

**VII. ANTALYA MATEMATİK  
OLİMPİYADI BİRİNCİ AŞAMA SINAVI  
ÇÖZÜMLERİ**

**İlham Aliyev-Doğan Çoker**

Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,  
07058-ANTALYA

1.  $\sqrt{2000^{2002}}$  sayısının onluk sayı sisteminde yazılışında sağdan sıfırdan farklı ilk rakam nedir?

- A) 4    **B) 2**    C) 8    D) 6    E) 5

**Çözüm.**  $\sqrt{2000^{2002}} = 2000^{1001} = 2^{1001} \cdot 1000^{1001}$ ,  
 $2^{1001} = 2 \cdot 2^{1000} = 2 \cdot 16^{250}$  ve 16'nın her pozitif  
tamsayı kuvvetinin son rakamı 6 olduğundan,  
 $2 \cdot 16^{250}$ 'nin son rakamı 2'dir.

2.  $a, b, c = a + b + c$  eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı  $a, b$  ve  $c$  rakamları için  $a^2 + b^2 + c^2$  toplamı neye eşittir? (Burada  $a, b$  ifadesi " $a$  tam onda  $b$ " kesrini belirtmektedir.)

- A) 55    B) 70    **C) 65**    D) 60    E) 75

**Çözüm.** Verilen eşitliği

$$10ac + bc = 10(a + b + c) \Rightarrow bc = 10(a + b + c - ac)$$

şeklinde yazalım. Buradan  $b$  ve  $c$ 'den birinin 5, diğerinin bir çift sayı olduğu görülür.  $c = 5$  ise,  $b = 8a - 10$  eşitliğinden  $b = 6$ ,  $a = 2$  olur.  $b = 5$  ise,  $c = \frac{2a+10}{2a-1} = 1 + \frac{11}{2a-1}$  eşitliğinden  $2a - 1 = 11 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow c = 2$  olur. Her iki durumda da  $a^2 + b^2 + c^2 = 5^2 + 2^2 + 6^2 = 65$  olur.

3. İki (farklı veya eşit) asal sayının çarpımı biçiminde gösterilebilen her sayıya "iyi sayı" diyelim.  $n, k \in \mathbb{N}$  olmak üzere,  $n + 1, n + 2, \dots, n + k$  sayılarının her biri "iyi sayı" ise,  $k$  en fazla kaç olabilir?

- A) 4    **B) 3**    C) 2    D) 5    E) Sonsuz

**Çözüm.** Dört tane ardışık sayının her biri "iyi sayı" olamaz. Çünkü dört ardışık sayıdan biri 4'e bölüneceğinden  $4k$  biçimindedir.  $k = 1$  için

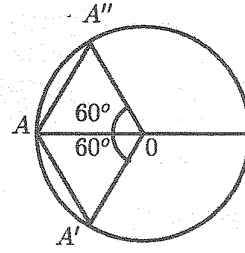
4, 5, 6, 7 dörtlüsünden sadece ikisi "iyidir".  $k > 1$  için  $4k = 2 \cdot 2 \cdot k$  sayısının en az 3 (eşit veya farklı) asal çarpanı olduğundan, bu sayı "iyi" değildir. Dolayısıyla, ardışık "iyi" sayıların sayısı 3'ten fazla olamaz. 3 tane ardışık iyi sayıya bir örnek göstereyim:

$$33 = 3 \cdot 11, \quad 34 = 2 \cdot 17, \quad 35 = 5 \cdot 7.$$

4. Bir çember üzerinde sabit bir  $A$  noktası alalım. Çember üzerinde alınan bir  $B$  noktası için,  $AB$  kirişinin uzunluğunun yarıçap uzunluğundan büyük olma olasılığı kaçtır?

- A)  $\frac{1}{\pi}$     B)  $\frac{2}{\pi}$     C)  $\frac{1}{3}$     **D)  $\frac{2}{3}$**     E)  $\frac{5}{6}$

**Çözüm.**



Şekilden görüldüğü gibi,  $B$  noktası  $\widehat{AA''}$  yayı üzerinde yürüdüğü zaman  $AB$  kirişinin uzunluğu yarıçap uzunluğundan küçük olur. Bu yayın uzunluğu çember uzunluğunun  $\frac{1}{3}$ 'üdür. Bundan dolayı,  $AB$  kirişinin uzunluğunun yarıçap uzunluğundan büyük olma olasılığı  $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ 'tür.

