HELLY TEOREMİ VE İLGİLİ PROBLEMLER

İsmihan Yusubov
Sakarya Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, SAKARYA
iyusubov@sakarya.edu.tr

Afet Golayoğlu Fatullayev
Başkent Üniversitesi, Uygulamalı Bilimler Yüksek Okulu, ANKARA
afet@başkent.edu.tr

Bu yazıda geometri ve kombinator hesabında geniş uygulama alanına sahip, Helly teoremi ve onun bazı uygulamalarının tanıtımı amaçlanmıştır. Eduard Helly'nin zorluk ve serüven dolu hayatının kısa özetinden başlayalım.

1. Eduard Helly'nin kısa özgeçmişi

Eduard Helly, 01.06.1884'de Viyana'da doğdu. Viyana Üniversitesinde okudu ve Wirtinger'le Merten'in danışmanlığında Fredholm denklemleri ile bağıntılı bitirme tezini yazdıktan sonra, 1907 'de doktoraya Gettingen'de başladı. O zamanlar Gettingen Üniversitesi dünya matematikçilerinin Mekkesi gibi ünlü bir ada sahip idi. Burada , o, Hilbert, Klein, Minkovski ve Runge gibi dünyaca ünlü matematikçilerden iki sene (1907-1908) boyunca ders aldı.

Geri döndüğünde Üniversitede bir makam tutmağa çaba göstermeden, yaşamını sürdürmek için farklı bir yol seçti. Gimnazyumda ders verdi ve matematikten çözümlü problemleri olan klavuz kitapları yazdı. Bu arada matematikte yaranmakta olan yepyeni bir alana- Fonksiyonel Analiz'e girişimlerde bulundu ve 1912 de Hahn-Banach teoremini ispatladı. Bu ispat Hahn'ın aşağı-yukarı aynı ispatından 15 sene, Banach'ın bu teoreme modern bir şekil vermesinden ise tam 20 sene önce yapılmıştır.

I. Dünya savaşının başlamasıyla (1914) Helly orduya alındı. Teğmen olarak hizmet verdiği sırada, 1915 in Eylülünde ağır şekilde yaralandı. Mermi onun akciğerini delerek sağlamlığını ciddi bir şekilde tahrip etti ve hayatı boyunca, o, bir daha evvelki sağlamlığına kavuşamadı. Yaralandıktan sonra Rusların esiri olarak yıllarını hospitallerde ve Sibirya'nın esir kamplarında geçirdi. Bütün bunlara rağmen, o, kendisinde 1. Dünya savaşının 1918 de son bulmasını göre bilmek için güç bulmayı başardı. Bundan sonra onu serbest bıraktılar. Fakat Rusya'da artık iç savaş başlamıştı ve buradan kurtuluş çok zor olacaktı. Ve onun 1918 de Rusya'dan ayrıldıktan sonra 1920 de Vyana'da tamamlanacak tehlike ve serüvenlerle dolu olan yolu Japonya, Uzak Doğu, Mısır ve Orta Doğudan geçmiştir. 1921 de Helly kendisi ile eşzamanlı doktora yapmış ve Vyana'dan olan Elise Bloch'la evlenir. Aynı yılda o habilitation(doctor of science) tezini savundu ve üniversitede ders vermek için hak kazandı. 1921 de Vyana Üniversitesine atandı, fakat ücretsiz olarak. Eşinin tahminine göre bu profesörlerin bir oyunu idi.(Kısmen Helly yahudi olduğu için ve hem üniversitede kürsüsü olan Hahn onun daha üstün olacağını düşündüğüne göre).

Helly, yaşamlarını sürdürmek için bir bankada çalışmaya başladı, fakat bu banka da 1929 da iflas etti. Daha sonra, o, kendine bir sigorta şirketinde iş buldu, fakat 1938 de burada da işinden oldu. 12 Mart 1938 de Hitler alman ordusunun başında Avusturya'ya girdi ve Naziler yönetime el koydular. Helly de bir çokları gibi, yahudi olduğu için işinden atıldı ve onun, ailesini daha kötü tehlikelerden korumak için Avusturya'dan kaçmaktan başka yolu kalmadı. Helly bu yolu gerçekleştirerek, muhacir olarak ABD ye sığındı. Helly ve ailesi için yaşam Birleşik Devletlerde de ağır olarak kalmaktaydı. İlk olarak, o, çok yıllar önce Vyanada olduğu gibi özel öğretmen olarak iş bulmaya teşebbüs etti ve 1939 da Einstein'in özel desteği ile New Jersey de olan Monmouth Gençler lisesinde çalışmaya başladı.

