EKMEKÜSTÜ MARGARİN PROBLEMİ VE ARA DEĞER TEOREMİ

Rafail Alizade
İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Gülbahçeköyü, Urla, İZMİR
e-mail: alizade@likya.iyte.edu.tr
Sedaget Mürvetova
Nesimi Bölgesi Eğitim Şubesi Matematik Bölümü, Bakü, AZERBAYCAN
Halide Sadıgova
247 sayılı okul, Nesimi Bölgesi, Bakü, AZERBAYCAN

Black and blue
And who knows which is which and who is who
Up and Down
And in the end it's only round and round and round
Pink Floyd, "The Dark Side of the Moon" albümünden

1. Giriş

Birçok bilimsel icatların ilginç tarihçelere sahip oldukları bilinmektedir (Arşimet'in banyo yaparken suyun kaldırma ilkesini bulması, Newton'un başına elma düşmesi ile yerçekimi kanununu ortaya çıkarması, Kepler'in, şarap fıçılarının hacminin hesaplanması için integrali icat etmesi v.s. gibi). Biz bu tarihçelerin gerçekleri ne kadar yansıttığını bilmiyoruz, sadece analizin en önemli sonuçlarından olan "Ara Değer Teorimi"nin, araştırıp sizlere sunduğumuz aşağıdaki öyküsünün yüzde yüz gerçek olduğunu söyleyebiliriz! Tarihi gerçeklerin ortaya çıkarılmasında bize yardımcı olan Dokuz Eylül Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü araştırma görevlisi Engin Mermut'a teşekkür ederiz.

2. Karadeniz'den Fransa'ya

Yıl 1801... Reklamlardan etkilenen Temel ve İdris kardeşler, ekmeküstü margarini çok seviyorlardı. Fakat anneleri Fadime hanımın, üzerine margarin sürmüş olduğu kocaman Trabzon ekmeği dilimini bir türlü paylaşamıyorlardı. Çünkü ekmeği bıçakla tam yarıya böldüklerinde, birine daha az margarin geliyordu. Margarin kısımları tam eşit olacak şekilde böldüklerinde de, ekmek kısmı eşit olmuyordu. Babaları Dursun Bey "Bu problemi bir matematikçiye soralım" dedi. Fadime hanım, "Sorarsan sor" dedi, "Matematikçilerin söyledikleri hep doğru çıkar, ama bu doğrular kimsenin işine yaramaz." Dursun Bey, anası ve babası ile birlikte Ben de Niz'e[1] sattığı Dünya'nın[2] parası ile Fransa'nın yolunu tuttu. Hava limanında bir taraftan "Paris, Paris! Hemen kalkıyoruz" diye yolcu arayan, diğer taraftan da elindeki çift ekmekten yapılmış sandviçi bir an önce bitirmeye çalişan gözlüklü birisi dikkatini çekti. Sandviçini kimseyle paylaşmadığı için bir problem yaşamayan gözlüklü muavin Dursun Bey'i "Engin&Engin&Rough" şirketinin zaman makinesine götürdü. Makinenin arkasında "Allahım, ben niye mutlu olmadım!", "Bir sana, bir de sabah uykusuna doyamadım" gibi kamyon edebiyatı incileri yazılmıştı. İçeriye girince makinenin önünde "Bana baba diyebilirsiniz, hatta babaların babası da diyebilirsiniz, bunlar da benim evlatlarım sayılır" yazısını ve yazının da altında Süleyman Demirel'in, Müslüm Gürses'in ve Orhan Gencebay'ın resimlerini gördü. Bu arada görüntülü telefonla görüşen şoför Engin Baba, görüşmesini bitirdikten sonra "Patron aradı, bir saat sonra Gülbahçe'de olmam gerekiyor. Paris'e uğrayıp hemen dönelim" dedi. Sonra yolculara iyi yolculuklar, bol şanslar ve bol tümleyenler[3] dileyerek makineyi çalıştırdı. Dursun Bey yolculuk sırasında Türkiye'den dönen Fransa

[1] Ünlü Şarkıcı Ben Deniz'in atalarından.

