ÇİZGE KURAMINA GENEL BİR BAKIŞ

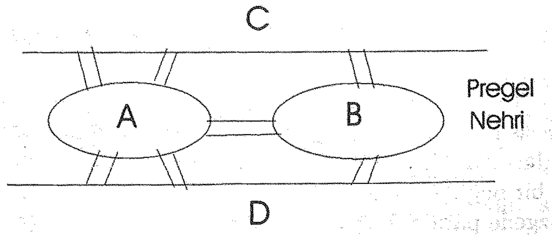
Gökşen Bacak-Tina Beşeri

İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Urla, İZMİR

---

18. yüzyılda Prusya'daki Königsberg kasabasında halk zamanının bir kısmını doğada gezinti yaparak geçiriyordu. Bu kasaba Pregel Nehri ile iki bölgeye ayrılmaktaydı ve nehrin içinde iki adacık bulunmaktaydı. Bu nehirdeki adaları kasabaya bağlayan 7 köprüye dair o bölgenin insanları arasında yayılan bir problem sonradan dönemin ünlü matematikçilerinden biri olan Leonhard Euler'e kadar ulaştı. Bu olaydan uzun yıllar sonra 1852 yılında bir başka ünlü matematikçi Augustus De Morgan, Sir William R.Hamilton'a gönderdiği bir mektupta öğrencisinin, İngiltere haritasındaki şehirleri, birbirlerine komşu olanları farklı renklerde boyamak için 4 rengin yeterli olduğunu tespit ettiğini fakat bunu matematiksel olarak ispatlayamadığını yazmıştı. 4 Renk Problemi olarak anılan bu problem, uzun yıllar sonra 1976 yılında K.Appel ve W.Hakken tarafından bilgisayar yardımıyla ispatlandı. Bu iki problemin çözümü matematikte yeni bir çığır açtı.

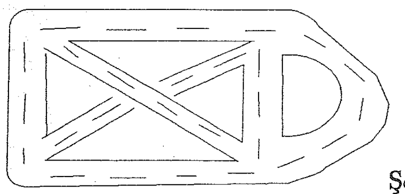
Königsberg Problemi: Kasabanın bir yakasından gezinti yapmak için çıkan biri tüm köprüleri sadece bir kez geçerek başladığı noktaya dönebilir mi?



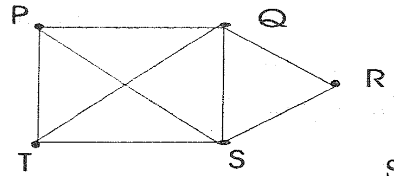
Euler bu problemin çözümü için uğraşırken belki de matematiğin yeni bir uygulama alanını yarattığını farketmemiştir. Daha sonraları Çizge Kuramı olarak bilinen bu yeni uygulama alanı birçok problemin çözümüne katkıda bulunacaktır. Çizge Kuramı ve uygulamalarına olan ilgi son yirmi yılda büyük bir hızla arttı. Bu artışın sebebi günlük hayatta karşılaştığımız birçok soruna çizge kuramı ile çözüm bulunabilmesidir. Karşılaştığımız birçok durum, bir noktalar kümesi ve bu noktaları birleştiren doğruların oluşturduğu şemalarla tanımlanabilir. Bu şemalara çizge denir. Örneğin noktalarla şehirleri, bu noktaları birleştiren çizgilerle bir havayolu şirketinde bazı şehirler arasındaki direk uçuşları gösterebiliriz. Bir kimyasal molekülde ise, noktalarla atomları,bu noktaları birleştiren çizgilerle de bu atomları bağlayan kimyasal bağları ifade edebiliriz. Bir sosyolog ise, bir grup insanın birbirlerine karşı davranış ve etkileşimlerini bir çizge yardımı ile rahatlıkla ifade edebilir. Çizgeler birbirinden bağımsız bir çok konuda; genetik, ekoloji, arkeoloji, müzik vb. alanlarda da karşımıza çıkabilir.

O halde çizge nedir? Öncelikle Şekil 1'deki yol haritasını ele alalım. Bu haritayı noktalar ve çizgiler yardımı ile Şekil 2'deki gibi gösterelim.

P, Q, R, S ve T noktalarına köşe, bu köşeleri birleştiren çizgilere de bağ adı verilir. Köşeler ve bağlar arasındaki matematiksel yapıyı gösteren şemaya ise çizge denir. PS ve QT doğru parçalarının kesim noktasının, Şekil 1'de bir dört yol belirtmemesi nedeniyle bu nokta çizgenin bir köşesi değildir. Bir köşeden çıkan bağların sayısına ise o köşenin derecesi denir. Örneğin Q köşesinin derecesi 4, R köşesinin derecesi 2'dir.