Sonraki yıllarda Helly ve eşi Chicago'daki "Signal Corps" da matematikçi olarak çalıştılar. Helly tekrar üniversiteye hazırlananlar için matematikten el kitapları (Handbooks) yazıyor, eşi ise matematik dersi veriyordu. Çikago'da "Signal Corps"da çalıştığı sıralarda ilk kalp krizi geçirdi. O bu krizi atlattı ve işler iyiye gediyor gibi görülmeye başladı. Bu arada İllinoys Teknoloji Enstitüsü'nün Matematik bölüm başkanlığına atanma teklifini aldı. Maalesef, o, bu teklifi değerlendirmeye fırsat bulamadı. Kısa bir süre sonra, 28 Kasım 1943 yılında ikinci kalp krizi sonucu Helly vefat etti.

Helly 1912 de yayımlanmış makalesinde bir takım önemli sonuçlara imza atmıştır. Onlardan birincisi "Helly'nin seçim prensibi" dir ki, buna göre sınırlı değişmeli fonksiyonlar dizisi noktada düzgün sınırlı ve düzgün sınırlı değişmeli ise, bu dizisinin sınırlı değişmeli fonksiyona yakınsak olan bir alt dizisi vardır. Bu makalede olan diğer sonuçlar sonraki yıllarda Helly'ye matematik dünyasında hak ettiği yüksek makamı kazandırmıştır. Onun $C[a,b]$ için ispatladığı Hahn-Banach teoreminin yardımıyla Rietz'in daha önceler ispatladığı $C[a,b]$'de lineer fonksiyonelin genel yapısı hakkındeki meşhur teoremi daha basit ve doğal ispatını bulmuştur. O, aynı zamanda "Düzgün sınırlılık prensibi"ni ilk defa ortaya atan kişi olarak da tarihe geçmiştir.

Helly'nin 1923 yılında "Über Mengen Konvexer Körper mit gemeinshaftiches Punkten" adı altında yayımlanan iki sayfalık bir teoremi, Kombinator Hesabı ve Geometride en çok baş vurulan ve çok sayıda uygulamaları bulunan bir teorem haline geldi. "Helly teoremi" diye adlanan bu teoremin, kolay anlaşılır olması açısından, basit versiyonlarından başlayalım.

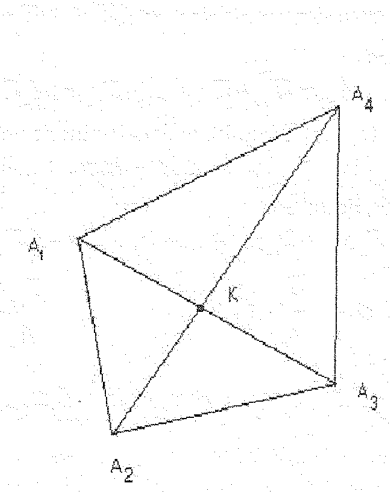
2. Helly teoremleri

Teorem 1. Düzlemde dört tane konveks kümeden her üçlüsünün ortak noktası varsa , hepsinin de ortak noktası vardır.(Özel durumda Helly teoremi)

İspat: Verilen kümeler C_1, C_2 C_3 ve C_4 olsunlar ve K_i ($i = 1,2,3,4$) bu kümelerin C_i dışındaki üçlüsünün arakesiti olsun. Teoremin koşuluna göre K_i ler boş değildir. $A_i \in K_i$ olmak üzere dört nokta alalım. Burada iki olanak vardır.