[2] İlk elden edindiğimiz bilgilere göre bu yakınlarda dünyanın ana ve babası 200 senelik bir aradan sonra yeniden el değiştirmiştir.

[3] Modül Teorisinde bir terimdir: ingilizcesi: amply supplements.

heyetiyle tanıştı. Bunlar Fransa'nın Osmanlı Devleti'ne olan borçlarının ertelenmesi ve kapütalasyon uygulamasının bir az daha uzatılması için Osmanlı padişahına ricada bulunmak için Türkiye'ye gelmişlerdi ve padişahtan olumlu sinyaller aldıkları için çok mutlu görünüyorlardı. Fransa'ya gelince hemen Dursun Bey'i en ünlü matematikçilerinden Bolzano'ya götürdüler. Bolzano'nun manastırdaki yazıhanesine girince duvardaki bir yazı Dursun Bey'in dikkatini çekti: "Tanrının verdiğinin beşte birini bana ver, tanrı da bana verdiğinin iki mislini sana versin." Dursun Bey kısa bir hesaptan sonra "Amma da uyanık, tanrının verdiğinden %25 komisyon istiyor[4]" diye düşündü ve durumu Bolzano'ya anlattı. O da problemin matematik dilinde yorumunu yaptı:

Problem 1. *(Ekmeküstü Margarin Problemi)* Düzlem üzerinde verilen iki sınırlı bölgenin her birinin alanını tam yarıya bölen bir doğru bulunur mu?

Dursun Bey bundan bir şey anlamadı, sadece içinde: "Bu problem yorumla çözülebilseydi Mustafa abi'ye[5] götürürdüm: kendisi müzikte ve evlilik konusunda çok güzel yorumlar yapar" dedi.

Bolzano önce daha basit bir problemi çözmeye karar verdi:

Problem 2. Düzlem üzerinde verilen sınırlı bir bölgenin alanını tam yarıya bölen bir doğru bulunur mu?

Bunu Dursun Bey'e sordu:

- Sadece ekmek dilimi olsaydı ne yapardınız?

- Bundan kolay ne var ki?! Bıçağı ekmek dilimi üzerinde yavaş yavaş kaydırırız, ekmek tam yarıya bölündüğü anda keseriz.

Bundan sonra Dursun Bey Trabzon'a döndü. Bolzano da onun bu fikrini genelleştirerek aşağıdaki teoremi verdi.

Teorem 1. (*Ara Değer Teoremi*) Bir sürekli fonksiyon aldığı iki değer arasındaki tüm değerleri alır.

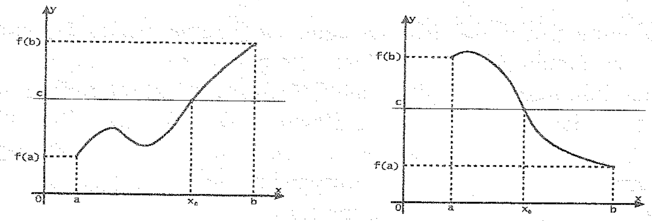
Başka bir deyişle, $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise, $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki her c sayısı için $f(x_0) = c$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in [a,b]$ bulunur.

Sürekli fonksiyon kavramının ciddi tanımı ve bu teoremin kanıtı analiz kitaplarında bulunur (örneğin, [1], [2]), biz sadece teoremin (kanıtın değil) grafik üzerinde açıklamasını veriyoruz. Genç okurlarımıza Ara Değer Teoremi'nin kitaplardaki ispatını incelemelerini tavsiye ediyoruz. Sürekli fonksiyon, kabaca, değişkenin çok az bir değişiminde, çok az değişen fonksiyondur; grafiği, kalemi kağıttan ayırmadan çizilebilir bir fonksiyon olarak düşünülebilir (gerçi birçok sürekli fonksiyonların grafiğini çizmek bile imkansızdır, ama şimdilik bu konuya girmeyelim).