5.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu her  $x, y \in \mathbb{R}$  için

$$(f(y))^2 = \frac{1}{2}[f(x+y^2) - f(x)]$$

eşitliğini sağlamaktadır.  $f(1) \neq 0$  olduğuna göre,  $f(2002)$  sayısı kaçtır?

- A) 1000    B) 2001    **C) 1001**  
D) 2000    E) 2002

**Çözüm.**  $x = y = 0$  koyarsak,  $f(0) = 0$  olur.  $x = 0, y = 1$  koyarsak,  $f(1) = 2f^2(1)$  ve  $f(1) \neq 0$  olduğundan,  $f(1) = \frac{1}{2}$  olur. Şimdi,  $y = 1$  koyarsak,  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x)) \Rightarrow f(x+1) - f(x) =$

$\frac{1}{2}$  elde ederiz.

$$\begin{aligned} f(2) - f(1) &= \frac{1}{2} \\ f(3) - f(2) &= \frac{1}{2} \\ \dots & \\ f(2002) - f(2001) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak,

$$f(2002) = 1001$$

olur.

6.  $4^{2002} + 6^{2002}$  sayısının 25 ile bölünmesinden elde edilen kalan kaçtır?

- A) 4 B) 18 C) 12 D) 24 **E) 2**

**Çözüm.**

1.Çözüm:  $\phi$  Euler fonksiyonu olmak üzere,  $\phi(25) = 20$  'dir. O halde, Euler Teoremine göre,

$$4^{20} = 4^{\phi(25)} \equiv 1 \pmod{25},$$

$$6^{20} = 6^{\phi(25)} \equiv 1 \pmod{25}$$

ve buradan da,

$$4^{2002} = 4^2 \cdot 4^{2000} = 16 \cdot 4^{20 \cdot 100} \equiv 16 \pmod{25},$$

$$6^{2002} = 4^2 \cdot 4^{20 \cdot 100} \equiv 36 \pmod{25} \equiv 11 \pmod{25}.$$

Bu ikisinden  $4^{2002} + 6^{2002} \equiv 16 + 11 \pmod{25} \equiv 2 \pmod{25}$  elde edilir.

2.Çözüm:  $4^{2002} + 6^{2002} = (5-1)^{2002} + (5+1)^{2002} = \dots$  (Binom Formülünü kullanıyoruz)...  $= 25 \cdot A - \binom{2002}{2001} \cdot 5 \cdot 1 + 1 = 25 \cdot B + \binom{2002}{2001} \cdot 5 \cdot 1 + 1 = 25 \cdot (A+B) + 2$ . Sonuncu toplam 25 ile bölününce kalan 2 'dir.

7. 50 sayfalı bir kitabın sayfaları 1, 2, 3, ..., 99, 100 sayıları ile numaralandırılmıştır. Bu kitaptan bir kaç yaprak koparılıp atıldıktan sonra, geriye kalan sayfaların numaralar toplamı 4946 olmuştur. Bu durumda, en fazla kaç yaprak koparılmıştır?

- A) 4** B) 5 C) 8 D) 7 E) 6

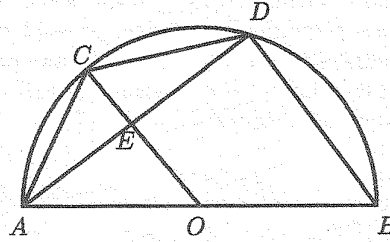
**Çözüm.** Koparılmış sayfaların numaralar toplamı  $5050 - 4946 = 104$  'tür.  $n$  numaralı yaprağın sayfa numaralarının toplamı  $(2n-1) + 2n = 4n-1$  'dir. Bundan dolayı,  $k$  tane yaprak