1) A_4 noktası A_1, A_2, A_3 noktalarının belirlediği üçgenin noktasıdır. A_1, A_2, A_3 noktaları sırasıyla $C_2 \cap C_3 \cap C_4 = K_1$, $C_1 \cap C_3 \cap C_4 = K_2$, ve $C_1 \cap C_2 \cap C_4 = K_3$ arakesit noktaları olduklarından hepsi bu arakesitlerin ortak kümesi olan C_4 ün noktalarıdır. C_4 konveks olduğundan dolayı $\overset{\Delta}{A_1A_2A_3}$ üçgeni ve sonuç olarak onun içinde bulunan A_4 noktası da C_4 ün elemanıdır. Öte yandan $A_4 \in K_4 = C_1 \cap C_2 \cap C_3$ olduğundan , A_4 aynı zamanda C_1, C_2 ve C_3 ün ortak elemanı olmakta, yani $A_4 \in C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 = K_0$ ve dört kümenin arakesiti boş değildir.

2) $A_1A_2A_3A_4$ konveks bir dörtgen olsun. Bu dörtgenin köşegenleri olan $[A_1A_3]$ ve $[A_2A_4]$ ün arakesiti $K = [A_1A_3] \cap [A_2A_4]$ noktasının $C_i (i = 1,2,3,4)$ kümelerinin hepsinin ortak noktası olduğunu gösterelim. Gerçekten A_1 ve A_3 noktaları $C_2 \cap C_4$ konveks kümesinde olduklarına göre $[A_1A_3] \subset C_2 \cap C_4$. Aynı şekilde $[A_2A_4] \subset C_1 \cap C_3$. O halde onların arakesiti olan K noktası hem $C_1 \cap C_3$, hem de $C_2 \cap C_4$ ün elemanı olmakta. Yani $K_0 = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4$ noktası C_i lerin hepsinin ortak noktası olacaktır.



Teorem 2. Düzlemde n tane konveks figürden her üçlüsünün ortak noktası varsa, hepsinin de ortak noktası vardır.(Düzlem için Helly teoremi)

İspat: İspatı tümevarım prensibi ile yapalım. $n \geq 4$ için önermenin doğruluğunu varsayalım ve $n+1$ tane figür için de doğru olduğunu kanıtlayalım. $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n, C_{n+1}$ gibi n+1 tane konveks figür ve bu figürlerin her üçlüsünün boş olmayan arakesiti olduğu verilmiş olsun. $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n \cap C_{n+1}$ olmak üzere n tane küme alalım. Bu figürler de konvekstir ve son kümenin bulunmadığı üçlü arakesitler boş değildir. Fakat Teorem 1'e göre $C_i \cap C_j \cap (C_n \cap C_{n+1})$ biçimindeki üçlü arakesit, Teorem 1'in koşullarını sağlayan dört kümenin arakesiti olduğundan boş değildir. O halde varsayıma göre,

$$C = C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_{n-1} \cap (C_n \cap C_{n+1}) = C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n \cap C_{n+1} = \bigcap_{k=1}^{n+1} C_k$$

kümesi boş değildir.

Teorem 3. m boyutlu uzayda n tane $(n \geq m+1)$ konveks kümenin her $m+1$ tanesinin arakesiti boş değilse onların tümünün arakesiti de boş değildir. (m boyutlu Helly teoremi)

İspat: Tümevarım prensibini kullanalım. Konveks kümeler $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1} (C_k \subset R^m)$ olsun. Teoremin koşullarında bunların her n tanesinin arakesitinin boş olmadığını varsayarak(tümevarım) hepsinin ortak noktaya sahip olduklarını gösterelim. Bu kümelerin C_k hariç geri kalan, n tanesinin arakesiti Q_k olsun. $X_k \in Q_k$, $(X_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{km}))$ alalım. $k = \overline{1, m+1}$ ve $a_k \in R$ ler için aşağıdaki homojen sistemi yazalım