Aşağıdaki (Şekil 1) her iki grafikten de görüldüğü gibi $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarından biri $y = c$ doğrusunun alt tarafında, diğeri de üst tarafında bulunduğundan bu noktaları birleştiren eğri ($y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği) $y = c$ doğrusunu bir $(x_0, f(x_0)) = (x_0, c)$ noktasında kesecek ve böylece $f(x_0) = c$ olacaktır.

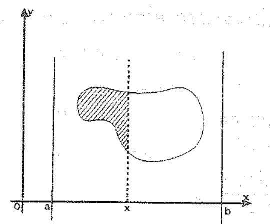
[4] Neden %20 değil de %25 olduğunu düşünün!

[5] Ünlü türkücü Mustafa Topaloğlunun atalarından.

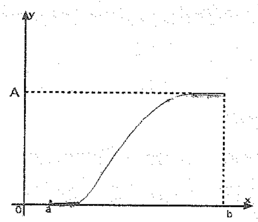


Şekil 1

Problem 2'ye gelince, alanı A olan sınırlı bölgeyi xy düzlemine yerleştirelim. Bölge $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalacak şekilde, a ve b sayılarını alalım. Her $d \in [a, b]$ için bölgenin $x = d$ doğrusundan solda kalan kısmının alanını $f(d)$ ile gösterelim. O halde $f(x)$ sürekli bir fonksiyon olacaktır (biz, bölgenin sınırlarının düzgün olduğunu kabul edeceğiz, gerçi "düzgün" kelimesinin de ciddi tanımlanması gerekmektedir[6]).



Şekil 2a



Şekil 2b

Şekil 2'de $f(x)$ taralı alanı göstermektedir. $f(a) = 0$ ve $f(b) = A$ olduğundan, $0 < \frac{A}{2} < A$ için $f(x_0) = \frac{A}{2}$ olacak şekilde bir $x_0 \in (a, b)$ bulunur. Böylece $x = x_0$ doğrusu bölgenin alanını tam yarıya bölecektir.

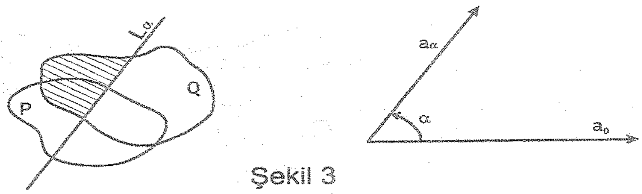
Problem 2'de koordinat sistemini istediğimiz şekilde seçebileceğimiz için aşağıdaki önermenin doğru olduğunu söyleyebiliriz.

Önerme. Düzlem üzerinde bir bölge ve bir l doğrusu verilmişse, bölgenin alanını yarıya bölen ve l'ye paralel olan bir l_1 doğrusu bulunur.

Şimdi Problem 1'e dönelim. Düzlem üzerinde P ve Q bölgeleri verilmiş olsun. Bir $\vec{a_0}$ vektörü alalım. $\vec{a_0}$ vektörüne paralel olan ve P'nin alanını tam yarıya bölen bir l_0 doğrusu bulunur. Q bölgesinin l_0 doğrusundan soldaki ($\vec{a_0}$ vektörü yönünde baktığımızda) kısmının alanı A_0 olsun. $\vec{a_0}$ vektörünü α açısı kadar saat yönüne ters yönde döndürerek elde ettiğimiz vektörü $\vec{a_\alpha}$ ile gösterelim. P'nin alanını tam yarıya bölen ve $\vec{a_\alpha}$' vektörüne paralel olan bir l_α doğrusu bulunacak. Q bölgesinin l_α doğrusundan solda kalan kısmının (Şekil 3'deki taralı bölgenin) alanını A_α ile gösterelim.

