YOĞUN KÜMELERE İLİŞKİN BİR NOT

Nurettin Ergun-Cavit Hafızoğlu
İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü, İSTANBUL

Usta Alman Matematikçi Dirichlet' in 1820' lerde gözlemlediği şu yalın ama önemli gerçek daha önce bu dergide yayımlanan iki yazıda ele alınmıştı, bkz[1],[2]. x_0 gerçel sayısı herhangi bir irrasyonel sayı olsun. Bu takdirde

$$A_{x_0} = \{kx_0 + m : k, m \in Z\}$$

alt kümesi, tüm gerçel sayılar kümesinde **yoğundur**, başka bir deyişle herhangi iki x, y gerçel sayısı verildiğinde bu kümenin en az bir (ve aslında sonsuz sayıda) elemanı x ile y arasında yer alır . Bu kısa yazıda, x_0 herhangi bir irrasyonel sayı olmak üzere, daha özel bir küme olan

$$B_{x_0} = \{nx_0 + k : n \in N, k \in Z\}$$

alt kümesinin (ve ayrıca $C_{x_0} = \{-nx_0 + k : n \in N, k \in Z\}$ kümesinin de) yoğun olma niteliğini haiz olduğunu göstereceğiz. Bu yazıyı sağlıklı biçimde kavrayabilmek için yukarıda sözü edilen yazıları okumuş olmak kesinlikle gerekmemektedir. Iyi bilindiği gibi 0,1,-1,2,-2,... özel rasyonel sayılarına tam rasyonel sayılar yada kısaca **tam sayılar** denir, onların kümesi Z işareti ile tüm pozitif tam sayıların kümesi ise N ile gösterilip elemanlarına kısaca **doğal sayılar** denir. Yine iyi bilindiği gibi, herhangi bir x gerçel sayısının $[x]$ işareti ile gösterilen tam kısmı, x den büyük olmayan tüm tam sayıların en büyüğüdür. Her gerçel sayıdan büyük olan en az bir doğal sayının varlığını güvence altına alan ünlü **Arşimed İlkesi** (bu aslında kanıtlanabilen bir önermedir ama, gerçel sayıların aksiyomatik, sağlıklı ve uzunca süren bir inşasının sonunda kanıtlanabilen bir bilgidir ve bu uzun süren inşayı değil lise, üniversite yıllarında bile eksiksiz ve gereği gibi ayrıntılarıyla yapmayı göze alamayanlar tıpkı bu yazıda bizim şimdi yaptığımız gibi bu olağanüstü bilgiyi, kestirmeden tepeden inme bir ilke olarak söyleyip geçiverirler.), evet bu ünlü ilke gereği, herhangi bir x gerçel sayısı için $-x < n$ ve dolayısıyla $-n < x$ gerçekleyen bir n doğal sayısının varlığını çıkarmış oluruz. Elbette n doğal sayısından büyük olan tüm k doğal sayıları için $-k < x$ yani $-k \in (-\infty, x] \cap Z$ geçerli olur. Demek ki her x gerçel sayısı için $(-\infty, x]$ aralığında bulunan tam sayıların kümesi boş değildir ve üstelik sonsuz elemanlıdır. İşte boş olmayan bu $(-\infty, x] \cap Z$ kümesinin x gerçel