PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLER

Hazırlayan: Refail Alizade

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

- Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

- Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

- Çözümleri, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla-İzmir adresine 31 Ocak 2002 tarihine kadar gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.246. n pozitif tamsayısı 3'ün katı değilse, her birinin basamakları toplamı n'e bölünen iki ardışık pozitif tamsayı bulunduğunu gösteriniz.

A.247. ABC üçgeninin kenarları üzerinde dışa yönelik $ABMN$, $BCKL$, $ACPQ$ kareleri çizilmiştir. $[QN]$ ve $[KP]$ doğru parçaları üzerinde $QNTZ$ ve $KPXY$ kareleri çizilmiştir. $ABMN$ ve $BCKL$ karelerinin alanları farkı d ise $QNTZ$ ve $KPXY$ karelerinin alanları farkını bulunuz.

A.248. Kutuda mavi ve kırmızı olmak üzere toplam 30 tane bilye bulunur. Herhangi 12 tane bilyeden enaz biri mavidir, herhangi 20 bilyeden enaz biri kırmızıdır. Sepetteki mavi ve kırmızı bilyelerin sayısını bulunuz.

A.249. Liseden birkaç kişi ayrıldıktan ve birkaç kişi liseye katıldıktan sonra öğrenci sayısı %10 azaldı, erkek öğrencilerin sayısı %50 'den %55 'e çıktı. Erkek öğrenci sayısı arttı mı , azaldı mı?

A.250. Bir aile gece köprüye yaklaştı. Baba köprüyü 1 dakikada , anne 2 dakikada , çocuk 5 dakikada , büyükanne 10 dakikada geçebilir. Köprüden aynı anda en fazla 2 kişi geçebilir ve ailenin tek bir lambası bulunmaktadır. Aile 17 dakikada köprüyü nasıl geçebilir? (Köprüyü lambasız geçmek mümkün değil ve köprü uzaktan aydınlatılamaz.)

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.246. $A, 2A, 3A, ..., 500000A$ sayılarından hiçbirisinin son 6 basamağı birbirine eşit (yani $aaaaaa$ şeklinde) olmayacak biçimde bir altı basamaklı A sayısı bulunur mu?

Y247. $ABCDEF$ dışbükey altıgeninin AB, BC, CD, DE, EF, FA kenarlarının orta noktaları sırasıyla A', B', C', D', E', F' olsun. ABC',BCD',CDE',DEF',EFA',FAB' üçgenlerinin alanları toplamı S ise $ABCDEF$ altıgeninin alanını bulunuz.

Y.248. 10 bankacı bir masa etrafında oturmuşlar ve herbir bankacının hesabında bir gerçel sayı yazılmıştır. Bu sayılar pozitif ve negatif olabilir. Bankacılar sırasıyla geriye kalan 9 kişinin herbirinin hesabına (işlemlerden önceki) kendi sayısının $\frac{1}{9}$'unu ekliyor, kendisine ise 0 yazıyor. Onuncu işlemden sonra bankacıların sayılarının ilk baştaki duruma gelemeyeceğini gösteriniz.

Y.249. $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ ve $b_1 \leq b_2 \leq b_3$ olmak üzere $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$, $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1$ eşitliklerini sağlayan $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ gerçel sayıları verilmiştir. $a_1 \leq b_1$ ise $a_3 \leq b_3$ olduğunu gösteriniz.

Y.250. Bir dışbükey n-gende, her köşegen en fazla bir başka köşegenle kesişecek şekilde en fazla kaç köşegen çizilebilir? (Köşegenler aynı köşeden çıkıyorsa, bu köşe kesişim noktası olarak kabul edilmiyor.)

ÇÖZÜMLER

A.236. 347777743 sayısı asal mıdır?