$$\begin{cases} a_1 x_{11} + a_2 x_{21} + \ldots + a_{n+1} x_{n+1,1} = 0 \\ a_1 x_{12} + a_2 x_{22} + \ldots + a_{n+1} x_{n+1,2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 x_{1m} + a_2 x_{2m} + \ldots + a_{n+1} x_{n+1,m} = 0 \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Bu sistemde $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ değişkenlerinin sayısı $n+1$, denklem sayısı $m+1$' den fazla olduğuna göre sistemin her zaman sıfırdan farklı çözümü vardır. Bu çözümlerden birisi $(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{n+1})$ ve bu çözümün negatif olmayan koordinatları $\overline{a}_{i_1}, \overline{a}_{i_2}, \ldots, \overline{a}_{i_s}$, ötekiler ise $\overline{a}_{j_1}, \overline{a}_{j_2}, \ldots, \overline{a}_{j_t}$ olsun. O halde (1) 'in son denkleminden

$$A_+ = \overline{a}_{i_1} + \overline{a}_{i_2} + \ldots + \overline{a}_{i_s} = -(\overline{a}_{j_1} + \overline{a}_{j_2} + \ldots + \overline{a}_{j_t}) = -A_- \qquad (2)$$

olduğu açık. (5) sisteminin ilk m denklemini de vektör biçiminde

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n+1} x_{n+1} = 0 \qquad (3)$$

olarak alırsak, buradan

$$\overline{a}_{i_1} x_{i_1} + \overline{a}_{i_2} x_{i_2} + \ldots + \overline{a}_{i_s} x_{i_s} = -(\overline{a}_{j_1} x_{j_1} + \overline{a}_{j_2} x_{j_2} + \ldots + \overline{a}_{j_t} x_{j_s}) \qquad (4)$$

yaza biliriz. $\alpha_k = \dfrac{\overline{a}_{i_k}}{A_+}$ $(k = \overline{1, s})$ ve $\beta_k = \dfrac{\overline{a}_{j_k}}{A_-}$ $(k = \overline{1, t})$ alırsak, (2) ve (4)'e göre

$$x_0 = \alpha_1 x_{i_1} + \ldots + \alpha_s x_{i_s} = \beta_1 x_{j_1} + \ldots + \beta_t x_{j_t},\ \alpha_k \geq 0, \beta_k > 0,\ \sum_{k=1}^{s} \beta_k = 1,\ (s+t = n+1) \qquad (5)$$

olduğunu tespit ederiz. (5)' a göre x_0 noktası $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}$ noktalarını içeren en küçük konveks kümeye, $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}\}$ 'in konveks örtüsü $Co\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}\}$'ne ait ve aynı zamanda $x_0 \in Co\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t}\}$, yani $x_0 \in C_{j_1} \cap \ldots \cap C_{j_t}$ ve $x_0 \in C_{i_1} \cap \ldots \cap C_{i_s}$. Bu nedenle $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{m+1} C_k$ olacaktır.

3. Helly teoreminin bazı uygulamaları

Problem 1. *Düzlemde her üçlüsünü, yarıçapı 1 olan daire ile örtmek mümkün olan n tane $M_1, M_2, \ldots, M_n$, $(n \geq 3)$ noktaları verilmiştir. Bu noktaların tümünü örten birim dairenin olduğunu ispatlayınız.*

İspat: M merkezli birim dairenin $M_1, M_2, \ldots, M_n$ noktalarını içermesi (örtmesi) için, merkezleri $M_1, M_2, \ldots, M_n$' de olan birim dairelerin M noktasını içermesi hem gerekli hem de yeterlidir. O halde bu problem aşağıdaki gibi ifade edilebilinir.
"Düzlemde merkezleri $M_1, M_2, \ldots, M_n$' de olan birim dairelerin üçer-üçer arakesitleri boş değilse, onların hepsinin arakesitinin boş olmadığını gösteriniz." Bu ise Helly teoreminden başka bir şey değildir. Daireleri $D_1, D_2, \ldots, D_n$ olarak işaretlersek, $D_1 \cap D_2 \cap \ldots \cap D_n \neq \varnothing$ ve her $M \in D_1 \cap D_2 \cap \ldots \cap D_n$ merkezli birim D dairesi, $M_1, M_2, \ldots, M_n$ noktalarının hepsini içerecektir.