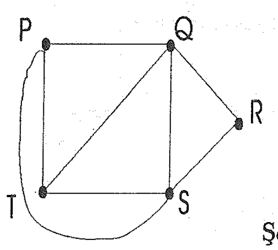
Şekil 1



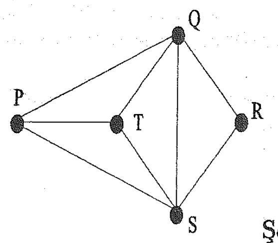
Şekil 2

Şekil 2, kesişen yollar dışında başka durumları da ifade edebilir. Örneğin P,Q,R,S ve T köşeleri futbol takımlarını, köşeler arasındaki bağlar da o köşenin temsil ettiği takımın karşılaşmalarını belirtsin. O halde Şekil 2'ye göre; P takımı Q,T ve S takımları ile karşılaşmış, R takımı ile karşılaşmamı Bu örnekte köşelerin derecesi, o köşenin temsil ettiği takımın oynadığı maç sayısına eşittir.

Şekil 2'deki PS doğru parçasını kaldırıp bu iki köşeyi dışarıdan birleştirmek istersek Şekil 3'ü elde ederiz. Bu iki şekildeki çizgeler özdeştir. Bu çizgelere özdeş olan bir başka çizge de Şekil 4'de görülmektedir.

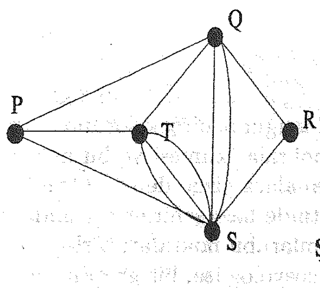


Şekil 3

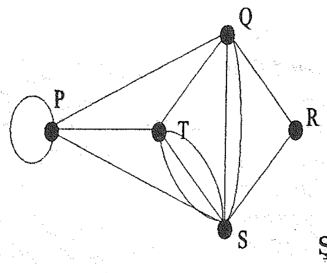


Şekil 4

Şekil 4'te, Q ile S ve S ile T'yi birleştiren yollarda trafiğin yoğun olduğunu kabul edelim. Bu durumda bu köşeler arasına daha fazla yol yapılarak bir rahatlama sağlanabilir (Şekil 5). Q ile S ve S ile T arasındaki bağlara paralel bağlar denir. Buna ek olarak P noktasına bir otopark yapacak olursak bunu P'den P'ye bir bağ ile gösterebiliriz (Şekil 6). Bu şekilde bir köşeyi kendisine birleştiren bağa döngü denir. Bir çizgede paralel bağ ya da döngü yoksa böyle çizgelere basit grafik denir.



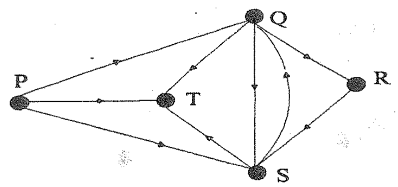
Şekil 5



Şekil 6

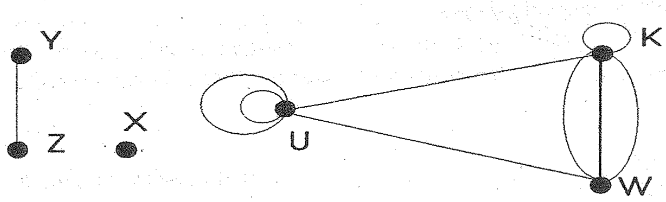
Şekil 1'deki yol haritasında tüm yolların tek yönlü yapılması istenirse, çizgedeki bağlar oklarla yönlendirilir. Bu tür çizgelere yönlendirilmiş çizge denir(Şekil 7).

Bir G çizgesindeki V köşesinin derecesi o köşe ile ilişkili bağların sayısı ile döngülerin sayısının iki katının toplamına eşittir. Bu dereceler küçükten büyüğe doğru sıralandığında elde edilen diziye çizgenin derece dizisi denir.



Şekil 7

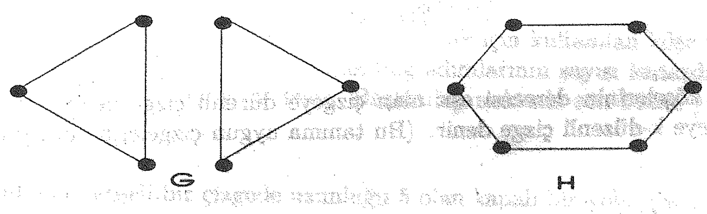
ÖRNEK: Aşağıda bir çizge ve onun derece dizisi verilmiştir.



$$< 0,1,1,4,6,6 >$$

Şekil 8

Not: Her çizgenin derece dizisi tek olmasına rağmen özdeş olmayan iki çizgenin derece dizileri aynı olabilir. Şekil 9 buna bir örnektir.



$$< \mathbf{2,2,2,2,2,2} >$$

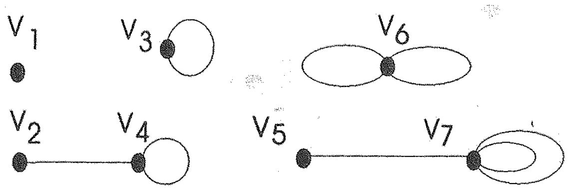
Şekil 9

TEOREM *TokalasmaTeoremi*: Bir çizgenin bütün köşelerinin derecelerinin toplamı, bu çizgenin bağlarının iki katıdır.