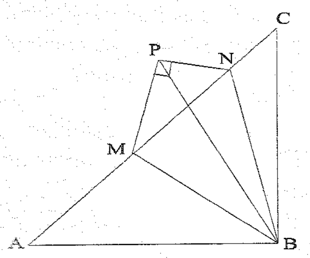
Çözüm. 347777743 sayısını 333333300+11111110+3333333 şeklinde yazarak, 11111111 sayısına bölündüğünü ve dolayısıyla asal olmadığını görürüz.

A.237. ABC ikizkenar dik üçgeninin AC hipotenüsü üzerinde, $s(\widehat{MBN}) = 45°$ olacak şekilde M ve N noktaları alınmıştır.

$$|AM|^2 + |NC|^2 = |MN|^2$$

olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. $s(\widehat{MBP}) = s(\widehat{ABM})$ ve $|PB| = |AB| = |BC|$ olacak şekilde bir P noktası alalım

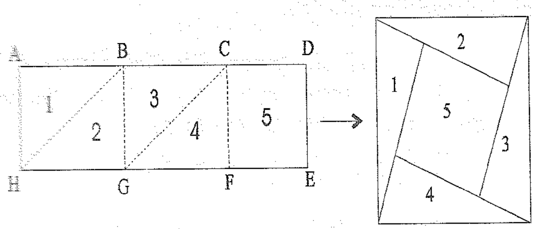


Şekil 1

$|AB|$ = $|BC|$ olacak şekilde bir P noktası alalım (Şekil 1). O halde $\overset{\triangle}{ABM}$ ve $\overset{\triangle}{MBP}$ üçgenlerinin eşitliğinden $|AM| = |PM|$ elde ederiz. Diğer taraftan $s(\widehat{PBN}) = 45° - s(\widehat{PBM}) = 45° - s(\widehat{ABM}) = 90° - s(\widehat{MBN}) - s(\widehat{ABM}) = s(\widehat{NBC})$ olduğundan, $\overset{\triangle}{PBN} = \overset{\triangle}{NBC}$'dir. Dolayısıyla $|PN| = |NC|$'dir. $s(\widehat{MPN}) + s(\widehat{NCB}) = 90°$ olduğundan, $|MA|^2 + |NC|^2 = |PN|^2 + |PN|^2 = |MN|^2$ elde ederiz.

A.238. 1x5 boyutlu dikdörtgeni öyle 5 parçaya ayırın ki, bunlar birleştirilerek bir kare oluşturulabilsin.

Çözüm. Elde edeceğimiz karenin kenar uzunluğunun $\sqrt{5}$ olacağı açıktır. Aşağıda karenin oluşturulma süreci verilmiştir ($|AB| = |BC| = |HG| = |GF| = 2; |CD| = |DE| = |FE| = 1$'dir).



Şekil 2

A.239.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{21}$$

denklemini çözünüz.

Çözüm. Denklemin sağ tarafını

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{21}=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{20}+\frac{1}{21}-1-\frac{1}{2}-...-$$

$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}...+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}...+\frac{1}{20}-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}...+\frac{1}{2}$$

$$=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}...+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}...-\frac{1}{20}$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...-\frac{1}{20}+\frac{1}{21}$$

şeklinde yazarak $x = 10$ sayısının bir çözüm olduğunu görürüz. $f(x) = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x+1}$ fonksiyonu azalan olduğundan ($f(1) > f(2) > f(3) > ...$), çözüm tektir.

A.240. 20 kişinin katıldığı bir satranç turnuvasında herkes birbiriyle birer maç yaptı. Sonuçta katılanlardan her birinin kazandığı ve berabere kaldığı maçların sayısı aynı olabilir mi?