Problem 2. (TÜBİTAK BAYG Problem Semineri 96/6, Problem 3) *$n > 2$ olmak üzere, düzlemde n tane farklı $M_1, M_2, \ldots, M_n$ noktaları verilmiş olsun. Bu noktaların ikişer- ikişer birbirinden olan uzaklıklarının en büyüğüne D, en küçüğüne ise d diyelim. Bu durumda $D > \frac{\sqrt{3}}{2} d(\sqrt{n} - 1)$ olduğunu gösteriniz.*

Çözüm.

Bu noktaların her birini merkez alarak, n tane $\frac{\sqrt{3}}{3} D$ yarıçaplı daireler çizelim. Bu dairelerin her üçlüsünün en azından bir kesişme noktası vardır. Helly teoremine göre bu dairelerin hepsinin en az bir ortak noktası olacaktır. Bu ortak nokta merkez alınarak çizilen $\frac{\sqrt{3}}{3} D$ yarıçaplı C dairesi n tane noktanın tümünü örtecektir. n tane noktanın her birini merkez alarak $\frac{d}{2}$ yarıçaplı daireler çizelim. Bu dairelerin birbirlerini örtmezler ve alanları toplamı $n\pi(\frac{d}{2})^2$ dir. $\frac{\sqrt{3}}{3} D + \frac{d}{2}$ yarıçaplı ve merkezi C dairesi merkezi ile çakışık olan bir daire ise bu dairelerin hepsini örtecektir. Buna göre de, $\pi(\frac{\sqrt{3}}{3} D + \frac{d}{2})^2 > n\pi(\frac{d}{2})^2$ ve $\frac{\sqrt{3}}{3} D + \frac{d}{2} > \sqrt{n}\frac{d}{2}$ ve buradan $D > \frac{\sqrt{3}}{2} d(\sqrt{n} - 1)$ elde edilir.

Problem 3. *$n > 2$ olmak üzere, uzayda n tane $M_1, M_2, \ldots, M_n$ farklı noktaları verilmiş olsun. Bu noktaların ikişer- ikişer birbirinden olan uzaklıklarının en büyüğüne D, en küçüğüne ise d diyelim. Bu durumda $D > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} d(\sqrt[3]{n} - 1)$ olduğunu gösteriniz.*

Çözüm. Her ikilisi arasında mesafe D olan dört noktadan (düzgün dörtyüzlünün tepelerinden) geçen sferanın yarıçapı $R=\dfrac{D\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ olduğundan, merkezleri verilen noktalarda ve yarıçapları $R=\dfrac{D\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ olan kürelerin dörder-dörder arakesitleri boş olmayacaktır. O halde üç boyutlu Helly teoremine göre bu kürelerin hepsinin en azından ortak bir M noktası var. O halde merkezi M de ve yarıçapı $R=\dfrac{D\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ olan küre $M_1, M_2, \ldots, M_n$ noktalarının hepsini örtecektir. Merkezleri $M_k\ (k=\overline{1,n})$ noktalarında ve yarıçapları $\dfrac{d}{2}$ olan küreler biribirini örtmezler ve toplam hacimleri $n\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{d}{2}\right)^3=\dfrac{n\pi d^3}{6}$ olacaktır. Öte yandan merkezi M de ve yarıçapı $\dfrac{D\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\dfrac{d}{2}$ olan bir küre bu küçük kürelerin hepsini içerdiğinden $\dfrac{4}{3}\pi\left[\dfrac{D\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}+\dfrac{d}{2}\right]^3>\dfrac{n\pi d^3}{6}$ ve ya $D>\dfrac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\sqrt[3]{n}-1)$ olduğu elde edilir.

Helly teoreminin bir sonraki uygulamasını söylememiz için bazı yardımcı önermelere ihtiyacımız var.

Önerme 1. Çember üzerinde her noktadan düzgün kirişler üçgeninin tepesine kadar olan büyük mesafe küçük mesafelerin toplamına eşittir.