sayısı ile üstten sınırlandığını yani her $k \in ((-\infty, x] \cap Z)$ için $k \leq x$ gerçekleştiğini gözlemek güç değildir. Gerek, doğal sayıların boş olmayan her alt kümesinin bir en küçük elemanının var olduğunu söyleyen önerme, gerek tam sayıların boş olmayan ve üstten sınırlı her alt kümesinin bir en büyük elemanının var olduğunu söyleyen önerme eşdeğerdirler ve ünlü **Tümevarım İlkesi** yardımıyla kolayca kanıtlanabilirler. İşte bu nedenledir ki $(-\infty, x] \cap Z$ kümesinin en büyük elemanı, elbette bu kümeye aittir ve $[x]$ işareti ile gösterilen bu tam sayı, dolayısıyla hem $[x] \leq x$ ve hem de $x < [x] + 1$ eşitsizliklerini gerçekler.$[x] + 1$ tam sayısının $(-\infty, x] \cap Z$ kümesine ait olmayacağı apaçıktır, aksi halde $[x] + 1$ tam sayısının, boş olmayan bu kümeye ait olup, bu kümenin en büyük elemanından büyük olmayacağı için $[x] + 1 < [x]$ gibi kesinkes olanaksız bir sonuçla karşı karşıya kalırdık. Demek ki her x gerçel sayısının tam kısmı $[x] \leq x < [x] + 1$ gerçekler. O halde $\forall x \in R$ için $0 \leq x - [x] < 1$ buluruz. İşte negatif olmayan bu sayıya x in **ondalık kısmı** denir ve genellikle (x) işareti gösterilir. Demek ki $x = [x] + (x)$ ve $0 \leq (x) < 1$ bilgileri her x gerçel sayısı için geçerlidir. Şunu gözlemek de kolaydır: x'in irrasyonel olabilmesi için gerek ve yeter koşul onun ondalık kısmının irrasyonel olmasıdır. Şunları da kolayca gözleriz: k herhangi bir tam sayı ve $0 \leq \varepsilon < 1$ ise $[k + \varepsilon] = k$ ve dolayısıyla $(k + \varepsilon) = k + \varepsilon - [k + \varepsilon] = \varepsilon = (\varepsilon)$ bulunur. O halde yine kolayca, her $x \in R$, ve her $k \in Z$ için $(x \mp k) = (x)$ ve $(kx) = (k(x))$ temel ve önemli eşitliklerini gözlemek güç değildir, örneğin ikincisi için $kx = k[x] + k(x)$ gerçeklendiği ve $k[x]$ in bir tam sayı olduğunu gözlemek yeterli olacaktır. Üstelik herhangi bir k tam sayısı verildiğinde $k \leq x < y < k + 1$ gerçekleyen herhangi x ve y gerçel sayıları için (böyle gerçel sayılara aynı bir tam kısım aralığına düşen gerçel sayılar denir, çünkü $[x] = [y] = k$ gerçekleşmektedir), evet bu koşulu gerçekleyen x ve y gerçel sayıları için $(x) = x - [x] < y - [x] = y - [y] = (y)$ geçerlidir, kısacası aynı bir tam kısım aralığında yer alan gerçel sayılar için ondalık kısımlar kesin artandır. Evet şimdi şu temel önermeyle başlayalım.