İspat: Bir bağın iki köşeyi birleştirdiğini düşünürsek, her bağ çizgenin derecesine iki kez katkıda bulunmuş olacaktır.
Sonuç olarak çizgenin derecesi çift olacağından tek dereceli köşeler çift sayıda olmak zorundadır.

ÖRNEK: Derece dizisi $< 0,1,2,3,3,4,5 >$ olan bir çizge oluşturmaya çalışalım. Bunun için v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7 noktalarını alalım. Çift dereceli köşelere uygun sayıda döngü yerleştirelim. Derecesi sıfır olan v_1 köşesi izole noktadır. v_3 köşesinde bir, v_6 köşesinde de iki adet döngü yerleştirelim.

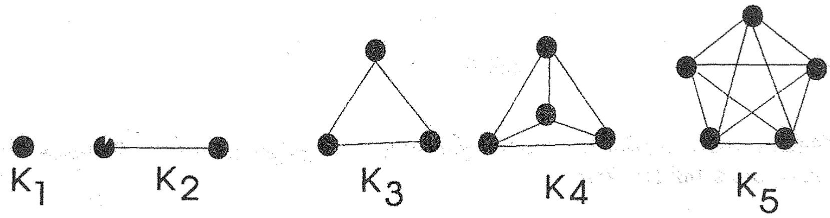
Tek dereceli v_2,v_4,v_5 ve v_7 köşelerini ise ikişer ikişer birleştirirsek şekil 10'daki çizgeyi elde ederiz. (Siz de bu derece dizisine karşılık gelen başka bir çizge oluşturabilirsiniz.)



Şekil 10

TANIM: Yönlendirilmiş bir çizgenin derecesi giriş ve çıkış dereceleri toplamına eşittir. Bir köşeye yönlenmiş bağların sayısına giriş derecesi, bir köşeden yönlenmiş bağların sayısına da çıkış derecesi denir. (Şekil 7'de S köşesinin giriş derecesi 3 çıkış derecesi ise 2'dir. Diğer köşelerin derecelerinin hesabını size bırakıyoruz.)

TANIM: Bir basit çizgede her iki köşe bir bağ ile birleştirilmişse böyle çizgelere tam çizge denir. n-köşeli bir tam çizge K_n ile gösterilir. Aşağıda ilk 5 tam çizge verilmiştir.



Şekil 11

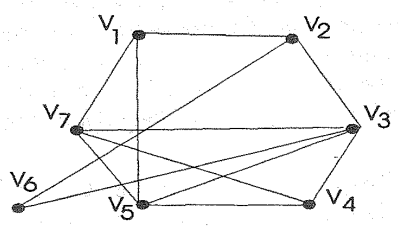
TANIM: Bütün köşelerinin derecesi eşit olan çizgeye düzenli çizge denir. Bütün köşelerinin derecesi k ise bu çizgeye k-düzenli çizge denir. (Bu tanıma uygun çizgelerin oluşturulmasını da size bırakıyoruz.)

ÇİZGE KURAMININ ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

Uygulama 1: Bir bölgedeki radyo vericileri, radyo yayın frekanslarına ayrıldığında bazı vericilerin frekanslarının çakışmaması için farklı frekanslar kullanmaları gerekir. En az sayıda farklı frekansın belirlenmesinde çizge kuramı modelinden yararlanılır. Örneğin v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7 yedi radyo vericisi olsun. Aralarında 100 kilometreden az mesafe bulunan iki vericinin farklı frekanslardan yayın yapması gerektiğini varsayalım. Köşelerin vericileri, bağların da aralarındaki mesafe 100 kilometreden az olan vericileri gösterdiği bir çizge oluşturmaya çalışalım. Şekil 12 yedi vericinin aralarındaki uzaklıkları gösteren bir tabloyu ve bu durumu temsil eden bir çizgeyi içerir.

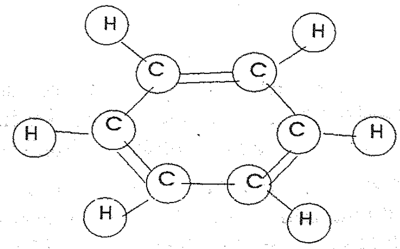
Radyo frekanslarının çalışması ile ilgili bu problem bir çizgede komşu köşelerin farklı renklerle boyanması problemi ile benzerdir. Kullanılacak en az sayıdaki frekans sayısı, çizge renklendirmede küçük renk sayısına eşit olacaktır.

