

## HERHANGİ BOYUTLU SATRANÇ TAHTASININ KAPLANABİLMESİ ÜZERİNE

Metin Barış  
Özel Ege Lisesi, İZMİR

### Konunun Özeti

Bu projede  $n \times m$ 'lik bir satranç tahtasının, en fazla bir  $\square$  veya  $\square\square$  ve istenilen sayıda  $\square\square$  kullanılarak kaplanabilmesi problemi incelenmiştir.  $n$  ve  $m$ 'in 1 ve 3'ten farklı olduğu tüm durumlarda ve  $n - 3$ ,  $m$  bir çift sayı olduğu durumda, böyle bir kaplamanın mümkün olduğu gösterilmiştir. Ayrıca  $n - 3$  ve  $m$  bir tek sayı olması halinde böyle bir kaplamanın mümkün olmayacağı kanıtlanmıştır.

### Giriş

Aşağıdaki soru 1998 yılı TÜBİTAK Ulusal Matematik Olimpiyadı birinci aşama sınavında önerilmiştir.

**Soru:**  $\square$  Birim kareyi göstermek üzere, istenilen sayıda  $\square\square$  ve en çok bir tane  $\square$  kullanılarak aşağıdaki  $n$  tam sayılarından hangisi için  $n \times n$ 'lik bir satranç tahtası kaplanamaz?

- A) 100      B) 99      C) 98      D) 97      E) 96

Projenin sonucu olarak, verilen şıkların hiçbirinin doğru olmadığını göreceğiz. Şimdi bu soruyu genel şekilde ifade ederek inceleyelim:

$n \times m$ 'lik bir satranç tahtasında  $n \times m$  sayıda kare bulunduğundan  $n \times m \equiv 2 \pmod{3}$  durumunda soruda verilen koşullar sağlanacak şekilde satranç tahtasının kaplanması mümkün değildir. Bunun için bir  $\square\square$  eklememiz gerekmektedir. Diğer durumlarda kullanamayacağımızdan (Örneğin,  $n \times n$  durumunda  $n^2 \not\equiv 2 \pmod{3}$  olduğundan  $\square\square$  kullanamaz), bu problemin genelliğini bozamaz.

**Tanım:**  $n \times m$ 'lik bir satranç tahtası en fazla bir  $\square$  veya bir  $\square\square$  ve istenilen sayıda  $\square\square$  kullanılarak kaplanabilirse, " $n \times m$ 'lik tahta kaplanabilir" diyeceğiz.

**Problem:**  $n$  ve  $m$  pozitif tam sayılarının hangi değerlerinde  $n \times m$ 'lik satranç tahtası kaplanabilir?

Projede bu problemin tam çözümünü veriyoruz.

### Esas Sonuçlar

**Lemma 1:**  $n$  ve  $m$  sayılarından biri 3'ün, diğeri de 2'nin katı ise,  $n \times m$ 'lik tahta kaplanabilir.

**Kanıt:**  $2 \times 3$ 'lük ( ve aynı şekilde  $3 \times 2$ 'lik ) tahta



sağlayan satranç tahtası böyle tahtalara bölünerek kaplanabilir.

şeklinde kaplanabilir. Koşulları





**Lemma 2:**  $6 \times m$  ( ve dolayısıyla  $m \times 6$  )'lük tahta her  $m > 1$  için kaplanabilir.

**Kanıt:**  $m > 1$  sayısı ya çifttir ve Lemma 1'den dolayı kaplanabilir, ya da tek'tir ve  $k - (m-3) / 2$  olmak üzere  $m - 3 + 2k$  şeklinde yazılabilir. O halde  $6 \times m$ 'lik tahtayı  $6 \times 3$  ve  $6 \times (2k)$ 'lık iki tahtaya bölerek Lemma 1'i uyguluyoruz.

**Lemma 3:**  $3 \times m$ 'lik (  $m \times 3$ 'lük ) bir satranç tahtası  $m$ 'in çift değerlerinde kaplanabilir;  $m$ 'in tek değerlerinde kaplanamaz.

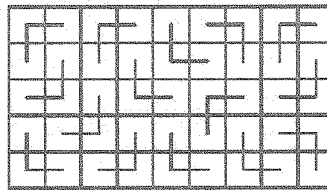
**Kanıt:** Çift  $m$ 'ler için  $3 \times m$ 'lik tahta Lemma 1'den dolayı kaplanabilir.  $m$ 'in tek değerlerinde şekildeki gibi  $m + 1$  tane hane işaretleyelim:



Bir tane  en fazla bir tane işaretli hane kapatabilir.  $3 \times m \equiv 0 \pmod{3}$  olduğundan,  ve  kullanılmayacak. Dolayısıyla tahtayı kaplamak için en az  $m + 1$  tane  gerekmektedir. Tahta üzerinde  $3m$  tane hane bulunduğu için bu imkansızdır.