Şimdi her $\alpha \in [0, \pi]$ için $f(\alpha) = A_\alpha$ olarak tanımlanarak elde edilen f fonksiyonunun, α açısının ufak bir değişimi durumunda az bir değişime uğrayacağını görürüz, yani f sürekli bir fonksiyondur. Q bölgesinin alanı A ise, $f(\pi)$, Q bölgesinin taralı olmayan kısmının alanına eşit olacak, yani $f(\pi) = A - A_0$'dır. O halde $A_0 \leq \frac{A}{2} \leq A - A_0$ veya $A - A_0 \leq \frac{A}{2} \leq A_0$ olacak ve Ara Değer Teoreminden $f(\alpha_0) = \frac{A}{2}$ sağlanacak şekilde bir $\alpha_0 \in [0, \pi]$ bulunacak. Bu da l_{α_0} doğrusunun Q bölgesinin alanını tam yarıya böleceği anlamına gelir.

[6] Örneğin sürekli kapalı bir eğri düzgün sayılabilir



Şekil 3

3. Sabit Nokta Teoremi, Derecesi Tek Olan Polinomlar ve Başka Uygulamalar

Tanım. $f : A \to A$ bir fonksiyon olsun. Bir $a \in A$ için $f(a) = a$ ise, a'ya f fonksiyonunun sabit noktası denir. Bazı A kümeleri ve f fonksiyonları için en az bir sabit noktanın var olması gösterilebilir, bu da matematikte birçok problemin çözümünde rol oynuyor. Böyle durumlardan biri aşağıda verilmiştir.

Teorem 2 *(Sabit Nokta Teoremi).* Her $a < b$ sayıları için her sürekli $f : [a, b] \to [a, b]$ fonksiyonunun en az bir sabit noktası bulunur.

Kanıt. $f(x)$ sürekli olduğundan $g(x) = f(x) - x$ şeklinde tanımlanan $g : [a, b] \to R$ fonksiyonu da süreklidir. $a \leq f(a) \leq b$ ve $a \leq f(b) \leq b$ olduğundan, $g(a) = f(a) - a \geq 0$ ve $g(b) = f(b) - b \leq 0$ dır. Ara Değer Teoreminden $g(x_0) = 0$ olacak şekilde bir $x_0 \in [a, b]$ bulunur. O halde $f(x_0) = x_0$'dır, yani x_0 bir sabit noktadır.

Not 1. (a, b) açık aralıkları için Sabit Nokta Teoremi geçerli değildir. Örneğin $f(x) = \frac{x}{2}$ şeklinde tanımlanan sürekli $f : (0, 1) \to (0, 1)$ fonksiyonunun sabit noktası bulunmamaktadır, çünkü her $x \in (0, 1)$ için $\frac{x}{2} \neq x$ dir.

Not 2. Sabit Nokta Teoremi kapalı daire, küre ve genellikle R^n de $(n - 1)$ boyutlu kapalı küre için de doğrudur, fakat bunlar için bilinen kanıtlar cebirsel topoloji bilgilerine dayanmaktadır.

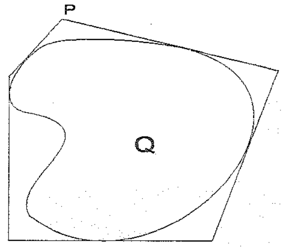
Ara Değer Teoreminin bir başka uygulaması da gerçel katsayılı tek dereceden polinomlarla ilgilidir.

Teorem 3. Katsayıları gerçel sayılar olan ve derecesi tek olan her polinomun en az bir gerçel kökü bulunur.

Kanıt. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$, n tek bir pozitif tamsayı ve tüm a_i'ler $(i = 1, 2, ..., n)$ gerçel sayılar olsun. $a_n > 0$ olduğunu varsayalım ($a_n < 0$ durumu benzer şekilde incelenir). x değişkeni ∞'a giderken, x^n sayısı $x^{n-1}, ..., x$ e göre çok daha hızlı büyüdüğünden, yeterince büyük bir b sayısı için $p(b)$ sayısı $a_n x^n$ ile aynı işarete sahip olacak, yani $p(b) > 0$ olacaktır. Aynı şekilde, n tek sayı olduğundan yeterince küçük (mutlak değerce büyük) bir a sayısı için $p(a) < 0$ olacak. O halde Ara Değer Teoreminden $p(x_0) = 0$ olacak şekilde bir $x_0 \in (a, b)$ bulunacak, yani x_0 sayısı $p(x)$ polinomunun bir köküdür.