Çözüm. i. katılan kişinin ($i = 1, 2, ...20$) kazandığı maç sayısı n_i, kaybettiği maç sayısıda m_i olsun. Her katılanın berabere kaldığı maç sayısı kazandığı maç sayısına eşit olursa, her $i = 1, 2, ..., 20$ için $2n_i + m_i = 19$ olur. Bir kişinin kazandığı maçı diğeri kaybetmiş (ve tersine) olduğundan

$$\sum_{i=1}^{20} n_i = \sum_{i=1}^{20} m_i$$

olacak. O halde

$$20\cdot 19 = \sum_{i=1}^{20}(2n_i+m_i) = 2\sum_{i=1}^{20} n_i+\sum_{i=1}^{20} m_i = 3\sum_{i=1}^{20} n$$

eşitliği elde edilir. $20 \cdot 19$ çarpımı 3'e bölünmediğinden, çelişki elde etmiş oluruz. Böylece problemde bahsedilen durum mümkün değildir.

Y.236. Sonsuz sayıda n pozitif tam sayısı için, n'nin iki tam sayının kareleri toplamı şeklinde gösterilebileceğini; $n-1$ ve $n+1$ sayılarının ise bu şekilde gösterilemeyeceğini kanıtlayınız.

$n + 1$ sayısının basamakları toplamı 3'tür, dolayısıyla $n + 1$,3'e bölünür, 9'a bölünmez. O halde $n+1 = k^2 + m^2$ şeklinde gösterilebilirse, k ve m, 3'e bölünecek, dolayısıyla k^2+m^2 sayısı 9'a bölünecek. Çelişki!

Y.237. M dışbukey çokgeni bir nokta etrafında $90°$ dönme sonucu kendisine dönüşüyor. Birisi M'yi içeren, diğeri de M'nin içinde bulunan ve yarıçapları biri diğerinin $\sqrt{2}$ katı olan iki daire bulunduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. M çokgeninin O noktası etrafında 90 derece dönmesi sonucu kendisine dönüştüğünü varsayalım. Çokgenin O noktasından en uzak olan köşesini (ve ya bunlardan birini) A_1 ile gösterelim.90 derece dönme sonucu A_1'in dönüştüğü köşe A_2, A_2'nin dönüştüğü köşe A_3 , A_3'ün dönüştüğü köşe A_4 olsun. O halde A_4 de A_1'e dönüşecek.Dolayısıyla $A_1A_2A_3A_4$, merkezi O noktası olan bir karedir. Bu karenin çevrel çemberi M çokgeninin tüm köşelerini ve dolayısıyla tüm kenarlarını içerecektir. Diğer taraftan M dışbükey olduğundan, tüm kenarları $A_1A_2A_3A_4$ karesinin iç teğet çemberinin dışında bulunacak. Böylece bu iki çemberden biri M'yi içerecek, diğeri de M'nin içinde bulunacaktır. Bu çemberlerin yarıçapları oranının $\sqrt{2}$ olduğu açıktır.

Y.238. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{100}$ sayılarından oluşan ve çift sayıda eleman içeren tüm kümeler alınıyor ve her kümedeki sayıların çarpımı hesaplanıyor. Tüm çarpımların toplamını bulunuz.

Çözüm. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{100}$ sayılarından çift sayıda alınarak oluşturulan tüm çarpımlarının toplamı Ç ile, tek sayıda alınarak oluşturulan tüm çarpımların toplamı T ile gösterelim. O halde

$$Ç + T = (1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdot ... \cdot(1+\frac{1}{100}) - 1$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot ... \cdot\frac{101}{100} - 1 = \frac{101}{2} - 1 = \frac{99}{2}$$

ve

$$Ç - T = (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\cdot ... \cdot(1-\frac{1}{100}) - 1$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot ... \cdot\frac{99}{100} - 1 = \frac{1}{100} - 1 = -\frac{99}{100}$$

olacak. Dolayısıyla $Ç = \frac{1}{2}(\frac{99}{2} - \frac{99}{100}) = \frac{99\cdot 49}{200}$ elde ederiz.

Y.239. $a < b < c$ sayıları $x^2 - 3x + 1 = 0$ denkleminin çözümleridir. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ toplamını bulunuz.