**Lemma 4:**  $9 \times m$ 'lik (  $m \times 9$ 'lük ) tahta  $m - 1$  ve  $m - 3$  değerlerinde kaplanamaz; diğer  $m$ 'ler için kaplanabilir.

**Kanıt:**  $m - 1$  değerinde tahtanın kaplanamayacağı açıktır.  $m - 3$  durumunu Lemma 3'te inceledik.  $9 \times 5$ 'lik tahta aşağıdaki şekilde kaplanabilir.



Çift  $m$ 'ler için tahta, Lemma 1'den dolayı kaplanabilir.  $m > 5$  tek sayısı için,  $k - (m-5) / 2$  olmak üzere  $m - 5 + 2k$  şeklinde yazılabildiğinden,  $9 \times m$ 'lik tahta,  $9 \times (2k)$ 'lık ve  $9 \times 5$ 'lik iki tahtaya bölünerek kaplanabilir.

**Lemma 5:**  $n \times m$ 'lik satranç tahtası:

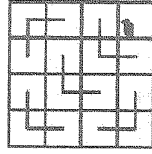
- 1)  $n - 1$  durumunda sadece  $m - 1$  ve  $m - 2$  için kaplanabilir.
- 2)  $n - 2$  durumunda tüm  $m$ 'ler için kaplanabilir.
- 3)  $n - 4$  durumunda her  $m \geq 2$  için kaplanabilir.
- 4)  $n - 5$  durumunda  $m - 1$  ve  $m - 3$  için kaplanamaz, diğer  $m$ 'ler için kaplanabilir.

**Kanıt:**

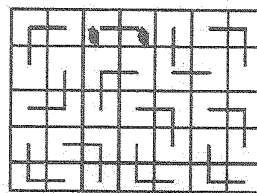
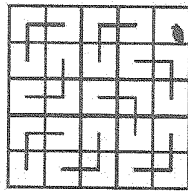
1. Açıktır.
2.  $m - 1$  durumu açıktır.  $m - 2$  ve  $m - 4$  için tahta aşağıdaki şekilde kaplanabilir.



- $m \equiv 0 \pmod{3}$  durumu Lemma 1'den elde edilir.
  - $m \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $m \geq 7$  için,  $k - (m - 4) / 3$  olmak üzere,  $m - 4 + 3k$  şeklinde yazılarak,  $2 \times m$ 'lik tahta,  $2 \times 4$ 'lük ve  $2 \times (3k)$ 'lik iki tahtaya bölünerek kaplanabilir.
  - $m \equiv 2 \pmod{3}$  için,  $k - (m - 2) / 3$  olmak üzere,  $m - 2 + 3k$  şeklinde yazılabilir. O halde  $2 \times m$ 'lik tahta,  $2 \times 2$ 'lik ve  $2 \times (3k)$ 'lik iki tahtaya bölünerek kaplanabilir.
3.  $m \geq 4$  durumunu incelememiz yeterlidir.  $m - 4$  için tahta aşağıdaki şekilde kaplanabilir:



- $m \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $m \geq 7$  için,  $k - (m - 4) / 3$  olmak üzere,  $m - 4 + 3k$  olduğundan,  $4 \times m$ 'lik tahta,  $4 \times 4$ 'lük ve  $4 \times (3k)$ 'lik iki tahtaya bölünerek kaplanabilir.
  - $m \equiv 2 \pmod{3}$ ,  $m \geq 5$  için,  $k - (m - 2) / 3$  olmak üzere,  $m - 2 + 3k$  şeklinde gösterilebildiğinden,  $4 \times m$ 'lik tahta,  $4 \times 2$ 'lik ve  $4 \times (3k)$ 'lik iki tahtaya bölünerek kaplanabilir.
4.  $m \geq 5$  alabiliriz.  $m - 5$  ve  $m - 7$  için tahta aşağıdaki şekilde kaplanabilir:



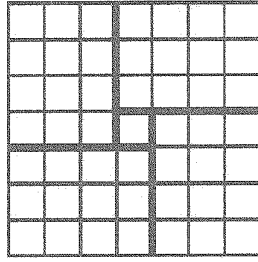
- $m \equiv 0 \pmod{6}$  ise, tahta,  $5 \times 6$ 'lık tahtalara bölünerek, Lemma 2'den dolayı kaplanabilir.
- $m \equiv 3 \pmod{6}$  ise,  $k - (m - 9) / 6$  olmak üzere,  $m - 9 + 6k$  şeklinde yazılabilir. O halde ;  $5 \times m$ 'lik tahta  $5 \times 9$ 'lük ve  $5 \times 6$ 'lık tahtalara bölünerek kaplanabilir.
- $m \equiv 1 \pmod{6}$ ,  $m \geq 13$  ise,  $m - 7 + 6k$  şeklinde gösterilebilir, tahta,  $5 \times 7$ 'lik ve  $5 \times 6$ 'lık tahtalara bölünerek, kaplanabilir.

- $m \equiv 4 \pmod{6}$ ,  $m \geq 10$  ise,  $m - 4 + 6k$  şeklinde yazılabilir.

O halde ; Tahta bir tane  $5 \times 4$ 'lük tahta ve  $5 \times 6$ 'lık tahtalara bölünerek, kaplanabilir.  
 $m \equiv 2 \pmod{6}$ ,  $m \geq 8$  ise,  $m - 2 + 6k$  şeklinde yazıp, tahtayı bölerek kaplayabiliriz.

$m \equiv 5 \pmod{6}$ ,  $m \geq 11$  ise,  $m - 5 + 6k$  şeklinde yazarak tahtayı kaplayabiliriz.

5.  $m \geq 7$  alabiliriz.  $m - 7$  durumunda  $7 \times 7$ 'lik tahtayı aşağıdaki şekilde 2 tane  $4 \times 3$ 'lük, 2 tane  $3 \times 4$ 'lük ve bir tane  $1 \times 1$ 'lik tahtaya bölerek kaplayabiliriz.



- \*  $m \equiv 0 \pmod{6}$  ise,  $m - 6k$  ve  $m \equiv 3 \pmod{6}$ ;  $m \geq 9$  ise,  $m - 9 + 6k$  şeklinde yazıp Lemma 2 ve Lemma 4'ü kullanırız.  
 \*  $m \equiv 1 \pmod{6}$ ,  $m \geq 13$  ise,  $m - 7 + 6k$ ;  $m \equiv 2 \pmod{6}$  ise,  $m - 2 + 6k$ ;  $m \equiv 4 \pmod{6}$  ise,  $m - 4 + 6k$ ;  $m \equiv 5 \pmod{6}$  ise,  $m - 5 + 6k$  şeklinde yazarak Lemma 2'yi kullanırız.

**Teorem :**  $n \times m$ 'lik bir satranç tahtası:

- 1)  $n$  ve  $m$  pozitif tam sayılarından biri 1 olup, diğeri 1 ve 2'den farklı olduğu;
- 2)  $n$  ve  $m$  sayılarından biri 3, diğeri tek sayı olduğu durumlarda kaplanamaz.

Diğer durumlarda tahta kaplanabilir.

**Kanıt:** Lemma 5(1) ve Lemma 3'ten dolayı  $m$  ve  $n$ 'in 1 ve 3'ten farklı değerlerinin incelenmesi yeterlidir.

- $n \equiv 3 \pmod{6}$ ;  $n \neq 3$  ise,  $n - 9 + 6s$  şeklinde yazılabilir, dolayısıyla Lemma 2 ve Lemma 4'ü kullanarak tahtayı kaplayabiliriz.
- $n \equiv 1 \pmod{6}$ ,  $n \neq 1$  ise,  $n - 7 + 6s$  şeklinde yazıp Lemma 5(5)'i kullanarak tahtayı kaplayabiliriz.
- $a - 2, 4$  veya  $5$  olmak üzere,  $n \equiv a \pmod{6}$  ise,  $n - a + 6s$  şeklinde yazarak Lemma 5'in sırasıyla 2), 3), 4) şıklarını kullanırız.
- $n \equiv 0 \pmod{6}$  için Lemma 2'yi kullanırız.

**SONUÇ ;**  $n \times n$ 'lik BİR SATRANÇ TAHTASI SADECE  $n - 3$  DEĞERİ İÇİN KAPLANAMAZ. BÖYLECE ; PROJENİN BAŞINDA VERDİĞİMİZ SORUDA HİÇBİR ŞİK DOĞRU DEĞİLDİR.

\* Bu çalışma TÜBİTAK 2002 yılı liseler arası araştırma proje yarışmasında bronz madalya almıştır. Metin Barış ve emeği geçen danışman öğretmenlerini kutluyoruz. (MD)