Önerme 1: Herhangi bir $0 < \varepsilon < 1$ irrasyonel sayısı için öyle uygun bir n doğal sayısı vardır ki

$$3 \leq n \text{ ve } (\varepsilon) < (n\varepsilon)$$

gerçekleşir.

Kanıtlama: Kanıtlama boyunca, çarpım işlemi için olan parantezler, ondalık kısım için kullanılanlarda ayırt edilebilsin diye, $\{,\}$, ile gösterilecektir. Gerçekten eğer $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ise $2 < \frac{1}{\varepsilon} < [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 = n$ ve $3 \leq n$ olduğu üstelik $1 < n\varepsilon = \varepsilon\{\frac{1}{\varepsilon} + 1\} = 1 + \varepsilon < 1 + \frac{1}{2}$ olduğu ve ayrıca $1 < 1 + \varepsilon < n\varepsilon + \varepsilon = \{n+1\}\varepsilon < n\varepsilon + \frac{1}{2} < 2$ gerçeklendiği kolayca gözlenir. O halde $[1, 2)$ tam kısım aralığında yer alan $1 + \varepsilon$ ve $\{n+1\}\varepsilon$ gerçel sayıları için yukarıda söylenenler nedeniyle, $n' = n + 1$ doğal sayısını tanımlayarak hem $4 \leq n'$ ve hem de $(\varepsilon) = (1 + \varepsilon) < (n'\varepsilon)$ buluruz. Aman dikkat: ε pozitif gerçel sayısının irrasyonel oluşu nedeniyle $\frac{1}{\varepsilon}$ irrasyoneldir ve dolayısı ile $[\frac{1}{\varepsilon}] < \frac{1}{\varepsilon}$ geçerlidir; bu nedenledir ki yukarıda $\varepsilon\{[\frac{1}{\varepsilon}] + 1\} < \varepsilon\{\frac{1}{\varepsilon} + 1\}$ yazılmıştır, okuyucunun bu ayrıntıyı gözden kaçırmaması gereklidir. Evet ε irrasyonel sayısı için şimdi son seçeneği yani $\frac{1}{2} < \varepsilon < 1$ gerçeklendiği durumu irdeleyelim. Bu durumda da $1 < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < [\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}] + 1 = m (\in N)$ ve $2 \leq m$ gözleriz.Üstelik $m < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} + 1 = \frac{1}{1-\varepsilon}$ ve sonuçta $m - 1 < m\varepsilon$ ve ayrıca $\varepsilon < \frac{m}{m+1}$ nedeniyle $m - 1 < m - 1 + \varepsilon < m\varepsilon < m\varepsilon + \varepsilon = \{m+1\}\varepsilon < m$ bulunur. $3 \leq m' = m + 1$ doğal sayısı yardımıyla bu kez de $(\varepsilon) = (m - 1 + \varepsilon) < (m'\varepsilon)$ bulunur. Bitti!

Önerme 2: Herhangi bir sabit x_0 irrasyonel sayısına karşılık öyle bir kesin artan

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$$

doğal sayılar dizisi vardır ki

$$0 < (n_1 x_0) < (n_2 x_0) < \ldots < (n_k x_0) < (n_{k+1} x_0) < \ldots < 1$$

gerçekleşir.

Kanıtlama: Bir önceki önerme nedeniyle, herhangi bir n_1 doğal sayısıyla işe başlarsak , pozitif $(n_1 x_0)$ ondalık kısmı bir irrasyonel sayı olup, buna karşılık öyle bir $3 \leq m_1 \in N$ vardır ki $(n_1 x_0) < (m_1 (n_1 x_0)) = (m_1 n_1 x_0)$ bulunur. Dikkat: $n_1 x_0$ gerçel sayısı irrasyonel olduğu için ondalık kısmı asla sıfır rasyonel olmayacaktır. O halde $n_2 = m_1 n_1$ doğal sayısı sayesinde hem $n_1 < 3n_1 \leq m_1 n_1 = n_2$ ve hem de $(n_1 x_0) < (n_2 x_0)$ bulunur. Aynı gerekçeyle $(n_2 x_0) < (m_2 (n_2 x_0)) = (m_2 n_2 x_0)$ gerçeklenecek biçimde bir $3 \leq m_2$ doğal sayısı vardır. $n_3 = m_2 n_2$ doğal sayısı için $n_2 < n_3$ ve $(n_2 x_0) < (n_3 x_0)$ bulunur. İstenen $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ kesin artan doğal sayılar dizisi tümevarımla tanımlanır. Tüm $(n_k x_0)$ ondalık kısımları elbette tüm gerçel sayıların ondalık kısımları gibi < 1 gerçeklerler.

Önerme 3: $0 < x < y$ ise $\varepsilon < y - x$ gerçekleyen her pozitif ε sayısının uygun bir doğal sayı katı x ile y arasında yer alır.

Kanıtlama: Gerçekten $0 < \frac{x}{\varepsilon}$ pozitif gerçel sayısının tam kısmı negatif olmadığından, $n = [\frac{x}{\varepsilon}] + 1$ doğal sayısı için $\frac{x}{\varepsilon} < n \leq \frac{x}{\varepsilon} + 1 < \frac{y}{\varepsilon}$ eşitsizlikleri nedeniyle $x < n\varepsilon < y$ bulunur.

