' fonksiyonu tanımlanabilir. Eğer f' fonksiyonunun tanım kümesi $[a,b]$ ise f, $[a,b]$ üzerinde türevlenebilirdir denir.

Bir f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevlenebilirliği onun x_0 da (yine yerel bir özellik olan) sürekliliği gerektirir. Ancak bu önermenin tersi doğru değildir.

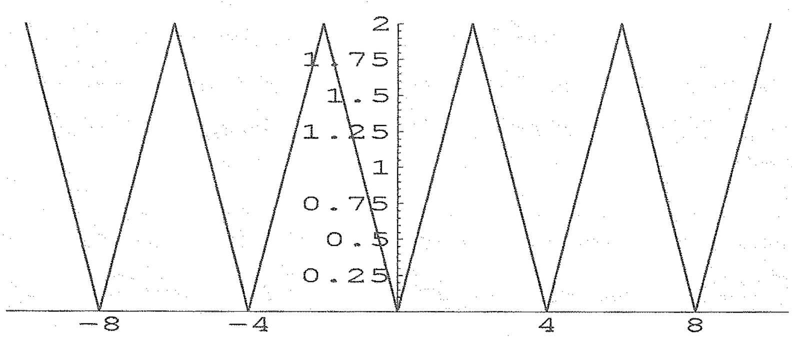
Örneğin, $f(x)=|x|$, mutlak değer fonksiyonu, sürekliliğin türevlenebilirliği gerektirmediğini gösterir. Gerçekten bu fonksiyon $x=0$ noktasında sürekli iken (1) deki limitte sağdan limit

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$$

iken, soldan, yani sıfıra negatif değerler ile yaklaşıldığında,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

olduğundan (1) deki limit yoktur. $f(x)=|x|$ fonksiyonu ile oynayarak sürekli ancak sonlu veya sayılabilir sonsuzlukta noktada türevlenebilir olmayan fonksiyonlar üretebilirsiniz. 19.y.y. başlarında matematikçiler sürekli fonksiyonların hatırı sayılır bir kümede türevlenebilir olduğundan kuşkulanıyorl



Bu konuda ilk işe koyulan A.M. Ampére oldu. 1806'da Ampére, sürekli olsun, olmasın her fonksiyonun, ihmal edilebilir, bir küme dışında türevlenebileceğini ileri sürmüştü.

Ampére, bu konuda başarısız oldu. Bu konudaki çalışmalara Weierstrass (1815-1897), 18 Temmuz 1872'de Berlin Akademisine sunduğu çalışması ile nokta koydu. Weierstrass, her noktada sürekli ancak hiçbir noktada türevi olmayan fonksiyon örneklemişti. O'nun örneği ilk kez 1875'de Du Bois-Reymond tarafından yazıldı. Bu örnek, a'nın tek ve tamsayı, b'nin de $0 < b < 1$ ve $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ sağlayan gerçel bir sayı seçilerek tanımlanan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} b^k \cos(a^k \pi x)$$

fonksiyonu idi. Avusturyalı B. Bolzano (1781-1848)'nun 1830'da benzeri bir örnek inşa ettiği biliniyor. Ancak Bolzano'nun yazısı 1920'de ele geçiyor ve yazıldıktan 100 yıl sonra, 1936'da basılabiliyor.

Weierstrass'tan bu yana böylesi bir çok fonksiyon örnekleniyor. Ancak 1960'da, F.A. Behrend tarafından üretilen örnek, bu örnekler içinden en kolay anlaşılır olanlardan biri.

Gerçel sayılar, $\mathbb{R}$'den, yine $\mathbb{R}$'de değerler alan heryerde sürekli ancak hiçbir yerde türevlenebilir olmayan fonksiyon örneği olarak $\varphi = \varphi(x)$ fonksiyonu şöyle tanımlansın:

$$\varphi(x) = \begin{cases} |x| & , \quad |x| \leq 2 \\ \varphi(x + 4n) & , \quad n = \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

φ fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri vardır.

1. φ süreklidir
2. $0 \leq \varphi(x) \leq 2$ ve $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 2$
3. Her x ve y için $-1 \leq \frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{x-y} \leq 1$
4. Her c gerçel sayısı için $|c - x_0| = 1$ ve $|\varphi(c) - \varphi(x_0)| = |c - x_0|$ koşullarını sağlayan x_0 vardır
5. $a > 0$ ve $b > 0$ için $\varphi_n(x) = a^n \varphi(b^n x)$; $n = 0, 1, 2, \cdots$ ile tanımlanırsa, φ_n sürekli bir fonksiyondur
6. $0 \leq \varphi_n(x) \leq 2a^n$, $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq 2a^n$
7. $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq a^n b^n |x - y|$
8. Her c için, $|c - x_n| = \frac{1}{b^n}$ koşulunu sağlayan x_n vardırki bu x_n, $|\varphi_n(c) - \varphi_n(x_n)| = a^n b^n |c - x_n|$ eşitliğini sağlar

Şimdi, a sayısını $0 < a < 1$ olarak seçelim ve $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ olarak tanımlıyalım. (6) özelliği ve fonksiyon serileri için kullanılan Weierstrass M-ölçütü ile $f(x)$ fonksiyonunu betimleyen serinin düzgün yakınsadığını buluruz. Düzgün yakınsayan sürekli fonksiyonların limiti olarak tanımlanan bir fonksiyon sürekli olacağından, f fonksiyonu süreklidir.

f fonksiyonunun türevlenebilir olmadığını görmek için $ab > 1$ ve c için $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ olan bir (x_n) dizisi seçelim.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(c)-f(x_n}{c-x_n}\right| &= \left|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\varphi_j(c)-\varphi_j(x_n)}{c-x_n}\right| \\
&\geq \left|\frac{\varphi_n(c)-\varphi_n(x_n)}{c-x_n}\right| - \sum_{j=0,j\neq n}^{\infty}\left|\frac{\varphi_j(c)-\varphi_j(x_n)}{c-x_n}\right| \\
&\geq (ab)^n - \sum_{j=0}^{n-1}(ab)^j - 2b^n\sum_{j=n+1}^{\infty} a^j \\
&= (ab)^n - \frac{(ab)^n-1}{ab-1} - \frac{2a(ab)^n}{1-a} \\
&> (ab)^n\left(1-\frac{1}{ab-1}-\frac{2a}{1-a}\right)
\end{aligned}$$

Buradan $d = 1 - \frac{1}{ab-1} - \frac{2a}{1-a} > 0$ ise

$$\lim\left|\frac{f(c)-f(x_n)}{c-x_n}\right| > \lim(ab)^n d = \infty$$

olacağından, c noktasında, türevlenebilirliği tanımlayan limit yoktur ve f fonksiyonu c noktasında türevlenebilir değildir.

Günümüzde Baire Kategori teoremi olarak bilinen bir teorem sayesinde birçok sürekli fonksiyonun türevlenebilir olmadığını biliyoruz. Bir anlamda türevlenebilir (sürekli) fonksiyonlar sürekli fonksiyon içinde çok azdır[2].

KAYNAKLAR

[1] Behrend, F.A: Crinkly Curves and Choppy Surfaces AMM, 67 (971-973), 1960

[2] Boas R.P: A Primer of Real Functions, Math. Asc. U.S.A, 1972

Matematik, insan zekâsının en güzel çocuğudur. Bu çocuğu tanımak, anlamak ve büyütmek, insanlığın insanlığa doğru sonsuz bir seri halinde açılması demektir.

Anonim