Şimdi Ara Değer Teoreminin başka bir geometri problemine uygulamasını verelim.

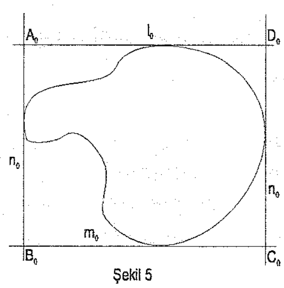
Tanım. Düzlem üzerinde verilen bir Q bölgesi bir P çokgeninin içerisinde ise ve P çokgeninin tüm kenarlarının Q bölgesi ile en az bir ortak noktası bulunuyorsa, P çokgenine Q bölgesinin çevrel çokgeni diyeceğiz (şekil 4)



Şekil 4

Problem 3. Düzlem üzerindeki her bölgenin bir çevrel karesi bulunur mu?

Çözüm. Bir $\vec{a_0}$ vektörü alalım. Öteleme yardımıyla $\vec{a_0}$ vektörüne paralel olan, Q bölgesi ile ortak noktaları bulunan ve Q bölgesini aralarına alan iki l_0 ve m_0 doğrularını bulabiliriz (şekil 5)



Şekil 5

Aynı şekilde $\vec{a_0}$ vektörüne dik olan, Q ile ortak noktaları bulunan ve Q bölgesini aralarına alan iki k_0 ve n_0 doğruları bulunur. Böylece Q bölgesinin bir çevrel $A_0B_0C_0D_0$ dikdörtgeni bulunur. Problem 1'in çözümündeki gibi $\vec{a_0}$ vektörünü α açısı kadar döndürerek elde ettiğimiz vektörü $\vec{a_\alpha}$ ile gösterelim. $\vec{a_0}$ yerine $\vec{a_\alpha}$ aldığımızda elde ettiğimiz çevrel dikdörtgeni $A_\alpha B_\alpha C_\alpha D_\alpha$ ile gösterelim. Her $\alpha \in [0, \frac{\Pi}{2}]$ için $f(\alpha) = |A_\alpha B_\alpha| - |B_\alpha C_\alpha|$ alarak sürekli bir $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to R$ fonksiyonu elde ederiz. $A_{\frac{\pi}{2}} = B_0$; $B_{\frac{\pi}{2}} = C_0$; $C_{\frac{\pi}{2}} = D_0$ olduğundan $f(\frac{\pi}{2}) = |B_0C_0| - |C_0D_0| = -f(0)$ elde ederiz. Dolayısıyla ya $f(\frac{\pi}{2}) \leq 0 \leq f(0)$ ya da $f(0) \leq 0 \leq f(\frac{\pi}{2})$'dir. O halde Ara Değer Teoreminden $f(\alpha_0) = 0$ olacak şekilde bir $\alpha_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ bulunur. Bu durumda $|A_{\alpha_0}B_{\alpha_0}| = |B_{\alpha_0}C_{\alpha_0}|$ olduğu ortaya çıkar. Yani $A_{\alpha_0}B_{\alpha_0}C_{\alpha_0}D_{\alpha_0}$ dikdörtgeni Q bölgesinin bir çevrel karesi olur.

V. TÜBİTAK Matematik Olimpiyadı birinci aşama sınavında (1997) çıkmış olan aşağıdaki sorunun çözümünde Ara Değer Teoremi kullanılmaktadır:

Soru. $x^3 - 7x + 1 = 0$ denkleminin varsa, pozitif köklerinin (çarpma işlemine göre) terslerinin toplamını S ile gösterirsek, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $\frac{13}{2} < S < 7$ B) $7 < S < \frac{15}{2}$ C) $S = 7$ D) Denklemin pozitif kökü yoktur. E) Hiçbiri

Çözüm. Vieta Teoreminden köklerin çarpımı -1, toplamı 0 olduğundan, varsa iki pozitif, bir negatif kök bulunur. $p(x) = x^3 - 7x + 1$ polinomu için $p(0) > 0$, $p(1) < 0$; $p(3) > 0$; $p(-3) < 0$, $p(-2) > 0$ olduğundan Ara Değer Teoreminden dolayı $(0,1)$; $(1,3)$; $(-3,-2)$ aralıklarında birer kök bulunur. Kökleri $x_1 < x_2 < x_3$ ile gösterirsek,

$$S = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_3}{x_1x_2x_3} + \frac{x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \frac{7 - x_2x_3}{-1} = 7 + \frac{-1}{x_1}$$

elde ederiz. $x_1 < -2$ olduğundan, $7 < 7 - \frac{1}{x_1} < \frac{15}{2}$ elde edilir. Cevap B şıkkıdır.