koparılmışsa, onların sayfa numaraları toplamı,  $(4n_1-1) + (4n_2-1) + \dots + (4n_k-1) = 4(n_1 + n_2 + \dots + n_k) - k$  olur.  $4 \cdot (n_1 + n_2 + \dots + n_k) - k = 104$  eşitliğinden,  $k$  'nın 4 'e bölündüğünü söyleyebiliriz. Yani,  $k = 4, 8, \dots$  olabilir.  $k \geq 8$  olamaz, çünkü  $4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) - 8 = 4 \cdot 36 - 8 = 136 > 104$  'tür.  $k = 4$  durumuna bir örnek verelim: 1., 2., 3. ve 21. yaprak koparılmışsa, sayfa numaraları toplamı  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 41 + 42 = 104$  olur.

8.  $[AB]$  doğru parçası çap olmak üzere, bir yarım çember çizilmiş ve bu yarım çember üzerinde  $C$  ve  $D$  noktaları  $|AC| = |CD| = 2$  olacak biçimde alınmıştır.  $|AB| = 5$  olduğuna göre,  $BD$  kirisinin uzunluğu kaçtır?

- A) 3,3 B) 3,2 C) 3,1 **D) 3,4** E) 3,5

**Çözüm.**



$\hat{A}DB = 90^\circ$  olduğundan, Pisagor Teoreminden  $|BD|^2 = |AB|^2 - |AD|^2 = 25 - |AD|^2$  'dir.  $|AD|$  uzunluğunu bulalım. Çemberin merkezine  $O$  ve  $CO$  ile  $AD$  'nin kesişim noktasına  $E$  diyelim.  $CE \perp AD$  olduğu açıktır.  $\hat{CDE}$  ve  $\hat{CBA}$  aynı  $\hat{AC}$  yayını gören açılar olarak eşitler. Buna göre de  $\hat{DCE}$  ve  $\hat{CAB}$  dik üçgenleri benzer üçgenlerdir.

Buradan,  $\frac{|DE|}{|DC|} = \frac{|BC|}{|BA|} \Rightarrow$

$$|DE| = |DC| \cdot \frac{|BC|}{|BA|} = 2 \cdot \frac{\sqrt{5^2 - 2^2}}{5} = \frac{2\sqrt{21}}{5} \Rightarrow$$

$$|AD| = 2|DE| = \frac{4}{5}\sqrt{21}$$

Sonuçta,  $|BD| = \sqrt{25 - |AD|^2} = \frac{17}{5} = 3,4$  çıkar.

9. Aşağıdaki denklemin gerçel sayılarda çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

$$\left\| \frac{6x+5}{8} \right\| = \frac{15x-7}{5}$$

(Burada,  $\|\cdot\|$ , tamdeğer fonksiyonudur.)

- A) 0 B) 1 **C) 2**  
D) 3 E) Sonsuz çoklukta

**Çözüm.**  $\frac{15x-7}{5} = n$ , ( $n \in \mathbb{Z}$ ) diyelim. Buradan  $x = \frac{5n+7}{15}$  bulunur ve denklemde yerine konulursa,  $\left\lfloor \frac{10n+39}{40} \right\rfloor = n$  olur. Tamdeğer fonksiyonunun tanımından,  $0 \leq \frac{10n+39}{40} - n < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{30} < n \leq 1,3 \Rightarrow n = 0$  veya  $n = 1$ .  $n = 0$  için  $x_1 = \frac{7}{15}$  ve  $n = 1$  için  $x_2 = \frac{4}{5}$  çözümleri elde edilir.

10. Kaç tane  $p$  asal sayısı için  $p^2 + 11$  sayısının tam 6 tane farklı pozitif böleni vardır?

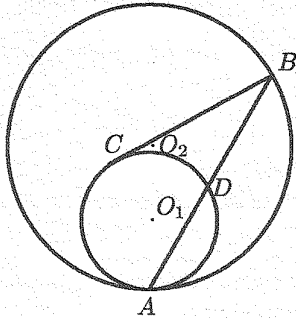
- A) 1** B) 2 C) 3  
D) 12 E) Sonsuz çoklukta

**Çözüm.**  $p = 2$  için  $p^2 + 11 = 15$  sayısının 4 pozitif böleni vardır.  $p = 3$  için  $p^2 + 11 = 20$  sayısının 6 pozitif böleni vardır. Her  $p \geq 5$  asal sayısı  $6k \mp 1$  biçiminde gösterilebileceğinden,  $p^2 + 11$  sayısı 12'ye bölünecektir ve 12'nin tam 6 tane pozitif böleni olduğundan,  $p^2 + 11$  sayısının pozitif bölen sayısı 6'dan fazla olacaktır.