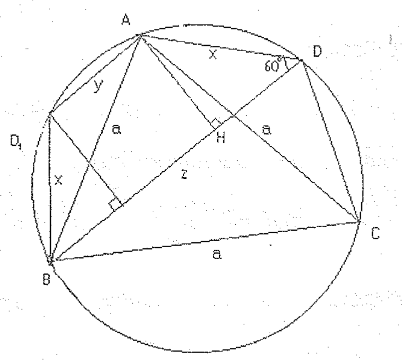
İspat. Şekil 2 ' ye göre

$z=x+y$ (6)

olduğunu gösterelim.

$|BD_1|=x, |AD_1|=y$ $[AH]\perp[AD]$ çizdikten sonra

$z=y+2x\cos 60^\circ=y+x$ olduğu açık.



Şekil 2.

Önerme 2. Bir açısı 120° olan üçgende küçük kenarların x, y uzunlukları ve büyük kenarın a uzunluğu arasında

$$x+y\le\frac{2}{\sqrt{3}}a \qquad (7)$$

bağıntısı vardır.

İspat: Önerme 1'e göre $x+y=z$ ve $z\le 2R=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ olduğundan, $x+y\le\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ olur. Burada R, kenar uzunluğu a olan eşkenar üçgenin çevrel çemberinin yarıçapıdır.

Önerme 3. Düzlemde $[A_1B_1],[A_2,B_2]$ ve $[A_3B_3]$ üç doğru parçası üç noktada kesişiyor ise, düzlemde öyle bir M noktası var ki,

$$\begin{cases} |A_1M|+|MB_1|\le\frac{2}{\sqrt{3}}|A_1B_1| \\ |A_2M|+|MB_2|\le\frac{2}{\sqrt{3}}|A_2B_2| \\ |A_3M|+|MB_3|\le\frac{2}{\sqrt{3}}|A_3B_3| \end{cases} \tag{8}$$

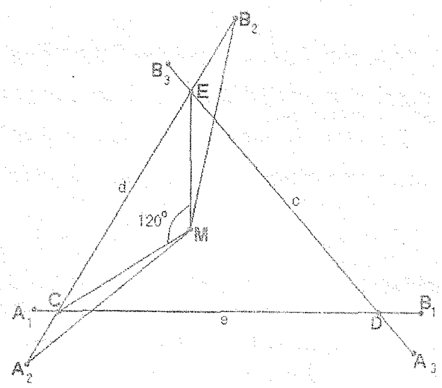
eşitsizlikler sistemini sağlıyor.

İspat: Kesişme noktaları C,D,E olsun. O halde $\overset{\Delta}{CDE}$ üçgeni içerisinde bir M noktası var ki, bu noktadan üçgen kenarları 120° li açı altında görünmektedir. M'in aranan nokta olduğunu gösterelim. Önerme 2'ye göre, örneğin

$$|EM|+|MC|\le\frac{2d}{\sqrt{3}}$$

O halde

$$\begin{aligned}&|A_2M|+|MB_2|\le\\ &\le|A_2C|+|CM|+|ME|+|EB_2|\le\\ &\le\frac{2}{\sqrt{3}}|A_2C|+\frac{2}{\sqrt{3}}d+\frac{2}{\sqrt{3}}|EB_2|=\\ &\frac{2}{\sqrt{3}}(|A_2C|+d+|EB_2|)\end{aligned}$$



Şekil 3.

Sonuç olarak $|A_2M|+|MB_2|\le\frac{2}{\sqrt{3}}|A_2B_2|$ olmakla (8) 'in ikinci eşitsizliği kanıtlanmış oldu. Öteki eşitsizlikler de aynı şekilde doğrulanır.

Problem 4. Düzlemde n tane $[A_k,B_k]$ parçalarından her üçlüsü farklı üç noktada kesişiyor ise, bu düzlemde tüm $[A_kB_k]$ parçaları için

$$|A_kM|+|MB_k|\le\frac{2}{\sqrt{3}}|A_kB_k|,\quad k=\overline{1,n} \tag{9}$$

eşitsizlikler sistemini sağlayan bir M noktası vardır.

