

GEOMETRİK OPTİMALLEŞTİRME PROBLEMLERİ ÜZERİNE I

Gabil Adilov-Ramazan Tınaztepe

gabil@pascal.sci.akdeniz.edu.tr-rtinaztepe@yahoo.com

Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, ANTALYA

İnsanlar ilk çağlardan beri gelirlerini maksimumlaştırma veya harcamalarını minimumlaştırma problemiyle karşılaşmışlardır. Bu tür problemler, medeniyetin ilerlemesiyle, kişiler kadar toplumların da problemi olmuştur. Bu problemlerin çözümüne yönelik çalışmalar günümüzde optimalleştirme teorisini ortaya çıkarmıştır. Bu teorisin uğraştığı problemler genel biçimiyle aşağıdaki gibidir.

$$\text{opt } f(x) \quad \text{for } x \in X \subset B \quad (1)$$

Burada B bir uzay, X kümesi B 'nin bir altkümesi, $f : X \rightarrow R$ bir fonksiyondur, opt işareti max ya da min olarak anlaşılır. Buna göre yukarıdaki problem şu şekildedir: x değişkeninin X kümesindeki hangi değeri için f fonksiyonu minimum ya da maksimum değerini alır ve bu değer nedir? Örneğin, $f(x) = x^2$ olmak üzere $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ kümesi üzerinde f fonksiyonunun minimumunu bulunuz (maksimumunu bulunuz).

Bu çok basit bir örnek olmasına rağmen problemde f , X ve B farklı alındığında daha zor ve karmaşık problemler ortaya çıkar. B uzayı R , R^n vb., X kümesi sonlu, konveks, açık veya kapalı, tüm uzay vb., f fonksiyonu doğrusal, konveks, türevlenebilir olabilir. Örneğin, f doğrusal, $X \subset R^n$ bir çokyüzlü alınrsa doğrusal bir optimalleştirme problemi ortaya çıkar. X tamsayılar kümesi seçilirse, problem biraz daha değişip Optimalleştirme teorisinin tamsayı programlama denilen bir dalına girer. Daha farklı değişiklikler yaparak optimalleştirme teorisinin daha karmaşık dallarına, sonsuz boyutlu optimalleştirme problemlerine girilebilir.

Optimalleştirme Teorisi klasik analizin bir dalı olarak ortaya çıkmış ve buna Newton, Lagrange, Euler, Schneider, Dirichlet ve Weierstrass gibi ünlü matematikçilerin büyük katkıları olmuştur. Bilgisayar teknolojileriyle birlikte bu teori son 50 yılda daha büyük hızla gelişmiştir.

Klasik analiz yöntemleriyle (1) probleminin basit hallerinin incelenmesi, lise kitaplarında da anlatılmaktadır: türev konusunda türevlenebilir bir fonksiyonun bir bölgede minimum ya da maksimumunun bulunması gibi. Bu yazıda geometri ile ilgili optimalleştirme problemlerinden bahsedeceğiz.

GEOMETRİK OPTİMALLEŞTİRME PROBLEMLERİ: Geometride karşılaşılan optimalleştirme problemlerinin büyük bir kısmı, aşağıda göreceğiniz gibi, belirli bir bölgede optimal noktayı (yada noktaları) bulma problemleridir. Bu tür problemlerin özel geometrik yöntemlerle incelenmesi büyük yarar sağlamaktadır. Örneğin,

Problem 1: A ve B noktaları, ℓ doğrusunun zıt taraflarında olsunlar. Bu durumda ℓ üzerinde olan, A 'ya ve B 'ye uzaklıkları farkının mutlak değerini maksimum yapan noktayı bulunuz.