11. Yarıçapı 5 birim olan bir çember, yarıçapı 9 birim olan bir başka çembere  $A$  noktasında içten teğettir. Büyük çember üzerinde,  $|AB| = 12$  birim olacak şekilde seçilen bir  $B$  noktasından küçük çembere çizilen teğet parçasının uzunluğu nedir?

- A) 11 **B) 8** C) 9 D) 10 E) 7

**Çözüm.**



$AB$ 'nin küçük çemberle kesişim noktasına  $D$  diyelim. Küçük çemberin merkezine  $O_1$  ve büyüğüne de  $O_2$  dersek,  $\triangle AO_1D$  ve  $\triangle AO_2B$

üçgenlerinin benzerliğinden  $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{5}{9} \Rightarrow |AD| = \frac{5}{9} \cdot |AB| = \frac{5}{9} \cdot 12 = \frac{20}{3}$ . Buradan,  $|BD| = |AB| - |AD| = 12 - \frac{20}{3} = \frac{16}{3}$ . Şimdi,  $|BC| = \sqrt{|BD| \cdot |BA|} = \sqrt{12 \cdot \frac{16}{3}}$  eşitliğinden  $|BC| = \sqrt{12 \cdot \frac{16}{3}} = 8$  olur.

12. 0, 1, 2, ..., 9999 sayıları içinde 7 ve 8 rakamlarının ikisinin de kullanıldığı kaç tane sayı vardır?

- A) 982 **B) 964** C) 972  
D) 974 E) 962

**Çözüm.**  $A = \{\text{yazılımda 7 kullanılan sayılar}\}$ ,  $B = \{\text{yazılımda 8 kullanılan sayılar}\}$  kümelerini tanımlayalım. Biz  $s(A \cap B)$  sayısını bulmak istiyoruz.

$$s(A \cap B) = s(A) + s(B) - s(A \cup B) \quad (1)$$

formülünden yararlanacağız.

Sayıların hepsini, gerektiğinde önüne sıfırlar koymakla, dört basamaklı düşünelim. Örneğin,  $0 = 0000$ ,  $1 = 0001$ ,  $219 = 0219$  vs. O halde,

$$s(A) = s(B) = 10^4 - 9^4 \quad (2)$$

olduğunu kolayca görebiliriz. Öte yandan,  $C'$  ile  $C$  kümesinin tümleyenini gösterirsek,

$$s(A \cup B) = 10^4 - s((A \cup B)') = 10^4 - 8^4 \quad (3)$$

olur. (2) ve (3)'ü (1)'de koyarsak,  $s(A \cap B) = 10^4 - 2 \cdot 9^4 + 8^4 = 974$  elde ederiz.

13.  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$  olmak üzere,

$$\frac{xy^2z}{x^4 + y^4 + z^4}$$

ifadesinin alabileceği en büyük değeri nedir?

- A)  $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$  B)  $\frac{1}{3}$  C)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  D)  $\frac{1}{2}$  **E)  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$**

**Çözüm.** Aritmetik-geometrik ortalamalar eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= x^4 + \frac{1}{2}y^4 + \frac{1}{2}y^4 + z^4 \\ &\geq 4 \cdot \sqrt[4]{x^4 \cdot y^8 \cdot z^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{2}}xy^2z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{xy^2z}{x^4 + y^4 + z^4} \leq \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

çıkar. Eşitlik durumu,

$$x^4 = \frac{1}{2}y^4 = z^4 \Rightarrow y = t > 0, x = z = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}t$$

için elde edilir.