	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
V_1	55	110	108	60	150	88
V_2		87	142	133	98	139
V_3			77	91	85	93
V_4				75	114	82
V_5					107	41
V_6						123



Şekil 12

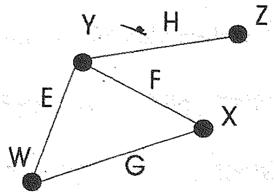
Uygulama 2: Şekil 13'te gösterilen benzen molekülünün bazı atomları arasında çift bağ vardır. Bu durumu basit olmayan bir çizgeyle gösterebiliriz. Her karbon atomu, çevresinde dört elektron bulunduğundan, derecesi 4 olan bir köşe ile; hidrojen atomu ise, çevresinde bir elektron bulunduğundan, derecesi 1 olan bir köşe ile gösterilir.



Şekil 13

TANIM: Bir çizgede bir köşeden diğer bir köşeye ulaşmak için kullanılan köşe ve bağ dizilerine yol denir. Bir yolun uzunluğu, yol dizisinde alınacak bağ adımlarının sayısı kadardır. x köşesinden başlayıp y köşesinde son bulan yola xy yolu denir. Başlanılan noktada son bulan yola kapalı, diğer yollara açık yol denir.

ÖRNEK: Şekil 14, dört köşeli bir çizgede uzunluğu 5 olan kapalı bir yolu göstermektedir.

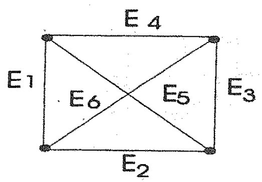


$< X, F, Y, H, Z, H, E, W, G, X >$

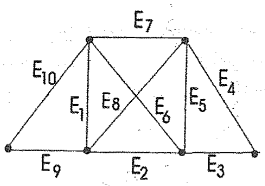
Şekil 14

Çizge Kuramındaki en önemli modellemelerden biri, adını Königsberg köprü probleminin ispatını ortaya koyan Euler'den alır. Euler, Königsberg problemindeki 7 köprüyü sadece bir kez geçerek başlanılan noktaya geri dönmenin olanaksızlığını ispatlamıştı. Çizge Kuramında, bir köşeden başlayarak ve tüm bağlardan sadece bir kez geçilerek yolu tamamlayıp, başlangıç noktasına dönülebiliyorsa böyle çizgelere Euler Çizgesi denir. Bir G çizgesinde, başlanılan köşeye dönmeden ve bütün bağlardan sadece birer kez geçilerek bir yol oluşturulabiliyorsa bu yola açık Euler yolu denir. Başlangıç ve bitiş köşesi aynı olan Euler yoluna Euler Turu denir. Euler Çizgesi ile ilgili çalışmaları Euler'den sonra inceleyen kişiler Biggs, Lloyd ve Wilson'dur.

TEOREM(Euler 1736): Bağlantılı bir G çizgesinin Euler çizgesi olması için gerek ve yeter koşul G çizgesindeki tüm köşelerin derecelerinin çift olmasıdır.



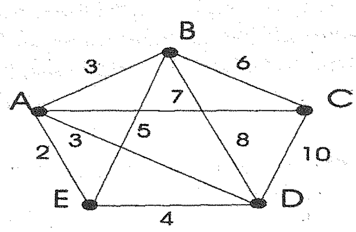
Euler çizgesi değil



Euler çizgesi

Königsberg Köprü Probleminin çizgesini oluşturarak problemin çözülemeyeceğini bir de siz gösterm çalışın. Köprü probleminin çözülebilmesi için bazı köşe ve bağların kaldırılması veya eklenmesi gerekmektedir. Bunu sizler de deneyerek problemi çözülebilir hale getirebilirsiniz.

Problem: Aşağıdaki çizgede A,B,C ve D rakamları birer petrol kuyusunu, E ise bu kuyulardan elde edilen petrolü işleyen bir rafineriyi belirtmektedir. Çizgiler rafineriler arasına döşenebilecek boru hatlarını ve üzerindeki sayılar da bunların maliyetlerini göstermektedir. Bütün kuyulardaki petrolün en az maliyetle işlenmesi için hangi boru hatları kurulmalıdır? Maliyet ne olur?



KAYNAKÇA

[1] C.Berge: Graphs and Hypergraphs, North-Holland Publishing Company, 1973

[2] J.Gross,J.Yellen: Graph Theory and Its Applications, CRS Press, 1999

[3] N.L.Biggs, E.K.Lloyd, R.J.Wilson: Graph Theory 1736 – 1936, Oxford, 1986

[4] R.J.Wilson: Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, 1996