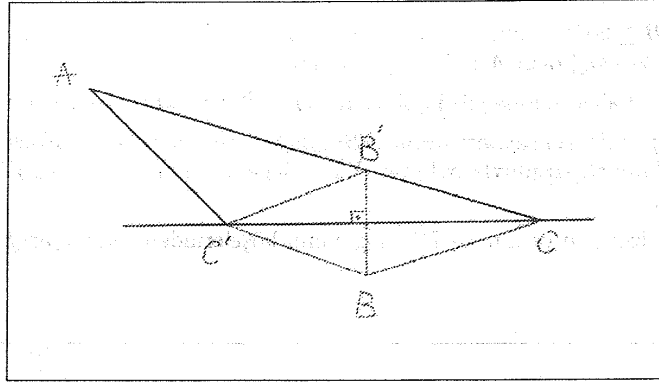
Verilen ℓ doğrusu x eksenini, noktalar ise $A(a_1, a_2)$ ve $B(b_1, b_2)$ olmak üzere bu problemi (1) biçiminde şöyle ifade edebiliriz: $f(x) = |\sqrt{(x - a_1)^2 + a_2^2} - \sqrt{(x - b_1)^2 + b_2^2}|$ fonksiyonunu maksimum yapan $C(x, 0)$ noktasını bulunuz. Görüldüğü gibi bu problemin klasik analiz yöntemleri ile incelenmesi bayağı zor olmasına rağmen, geometrik yöntemlerle çok basitçe çözülebilir:

Şekil 1'de B' noktası ℓ doğrusuna göre B noktasına simetriktir. ℓ üzerindeki her C' noktası için $||AC'| - |C'B|| = ||AC'| - |C'B'|| \leq |AB'| = ||AC'| - |B'C|| = ||AC'| - |BC|| \Rightarrow C$ noktası optimal çözümdür.

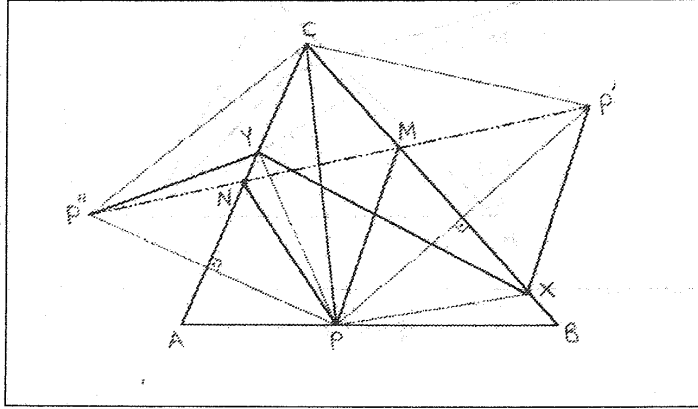
Eğer B ve A noktaları simetrik ise, ℓ üzerindeki her C noktası için $|AC| - |BC| = 0$ olur. A ve B noktaları ℓ doğrusundan aynı uzaklıkta, fakat simetrik değillerse, problemin çözümü yoktur.

Bu sınıftan olan klasik iki probleme daha bakalım.

Problem 2: Köşeleri verilmiş ABC üçgeninin kenarları üzerinde olmak üzere en küçük çevre uzunluğu sahip üçgeni bulunuz.



Şekil 1



Şekil 2

Çözüm: Önce dar açı karşısındaki AB kenarı üzerinde bir P noktası alalım. Daha sonra diğer kenarlar üzerinde öyle X ve Y noktalarını seçelim ki, PXY üçgeni en küçük çevre uzunluğuna sahip olsun. P' ve P'' noktaları, P noktasının sırasıyla BC ve AC 'ye göre simetrisi olsun. Şekil 2'de görüldüğü gibi YPX üçgeninin çevre uzunluğu $P''YXP'$ doğru parçaları grubunun uzunluğu ile aynı olacaktır. Bundan dolayı alınacak optimal noktalar $P'P''$ doğru parçası üzerinde olmalıdır. Dolayısıyla şekilde de görüldüğü gibi MNP üçgeni istenen özelliği sağlar. $\angle P''CP' = 2\angle C < 180^\circ$ olduğundan $P'P''$ doğru parçası AC ve BC parçaları ile kesişir.

Şimdi P noktasını öyle seçelim ki $P'P''$ doğru parçasının uzunluğu en küçük olsun. $\angle P''CP' = 2\angle C$ ve P noktasına bağlı olmadığı için ikizkenar $P'CP''$ üçgeninin en küçük tabanı $CP' = CP$ kenarının en küçük olması halinde sağlanır. Bunun için de $CP \perp AB$ olması gerekir. Dolayısıyla P_0 noktası h_c 'nin tabanıdır.

Burada iki durum daha sözkonusudur.