14.  $\triangle ABC$  üçgeninin  $AC$  kenarı üzerinde bir  $M$  noktası ve  $BC$  kenarı üzerinde bir  $N$  noktası alınmıştır.  $[AN]$  ve  $[BM]$  doğru parçalarının kesişim noktası  $O$  olsun.

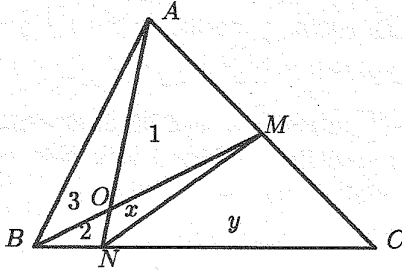
$$Alan(\triangle OMA) = 1, Alan(\triangle OBN) = 2 \text{ ve}$$

$$Alan(\triangle OAB) = 3$$

olduğuna göre,  $Alan(\triangle MNC)$  nedir?

- A) 2    **B)  $\frac{40}{21}$**     C)  $\frac{20}{11}$     D) 3    E)  $\frac{60}{31}$

**Çözüm.**



Şekilde,  $Alan(\triangle ONM) = x$  ve  $Alan(\triangle MNC) = y$  diyelim.  $3x = 1 \cdot 2$  eşitliğinden  $x = \frac{2}{3}$  bulunur. Biz  $y$ 'yi bulmak istiyoruz.

$$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{Alan(\triangle ABM)}{Alan(\triangle MBC)} = \frac{3+1}{2+x+y} = \frac{4}{2+\frac{2}{3}+y},$$

ve

$$\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{Alan(\triangle ANM)}{Alan(\triangle MNC)} = \frac{1+x}{y} = \frac{1+\frac{2}{3}}{y}.$$

Bu iki eşitlikten

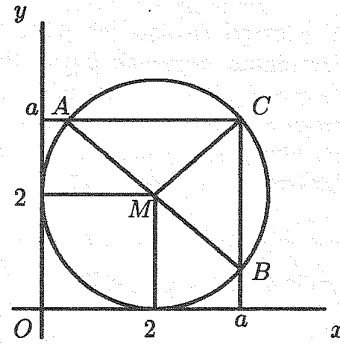
$$\frac{4}{2+\frac{2}{3}+y} = \frac{1+\frac{2}{3}}{y} \Rightarrow y = \frac{40}{21}$$

elde edilir.

15. Yarıçapı 2 birim olan bir çember, bir karenin iki komşu kenarına içten teğet olup, karenin sadece bir köşesinden geçmektedir. Buna göre, karenin kenar uzunluğu kaç birimdir?

- A)  $2 + \sqrt{2}$**     B) 3    C)  $2\sqrt{2}$   
D)  $\sqrt{5}$     E)  $4 - \sqrt{2}$

**Çözüm.**



Kareyi, şekildeki gibi, Descartes koordinat sisteminde yerleştirelim. Çemberin merkezine  $M$  ve çemberin karenin kenarları ile kesiştiği noktalara da  $A$  ve  $B$  denirse,  $M$ 'nin  $[AB]$  üzerinde olduğu açıktır.

Karenin kenar uzunluğuna  $a$  diyelim. O halde  $C$ 'nin koordinatları  $(a, a)$  ve  $M$ 'nin koordinatları da  $(2, 2)$  olduğundan,

$$2 = |CM| = \sqrt{(a-2)^2 + (a-2)^2} = \sqrt{2}(a-2)$$

çıkar. Buradan,  $a = 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$  bulunur.

16. 1, 2, ..., 999, 1000 sayıları verilsin. Bu sayılardan azalan aritmetik dizi oluşturacak şekilde kaç tane sayı üçlüsü seçilebilir? (Örneğin, 3, 2, 1 ve 9, 6, 3 birer azalan aritmetik dizidir.)