Çözüm. Vieta Teoreminden $a+b+c = 0; ab+bc+ac = -3$ ve $abc = -1$ elde ederiz. $u = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ ve $v = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ alalim. O halde

$$u + v = \frac{a^2c + ab^2 + bc^2 + ac^2 + a^2b + b^2c}{abc}$$

$$= \frac{ac(a+c) + ab(a+b) + bc(b+c)}{-1}$$

$$= -[ac(-b) + ab(-c) + bc(-a)] = -3$$

ve

$$uv = 3 + \frac{a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3}{a^2b^2c^2}$$

elde ederiz. $a^3 - 3a + 1 = 0, b^3 - 3b + 1 = 0$ ve $c^3 - 3c + 1 = 0$ esitliklerini kullanarak $a^3 + b^3 + c^3 = 3(a+b+c) - 3 = -3$ ve $a^3b^3 + b^3c^3a^3c^3 = 9(ab+bc+ac) - 3(a+b+c) + 3 = 2^4$, buradan da $uv = -18$ elde ederiz. O halde $u = -6, v = 3$ veya $u = 3, v = -6$'dır. $a < b < c$ olduğundan $u-v = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} < 0$ elde edilir. Dolayısıyla $u = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = -6$' dır.

Y.240. Her $n > 1$ tam sayısı için,

$$x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n = M$$

denkleminin negatif olmayan tam sayılardan oluşan $x_1, x_2, ..., x_n$ kökünün bulunmamasını sağlayan sonsuz sayıda M sayısının bulunduğunu kanıtlayınız.

Çözüm. $n > 1$ sayısını sabit tutarak, herhangi $k \le n$ pozitif tamsayısı için, $k^n - 1$ sayısından büyük olmayan ve $x_1^n+...+x_n^n$ şeklinde yazılabilen sayıların sayısını değerlendirelim. $0 \le x_1 \le x_2 \le ... \le x_n \le k-1$ olduğunu kabul edebiliriz. $x_1 = m, 0 \le m \le k-1$ ise, $x_2, x_3, ..., x_n$ sayılarından herbiri en fazla $k - m$ tane değer alabilir, dolayısıyla mümkün $(x_1, ..., x_n)$' lerin sayısı $(k-m)^{n-1}$'i geçmez. Tüm m'lere göre aldığımızda, böyle n'lerin sayısı $\sum_{m=0}^{k-1}(k-m)^{n-1}$ toplamını geçmez. O halde $m \le k^n - 1$ eşitsizliğini sağlayan ve $x_1^n + ... + x_n^n$ şeklinde gösterilemeyen m'lerin sayısı

$$k^n - 1 - \sum_{m=0}^{k-1}(k-m)^{n-1} \ge k^n - 1 - (k-1)k^{n-1}$$

$$= k^{n-1} - 2$$

sayısından küçük değildir. Bu her $k \geq n$ için doğru olduğundan k'yı büyüterek $k^{n-1}-2$ sayısını istediğimiz kadar büyütebiliriz.

KİTAPLAR ... KİTAPLAR

MATEMATİĞİN TEMELLERİ

(sayı sistemleri ve cebirsel yapılar)

İ.Halil Karakaş, METU Press, 2001

MATEMATİK ANALİZ VE ANALİTİK GEOMETRİ

(Fen-Mühendislik Fakülteleri ve Yüksek Okul Öğrencileri İçin)

Çeviri Editörü: Ömer Akın, Palme Yayıncılık, 2001

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosuna kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yoktur. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

* Konu sunuşları.

* Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.

* Yıllardır çözüm bekleyerek ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.

* Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.

* Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.

* Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.

* Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların bilgisayar ortamında yazılmış olması (Latex, Word, Scientific Work-Place), düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi gerekmektedir. Yazılar ya bir adet yazıcıdan çıkmış örneği ve bir 3.5 inc'lik diskete kayıt edilmiş olarak

Matematik Dünyası
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü,
Matematik Bölümü, 35435
Gülbahçe-Urla,İZMİR

adresine posta ile gönderilmeli, ya da *mdunyasi@galois.iyte.edu.tr* adresine elektronik posta ile gönderilmelidir.