I. A ve B de dar açı olabilir, yani üçgen dar açılı üçgen olabilir. Bu durumda h_c 'nin tabanı AB parçasındadır. Üçgen dar açılı üçgen olduğundan çözüme AC ve BC kenarlarından başlayabiliriz ve bu halde M_0 ve N_0 noktaları da sırasıyla h_a ve h_b 'nin tabanları olacaktır. Dolayısıyla dar açılı

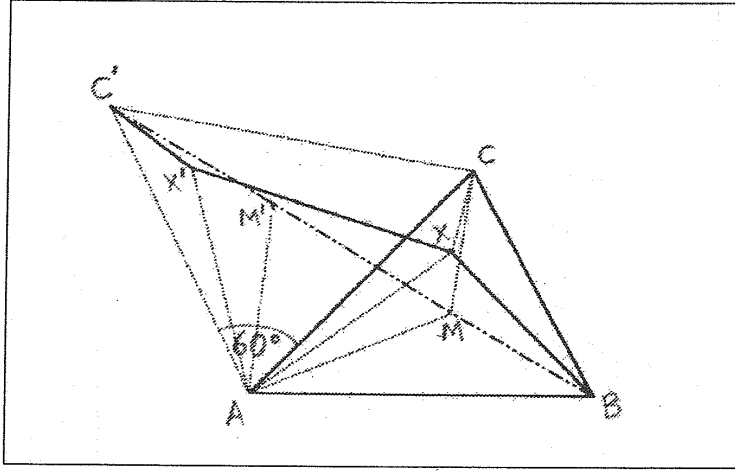
üçgen için optimal çözüm yüksekliklerin tabanıdır.

II. $\angle A \geq 90^\circ$ (veya $\angle B \geq 90^\circ$) olabilir. Bu durum yozlaşma halidir, yani $P_0 = A = N_0$ olur. Bundan dolayı çevre uzunluğu $2|AM_0|$ olan AAM_0 üçgeni alınır.

Bu problem daha genel haller için de çözülebilir. Bunu okuyucuya bir alıştırmaya bırakıyoruz.

Problem 2' : m, n, p pozitif reel sayıları ve bir ABC üçgeni verilmiş olsun. Köşeleri ABC üçgeninin kenarları üzerinde bulunmak koşuluyla öyle bir XYZ üçgeni bulunuz ki, $m|XY| + n|XZ| + p|ZY|$ ifadesi en küçük olsun.

Problem 3: Düzlem üzerinde verilmiş ABC üçgeninin köşelerinden uzaklıkları toplamı en az olan noktayı bulunuz.



Şekil 3a

Çözüm: Önce, problemi üçgenin içindeki noktalar için çözelim. X üçgen içinde herhangi bir nokta olsun. ACX üçgenini A noktası merkez olmak koşuluyla 60° sola döndürelim. Yeni durumda oluşan üçgen $AC'X'$ olsun. Bu durumda $|AX| = |AX'|$ ve $|C'X'| = |CX|$ olduğundan $|CX| + |AX| + |BX| = |C'X'| + |AX'| + |BX| = |C'X'XB|$ olur. Optimal X noktası öyle olmalıdır ki $C'X'XB$ çemberinin uzunluğu en küçük olsun.

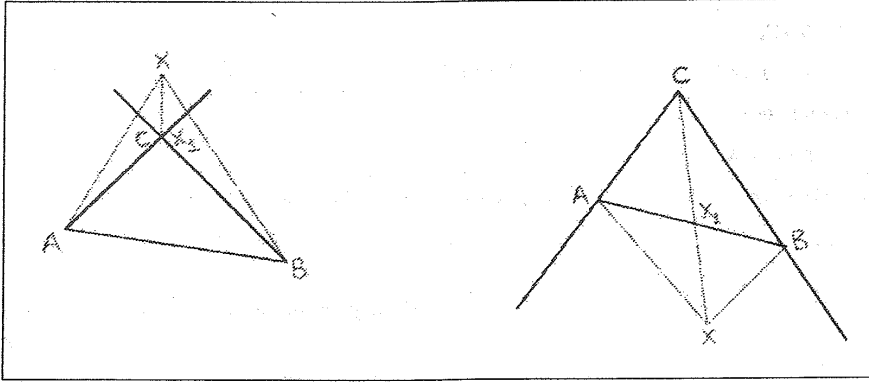
1. Durum: $\angle C$ açısı AC kenarına bakar. Dolayısıyla $\angle BCC' < 180^\circ$ ve $\angle BAC' < 180^\circ$ olur. Bu durumda $C'X'XB$ çemberi AC kenarına dokunur. Burada $C'B$ üzerinde olup $\angle C'MA < 60^\circ$ koşulunu sağlayan bir optimal nokta olmayabilir. Üçgen içinde böyle bir nokta var ise, $\angle AMB = 120^\circ$ olur. Bu durumda $\angle CBA < 120^\circ$ olmalıdır. Eğer $\angle CBA \geq 120^\circ$ ise