- A) 245500    B)  $\frac{1}{3} \binom{500}{3}$     C) 247500  
D)  $\frac{1}{3!} \binom{1000}{3}$     **E) 249500**

**Çözüm.** Azalan aritmetik dizi sayısı, artan aritmetik dizi sayısına eşit olduğundan, artan ar-

aritmetik dizi sayısını bulalım.  $a$  dizinin ilk terimi ve  $d$  de dizi farkı olursa,  $a \geq 1$ ,  $d \geq 1$  ve  $a + 2d \leq 1000$  sağlanmalıdır. Buradan  $a \leq 1000 - 2d$ , ( $d = 1, 2, \dots, 499$ ) olur. Böylece, artan aritmetik dizi oluşturan üçlüler sayısı

$$\sum_{d=1}^{499} (1000 - 2d) = 499 \cdot 1000 - 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 499)$$

$$= 499 \cdot 1000 - 2 \cdot \frac{1+499}{2} \cdot 499$$

$$= 499 \cdot 1000 - 499 \cdot 500 = 249500$$

olur.

17.  $a, b, c$  gerçel sayıları  $|a| \leq 3$ ,  $|b| \leq 2$ ,  $|c| \leq 1$  koşullarını sağlamak üzere, tüm  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  denklemlerini düşünelim. Bu denklemlerden en az birini sağlayan pozitif gerçel sayıların en büyüğüne  $x_0$  diyelim.  $x_0$  sayısı için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- A)  $2 < x_0 < 3$    B)  $1 < x_0 < 2$    C)  $0 < x_0 < 1$   
**D)**  $3 < x_0 < 4$    E)  $4 < x_0 < 5$

**Çözüm.** Reel katsayılı 3 dereceli her polinomun en az bir reel kökü vardır.  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 1$  polinomunun en büyük pozitif kökü, problemdeki koşulları sağlayan polinomların reel köklerinin hepsinden büyüktür. Gerçekten,  $f(x)$  polinomunun en büyük pozitif köküne  $x_0$  dersek,  $\forall x > x_0 > 0$  için,

$$0 = f(x_0) < f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 1$$

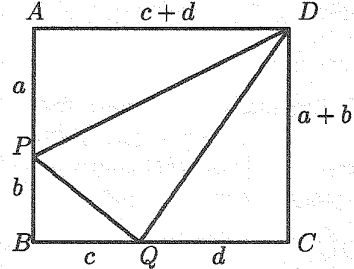
$$\leq x^3 + ax^2 + bx + c$$

olur. Yani,  $x^3 + ax^2 + bx + c$  ( $|a| \leq 3$ ,  $|b| \leq 2$ ,  $|c| \leq 1$ ) polinomlarının hiç birisinin  $x_0$ 'dan büyük kökü yoktur. Şimdi,  $x_0$ 'ın bulunduğu aralığı tahmin edelim.  $f(3) < 0$  ve  $f(4) > 0$  olduğundan, sürekli fonksiyonlar için Aradeğer Teoreminden,  $x_0 \in (3, 4)$  olur. (Her  $x > 4$  için  $f(x) > 0$  olduğu kolayca görülebilir.)

18. Bir  $ABCD$  dikdörtgeninde  $AB$  kenarı üzerinde bir  $P$  noktası ve  $BC$  kenarı üzerinde bir  $Q$  noktası,  $\triangle APD$ ,  $\triangle PBQ$  ve  $\triangle QCD$  üçgenlerinin alanları eşit olacak biçimde alınmıştır. Buna göre,  $\frac{|AP|}{|PB|}$  oranı nedir?

- A)  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$    B)  $\frac{3}{2}$    C)  $\frac{\sqrt{5}+2}{4}$   
D)  $\frac{4}{3}$    **E)**  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

**Çözüm.**



$|AP| = a$ ,  $|PB| = b$ ,  $|BQ| = c$ ,  $|QC| = d$  diyelim. Alanların eşitliğinden,  $\frac{1}{2}a(c+d) = \frac{1}{2}d(a+b) = \frac{1}{2}bc$  olur. İlk eşitlikten,

$$ac = db \Rightarrow \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \quad (1)$$

Son iki ifadenin eşitliğinden,

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c}{d} \quad (2)$$

çıkar. (1)'i (2)'de yerine koyarsak,  $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{b}{a}$  elde ederiz.  $\frac{a}{b} = x$  dersek,  $x + 1 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  bulunur.

**UYARI:**  $\frac{|AP|}{|PB|}$  oranının 1'den küçük olacağını görmek zor değildir. 1'den küçük olan tek seçenek ise  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 'dir!!!