İspat: Düzlemde $|A_k X|+|XB_k| \le \frac{2}{\sqrt{3}}|A_k B_k|$ eşitsizliğini sağlayan $X \in R^2$ noktaları, odak noktaları A_k, B_k büyük çapı $\frac{2}{\sqrt{3}}|A_k B_k|$ olan bir elipsin noktasıdır. Önerme 3' e göre problemin koşullarında bu elipslerinden keyfi üç tanesinin ortak noktası var. O halde Helly teoremine göre bunların hepsinin de ortak bir M noktası var ki, bu nokta her $k = \overline{1,n}$ için (9) eşitsizliğini sağlayacaktır.

Bu yazıyı Helly teoremi ile bağlantılı aşağıdaki problemlerle sonlandıralım.

Problem 5. Uzayda n tane $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$ yarıçaplı küreler verilmiş ve öyle bir düzlem var ki, kürelerin bu düzlem üzerindeki izdüşümlerinin her üçlüsü ortak noktaya sahiptir. Bu kürelerin hepsini aynı anda kesen bir doğru olduğunu gösteriniz ve bu kürelerin hepsini içine alan en küçük yarıçaplı silindiri bulunuz.

Problem 6. n boyutlu Öklit uzayında $s > n$ olmak üzere s tane $M_1, M_2, \ldots, M_s$ noktaları veriliyor. Bu noktaların ikişer-ikişer bir-birinde olan uzaklıklarının en küçüğü d, en büyüğü D ise

$$D > d\sqrt{\frac{n+1}{2n}}(\sqrt[n]{s}-1)$$

olduğunu ispatlayınız.

Kaynaklar:

1. E.Helley, Über Mengen Konvexer Körper mit gemeinschaftliches Punkten. *Jber.DMV* 32(1923), 175-176.
2. V.Klee, B. Grünbaum and L. Danzer , Helly's teorem and its relatives, 1963.
3. O.Kallenberg, Foundation of Modern Probablity, Springer, 1997.
4. A.Brieden, P.Gritzman. On Helly's theorem: Algorithms and extensions" Discrete &Computational Geometry, 17,(1997), 393-410.
5. D.Avis and M.E.Houle, Computational aspects of Helly's theorem and its relatives. Proc. 2nd Canadian Conf. On Computational Geometry. Ottava, Kanada, Aug. 1990, 20-23
6. V.V.Prosalov. Zadachi po planimetrii, Cilt 2, Nauka, Moskova, 1986
7. http://www.nrich.maths.org/mathsf/journalf/aams/971.html/
8. http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Helly.htm

...*MATE*(RO)*MA*(N)*TİK*...

MATEMATİK

Matematik bir umman, uçsuz bucaksız deniz.
Sayılar nerde başlar, nerde biter bilmeyiz.
Bir ömrü dolu dolu yaşasak da onunla,
Noktayı biraz geçer, çizgiye gelemeyiz.

$(a_n) \to a$, $AÇI/3 =?$

Limite epsilonla yaklaştık gelemedik.
Sıfırı anladık da, sonsuzu bilemedik.
Bir açıyı ikiye, dörde, sekize böldük,
Pergel ve cetvelle üç eşe bölemedik.

π, e

Dairenin gizemi bilinir ki (π) dedir.
Daireyi kareye çevirmezse (π) nedir?
Birisi bir gün çıkıp, belki şöyle diyecek:
Matematiğin sırrı ne (π) de, ne (e) dedir.

$2, 3, 5, \ldots, 19, \ldots 1999, \ldots$

Bunlar nasıl sayılar, her biri birer sorun,
Bugün formül çıkmadı belki bulurlar yarın (!)
Hangi tek sayı asal, hangi tek sayı değil,
Yoksa, kuralı yok mu bu garip sayıların.

FERMAT

a, b, c tamsayıysa a^3 ile b^3 ün
Toplamını c^3 e eşitlemek ne mümkün
On yedinci yüzyılda kendisi çözmüş müydü?
Fermat'ın teoremi hala ortada bugün.

(Bu dörtlükler, matematik öğretmeni Mustafa Töngemen tarafından hazırlanan PROBLEM PROBLEMLER adlı kitapçıktan uyarlanmıştır.)