4. Ekmeküstü Margarin Probleminin Son Çözümü

Dursun Bey Fransa'dan gelen çözüme ilk önce sevindiyse de, Fadime hanımın haklı olduğunu anladı, çünkü sadece çözümün varlığı kanıtlanmıştı, çözümün nasıl bulunacağı ise gösterilmiyordu. Dursun Bey ve çocukları, üzerine margarin sürülmüş olan ekmek dilimini alıp, Nasreddin Hocaya giderek durumu anlattı. Hoca herkesin haklı olduğunu belirttikten sonra bıçağı Temel'e verip ekmeği iki eşit parçaya bölmesini istedi. Sonra İdris'ten bu parçalardan birisini seçmesini istedi. Diğer parçayı da Temel'e verdi. Böyle olunca Temel dağıtımdan memnun kalmadığını söyleyemedi, çünkü seçimi kendisi yapmıştı. Böylece kardeşlerin uzun süren (ekmek) kavgası sona ermiş oldu.

5. Alıştırmalar

1. Problem 1'in çözümündeki P ve Q bölgeleri paralelkenar şeklinde ise, l_α doğrusu hakkında ne söylenebilir?

2. Çember üzerinde bulunan ve çemberin merkezine göre birbirine simetrik olan iki noktaya *karşı noktalar* diyelim. Her an dünya ekvatoru üzerinde, sıcaklıkların aynı olduğu iki karşı nokta bulunduğunu gösteriniz.

3. Düzlem üzerindeki bir bölgeyi, alanları birbirine eşit dört parçaya ayıran ve birbirine dik olan iki doğru bulunduğunu gösteriniz.

(İpucu: Bölgenin alanını yarıya bölen bir l doğrusu ve buna dik olup bölünmüş alanlardan birini yarıya bölen m doğrusu alarak, Problem 1'in çözümündeki gibi doğruları π açısı kadar döndürünüz).

4. Düzlem üzerindeki bir bölgenin hem alanını, hem de çevresini yarıya bölen bir doğru bulunduğunu gösteriniz.

5. Düz olmayan bir zemin üzerindeki dört ayaklı tabure döndürülerek tüm ayaklarının yere oturması sağlanabilir. Kanıtlayınız. (Bunu mutfaktaki tabureniz üzerinde deneyebilirsiniz).

6. $\mathbf{R}$ gerçel sayılar kümesi olmak üzere sürekli bir $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fonksiyonu için $f(x) = x$ denkleminin çözümü yoksa $f(f(x)) = x$ denkleminin de çözümünün bulunmadığını gösteriniz.

(İpucu: $g(x) = f(x) - x$ fonksiyonuna Ara Değer Teoremini uygulayınız.)

7. $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ açık dairesi için Sabit Nokta Teoreminin geçerli olmadığını, yani her $x \in D$ için $f(x) \neq x$ olacak şekilde sürekli bir $f : D \to D$ fonksiyonunun bulunduğunu gösteriniz.

8. Düzlem üzerindeki her bölgenin, dar açısı 30^o olan eşkenar dörtgenden oluşan bir çevrel çokgeni bulunduğunu gösteriniz.

KAYNAKLAR

[1] Chinn W.G., Steenrod N.E: First Concepts of Topology, New York, 1965.

[2] Spivak: Calculus, M $\oplus$ V yayınları, 1997.

[3] Edwards &Penney: Matematik Analiz ve Analitik Geometri, Çeviri:Ömer Akın,2001.