Ana Önerme: Herhangi bir sabit x_0 irrasyonel sayısı için $Bx_0 = \{nx_0 + k : n \in N, k \in Z\}$ alt kümesi, gerçel sayılar kümesinde yoğundur.

Kanıtlama: Öncelikle $0 \leq x < y < 1$ gerçekleyen herhangi x ve y gerçel sayıları alındığında bunlar arsında Bx_0 kümesinden en az bir elemanın yer aldığını gösterelim. $0 < \varepsilon < y - x$ gerçekleyen herhangi bir pozitif ε sayısı alalım. Önerme 2 yardımıyla

$$\xi_k = (n_k x_0) \ , (k \in N)$$

kesin artan irrasyonel sayılarının var ve $0 < \xi_k < 1$ gerçeklediklerini ve üstelik $k \neq i$ için $\xi_k \neq \xi_i$ olduğunu, hatta $k < i$ ise $n_k < n_i$ ve $\xi_k < \xi_i$ gerçeklendiğini biliyoruz.$(0, 1)$ aralığındaki bu sonsuz irrasyonel sayı $[0,1]$ aralığındaki en az bir gerçel sayıya yığılır, aman dikkat, yakınsamaz fakat yığılır, iyi güzel de bu ne demektir? Bu, $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin yoğun bir alt kümesinin, örneğin $\{\xi_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ alt dizisinin bir $\ell \in [0,1]$ gerçel sayısına yakınsaması demektir. Ünlü Bolzano-Weierstrass Teoremi güvence altına alır böyle bir yakınsak alt dizinin varlığını..,burada alt dizi tanımına ilişkin temel bir bilgiyi anımsamalıyız: $\{\xi_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ alt dizisindeki indisler $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ kesin artan bir doğal sayı dizisidir. Madem ki $\lim_{i\to\infty} \xi_{k_i} = \ell$ gerçekleniyor, O halde bir $N_\varepsilon \in N$ vardır ki her $i \geq N_\varepsilon$ için $| \xi_{k_i} - \ell | < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. O halde

$$\forall i,j \geq N_\varepsilon \text{ için } |\xi_{k_i} - \xi_{k_j}| < \varepsilon$$

gerçekleşir, çünkü bu son mutlak değer $|\xi_{k_i} - \ell| + |\ell - \xi_{k_j}|$ toplamından eşit küçük kalır. Şimdi $N_\varepsilon < j < i$ gerçekleyen herhangi iki doğal sayı alıp, bunları sabit tutalım. O halde yukarıda biraz önce söylenenler nedeniyle $k_j < k_i$ ve dolayısıyla $n_{k_j} < n_{k_i}$ ve dolayısıyla $\xi_{k_j} = (n_{k_j}x_0) < (n_{k_i}x_0) = \xi_{k_i}$ geçerli olacağından , sonuçta $\xi_{k_i} - \xi_{k_j} = |\xi_{k_i} - \xi_{k_j}| < \varepsilon$ bulunur. Önerme 3 yardımıyla , $\varepsilon < y - x$ geçerli olduğu anımsanıp, öyle uygun bir m doğal sayısı vardır ki $x < m(\xi_{k_i} - \xi_{k_j}) < y$ bulunur. Oysa ξ_k ondalık kısımlarının tanımı gereği bu, (artık parantezleri çarpım işlemlerinde yine alışılagelen eski anlamlarında kullanmak üzere)