2. Durum: $\angle C$ açısı AC kenarına bakmaz. Bu durumda $\angle C \geq 120^\circ$ (veya $\angle A \geq 120^\circ$) olur. Bu durumda $C'X'XB$ çemberi $C'B$ çemberi götürülür ve C optimal nokta olur (benzer şekilde $\angle A \geq 120^\circ$ için optimal nokta A noktası olur).

3. Durum: Üçgenin dışında optimal bir nokta olmadığını gösterelim. X , ABC üçgeninin dışında bir nokta olsun. Bu durumda üçgenin sınırında, $|X_1A| + |X_1B| + |X_1C| < |XA| + |XB| + |XC|$ eşitsizliğini sağlayan bir X_1 noktasının var olduğu kolayca gösterilebilir. Bu durum, X noktası C açısının karşısındaki köşesinde Şekil 3(b) ve 3(c)'de görülür. Benzer şekilde diğer A ve B açıları için de aynı durum söz konusudur.

Bu problemin de genelleştirmesinin incelenmesini okuyucuya bırakıyoruz:

Problem 3' . m, n, p pozitif reel sayıları ve ABC üçgeni verilmiş olsun. Bu durumda ABC üçgeninin



Şekil 3b ve 3c

verildiği düzlem üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki, bu noktanın A, B, C köşelerinden uzaklıklarının, sırasıyla, m, n, p ile çarpımlarının toplamı en az olsun.

Not 1. Her bir geometrik optimalleştirme problemi belli bir fiziksel, ekonomik, biyolojik vb. problemin matematiksel modeli olabilir. Örneğin, problem 3'ü ekonomik bir problem biçiminde şöyle söyleyebiliriz: Yapılması planlanan üretim merkezi ürünlerini belli A, B, C tüketim merkezlerine m, n, p oranında dağıtmalıdır. Söz konusu üretim merkezi nerede yapılmalıdır ki, yol masrafı (ulaştırma masrafı) en az olsun.

Burada, bu konuyla ilgili birkaç alıştırmamızın okuyucularımız için ilginç olacağını düşünüyoruz.

ALİŞTIRMALAR

P1. Bir açı ve içinde bir nokta verilmiştir. Bu noktadan öyle bir doğru geçirin ki,

- alınan üçgenin alanı en az olsun;
- alınan üçgenin çevresi en az olsun.

P2. Aşağıdaki koşulları sağlayan en küçük çevre uzunluğuna sahip olan ABC üçgenini bulunuz:

- A ve B noktaları sabit olup, C köşesi verilmiş bir ℓ doğrusu üzerindedir.
- A noktası sabit olup, B ve C sırasıyla verilmiş ℓ ve m doğruları üzerindedir.
- A, B ve C noktaları, sırasıyla, verilmiş ℓ, m ve n doğruları üzerindedir.

P3. Verilmiş bir ABC üçgeni içinde, aşağıdaki koşulları sağlayan noktalar bulunuz:

- Köşe noktalarına olan uzaklıklarının karelerinin toplamı en az olsun;
- Kenarlara olan uzaklıklarının karelerinin toplamı en az olsun.

P4. Verilmiş bir çemberin içine çizilebilecek, kenar uzunluklarının karelerinin toplamı en büyük olan üçgeni bulunuz.

UYARI: Problem 2 ile P2(c) problemleri benzer görünmelerine rağmen, farklı problemlerdir.

Burada üçgenler için verilmiş birçok problemi dörtgen, beşgen ve diğer çokgenler için de uygun biçimde genelleştirip incelemek mümkündür.

KAYNAKLAR

[1] D.O. Schliarski, N.N. Chentsov, İ.M. Yaglom, Geometriçeski nera venstra i zadaçi na maksimum i minimum. Nauka, Moskova, 1970.