19. 1'den 99'a kadar (1 ve 99 dahil) tüm tek sayıları alalım. Bu sayıların hepsinin toplamına  $A_1$ , tüm ikiserli çarpımlar toplamına  $A_2$ , tüm üçerli çarpımlar toplamına  $A_3$ , ... , tüm 49-arlı çarpımlar toplamına  $A_{49}$  ve hepsinin çarpımına  $A_{50}$  diyelim. (Örneğin,  $a, b, c, d$  sayıları için ikiserli çarpımlar toplamı  $ab+ac+ad+bc+bd+cd$ 'dir.) Buna göre,

$$A_{50} - A_{49} + A_{48} - A_{47} + \dots + A_2 - A_1$$

toplamı neye eşittir?

- A)  $-50!$    B)  $50!$    **C)**  $-1$   
D)  $1$    E)  $-2^{49} \cdot 49!$

**Çözüm.**  $(x+1)(x+3)\dots(x+97)(x+99)$  ifadesinde parantezleri açarak, sadeleştirirsek,

$(x+1)(x+3)\cdots(x+97)(x+99) = x^{50} + A_1x^{49} + A_2x^{48} + \cdots + A_{48}x^2 + A_{49}x^1 + A_{50}$  olur.  $x = -1$  koyarsak,  $A_{50} - A_{49} + A_{48} - \cdots + A_2 - A_1 + 1 = 0 \Rightarrow A_{50} - A_{49} + A_{48} - \cdots + A_2 - A_1 = -1$  olur.

$$x_0^5 + 3x_0^4 + x_0^3 - 5(x_0^2 + 15x_0 + 5) = 0 \Rightarrow$$

$$(x_0^3 - 5)(x_0^2 + 3x_0 + 1) = 0$$

20.

$$\left\{ \begin{array}{l} x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 20x^2 - 15x + 5 = 0 \\ x^5 + 2x^4 - x^3 - 5x^2 - 10x + 5 = 0 \end{array} \right\}$$

olur.  $x_0^2 + 3x_0 + 1 \neq 0$  olduğundan  $x_0^3 = 5 \Rightarrow x_0 = \sqrt[3]{5}$  bulunur.

denklem sisteminin gerçel çözümü  $x_0$  ise,  $3x_0^3 + 7$  tamsayısının rakamlar toplamı kaçtır?

**A)** 4    **B)** 13    **C)** 7    **D)** 5    **E)** 16

**Çözüm.**

1. Çözüm.  $x$  reel sayısı

$$x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 20x^2 - 15x + 5 = 0 \quad (1)$$

$$x^5 + 2x^4 - x^3 - 5x^2 - 10x + 5 = 0 \quad (2)$$

sistemi sağlasın. Eşitlikleri taraf tarafa çıkartırsak,

$$x^6 + 3x^5 + x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 5x = 0 \Rightarrow$$

$$x^5 + 3x^4 + x^3 - 5x^2 - 15x - 5 = 0 \quad (3)$$

olur. (2) ve (3) 'ü taraf tarafa toplarsak,

$$2x^5 + 5x^4 - 10x^2 - 25x = 0$$

$$\Rightarrow 2x^4 + 5x^3 - 10x - 25 = 0 \quad (4)$$

çıkar. (3) 'ten (2) 'yi çıkarırsak,

$$x^4 + 2x^3 - 5x - 10 = 0 \quad (5)$$

olur. (5) 'in her iki yanını 2 ile çarptıktan sonra,

$$2x^4 + 4x^3 - 10x - 20 = 0 \quad (6)$$

olur. Şimdi, (4) 'ten (6) 'yı çıkartırsak,

$$x^3 - 5 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{5} \Rightarrow 3x^3 + 7 = 22$$

elde edilir.

2. Çözüm.  $x_0$  'in sistemi sağlayan reel sayı olduğunu varsayıp eşitlikleri taraf tarafa çıkartırsak,

$$x_0^6 + 3x_0^5 + x_0^4 - 5x_0^3 - 15x_0^2 - 5x_0 = 0 \Rightarrow$$