$$m(n_{k_i} - n_{k_j})x_0 + (m[n_{k_j}x_0] - m[n_{k_i}x_0]) \in B_{x_0}$$

elemanının x ile y arasında yer alması demektir, burada $n_{k_j} < n_{k_i}$ nedeniyle $m(n_{k_i} - n_{k_j})$ tam sayısının pozitif olduğu, kısacası bir doğal sayı olduğu önemli bir gözlemdir. Demek ki $0 \leq x < y < 1$ gerçekleyen herhangi x ve y gerçel sayıları arasında B_{x_0} kümesinden en az bir eleman vardır. Şimdi ise $x < y$ gerçekleyen herhangi x ve y gerçel sayılarını göz önüne alalım. Bunlar ya aynı bir tam kısım aralığına düşerler ya da düşmezler. Eğer aynı bir tam kısım aralığına düşerlerse $k_0 \leq x < y < k_0 + 1$ gerçekleyecek biçimde sabit bir k_0 tam sayısı vardır ve $0 \leq x - k_0 < y - k_0 < 1$ geçerli olduğundan, biraz önce kanıtlanan gerçek nedeniyle öyle uygun bir n_0 doğal ve k_1 tam sayısı vardır ki $x - k_0 < n_0x_0 + k_1 < y - k_0$ olur ve sonuçta $x < n_0x_0 + k_0 + k_1 < y$ bulunur, burada x ile y arasında yer alan gerçel sayı B_{x_0} kümesine aittir; yok eğer x ve y gerçel sayıları aynı bir tam kısım aralığına düşmüyorsa, bu kez de $x < [x] + 1 \leq [y] \leq y$ oluyor demektir. Bu son durumda eğer $[x] + 1 = [y]$ ise, $0 < \delta < \frac{1}{2}([x]+1-x)$ gerçekleyen pozitif δ sayesinde (unutmuyoruz değil mi, artık parantezler çarpım işlemi amacıyla kullanılmaktadır) evet bu δ yardımıyla $[x] \leq x < x+\delta < [x]+1-\delta < [x]+1 = [y] \leq y$ olur ve $x + \delta$ ile $[x] + 1 - \delta$ gerçel sayıları arasında B_{x_0} kümesinden en az bir eleman vardır; yok eğer $[x] + 1 < [y]$ ise bu kez, $x < [x] + 1 < [x] + 2 \leq [y] \leq y$ olur ve $[x] + 1$ ile $[x] + 2$ tam sayıları arasında en az bir B_{x_0} elemanı bulunur. Tüm irdelemelerde sonunda hep x ve y arasında B_{x_0} kümesinden en az bir elemanın varlığı gösterilmiştir ve dolayısıyla kanıtlama bitirilmiştir.

Uyarı: Herhangi bir x_0 irrasyonel sayısına karşılık $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, ve, $(n_1x_0) > (n_2x_0) > (n_3x_0) > \ldots$ koşullarını gerçekleyen bir $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ doğal sayılar dizisinin varlığını gözlemlemek de güç değildir, çünkü herhangi bir pozitif ve $\varepsilon < 1$ gerçekleyen irrasyonel ε sayısına karşılık $n = [\frac{1}{\varepsilon}]$ doğal sayısı yardımıyla tanımlanan $m = n + 1$ doğal sayısının $2 \leq m$ ve $1 < m\varepsilon < 1 + \varepsilon < 2$, $(m\varepsilon) < (\varepsilon)$ eşitliklerini gerçeklediğini gözlemek kolaydır. Önerme 2'deki yöntemle aranan $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi tanımlanır. O halde bu yazının başında sözü edilen $C_{x_0} = \{-nx_0+k : n \in N, k \in Z\}$ kümesinin de yoğun olduğunu kanıtlamak güç değildir. B_{x_0} ve C_{x_0} yoğun kümelerinin ayrık olduklarını (hiçbir ortak elemana sahip olmadıklarını) gözleyebiliyoruz değil mi sevgili okurlar, iyi çalışmalar. Nasıl? Lütfen uğraşınız!

KAYNAKÇA

[1] N. Ergun: Dirichlet'nin bir teoremi hakkında, Matematik Dünyası, Aralık 1999, ss. 2-8.

[2] Y. Avcı, K. Almacık, N.Ergun: Üç analiz problemi, Matematik Dünyası, Eylül 1999, ss. 2-13