

## ZAMAN SKALASINDA TEMEL ANALİZ

Ahmet Yantır

İYTE, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Urla, İZMİR e-posta: ayantir@likya.iyte.edu.tr

1990' lı yılların en gözde çalışmaları Zaman Skalası üzerinde yapılan çalışmalardır. İlk kez 1988 yılında Stefan Hilger' in doktora tezinde tanıtılan Zaman Skalası en genel anlamıyla sürekli ve ayrık olan analizin birleştirilmesidir. Zaman Skalası üzerinde yapılan çalışmaların büyük bir kısmı adi diferansiyel denklemler ve dinamik sistemler üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu çalışmada zaman skalasında türevin nasıl tanımlandığı ve bu yeni tanıma göre türevin özelliklerinin nasıl şekillendiğini ispat ve örneklerle açıklamaya çalışacağız.

T reel sayıların herhangi bir kapalı alt kümesi olsun. T' yi zaman skalası olarak adlandıracağız. Reel sayılar

$$d(x, y) = |x - y| \quad \forall x, y \in R$$

metriğine göre tam uzay olduğundan ve T kapalı olduğundan T kümesi de aynı metriğe göre tam uzaydır.

### İleriye Sıçrama Operatörü:

$\forall t \in T ; t \leq \max T$ ; olmak üzere  $\sigma$ ' yi

$$\sigma(t) = \text{Inf}\{s : s \in T, s > t\}$$

Şeklinde ifade edelim. Bu durumda öyle  $s_n \in T$  vardır ki  $s_n \rightarrow \sigma(t)$ . T kümesi kapalı olduğundan  $\sigma(t) \in T$ .

**Tanım:**  $\sigma : T \rightarrow T$  operatörüne ileriye sıçrama operatörü denir.

T=R durumunda  $\sigma(t) = t$ , T=Z durumunda ise  $\sigma(t) = t + 1$ ' dir.

Ayrıca  $\sigma(\max T) = \max T$  şeklinde tanımlanır.

**Tanım:** Eğer  $\sigma(t) = t$  ise  $t$ ' ye sağ yoğun nokta,  $\sigma(t) > t$  ise  $t$ ' ye sağ yayılmış nokta denir.

### Geriye Sıçrama Operatörü:

$\forall t \in T ; t \leq \max T$ ; olmak üzere  $\rho$ ' yu

$$\rho(t) = \text{Sup}\{s : s \in T, s < t\}$$

Şeklinde ifade edelim. Bu durumda öyle  $s_n \in T$  vardır ki  $s_n \rightarrow \rho(t)$ . T kümesi kapalı olduğundan  $\rho(t) \in T$ .

**Tanım:**  $\rho : T \rightarrow T$  operatörüne geriye sıçrama operatörü denir.

T=R durumunda  $\rho(t) = t$ , T=Z durumunda ise  $\rho(t) = t - 1$ ' dir.

Ayrıca  $\rho(\min T) = \min T$  şeklinde tanımlanır.

**Tanım:** Eğer  $\rho(t) = t$  ise  $t$ ' ye sol yoğun nokta,  $\rho(t) < t$  ise  $t$ ' ye sol yayılmış nokta denir.

Bu tanımlara göre akla şu iki soru gelebilir:

- 1) Hangi  $t \in T$  için  $\rho(\sigma(t)) = t$  dir ?
- a) Eğer  $t$  sağ yayılmış ise ve      b) Eğer  $t$  sağ ve sol yoğun ise
- 2) Hangi  $t \in T$  için  $\sigma(\rho(t)) = t$  dir ?
- a) Eğer  $t$  sol yayılmış ise ve      b) Eğer  $t$  sağ ve sol yoğun ise

**Tanım:**  $T^k = \begin{cases} T - \{\max T\} \\ T \end{cases}, \max T < \infty \text{ ve } \sigma(\max T) > \max T$  diğer durumda

$$T_k = \begin{cases} T - \{MinT\} \\ T \end{cases}, \quad MinT < -\infty \quad \text{ve} \quad \rho(MinxT) < MinT \\ \text{diğer} \quad \text{durumda}$$

$T^k$ ' ya  $\Delta$ -türevlenebilirlik bölgesi,  $T_k$ ' ya  $\nabla$ -türevlenebilirlik bölgesi denir.

### Zaman Skalasında Türev

**Tanım:**  $f : T \rightarrow C$  bir fonksiyon,  $t \in T^k$  ve  $a \in C$  olsun. Eğer

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - a[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|, \forall s \in U_t$$

olacak şekilde  $t$ ' nin bir  $U_t$  komşuluğu varsa  $f$  fonksiyona  $t$  noktasında  $\Delta$ -türevlenebilir bir fonksiyon,  $a$ ' ya  $f$  fonksiyonunun  $t$  noktasındaki  $\Delta$ -türevi denir ve  $a = f^\Delta(t)$  ile gösterilir.

$$a = f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

### Örnekler:

1)  $T = R$  olsun. O halde  $f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$

$$= \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

2)  $T = Z$  olsun. O halde  $f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$

$$= \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t+1) - f(s)}{t+1 - s}$$

$$= f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

3)  $T$  keyfi bir uzay,  $f : T \rightarrow C$  bir fonksiyon ve  $f(t) = \alpha$ ,  $\forall t \in T$  olsun.

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow t} \frac{\alpha - \alpha}{\sigma(t) - s} = 0$$

O halde sabit bir fonksiyonun türevi 0' dir.

4)  $T$  keyfi bir uzay,  $f : T \rightarrow C$  bir fonksiyon ve  $f(t) = t$ ,  $\forall t \in T$  olsun.

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sigma(t) - s}{\sigma(t) - s} = 1$$

5)  $T$  keyfi bir uzay,  $f : T \rightarrow C$  bir fonksiyon ve  $f(t) = t^2$ ,  $\forall t \in T$  olsun.

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow t} \frac{(\sigma(t))^2 - s^2}{\sigma(t) - s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow t} \frac{(\sigma(t) - s)(\sigma(t) + s)}{\sigma(t) - s} = \sigma(t) + t$$

6)  $T = N_0^{\frac{1}{2}} = \{\sqrt{n} : n \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}\}$  ve  $f(t) = t^2$  olsun.

$$t = \sqrt{n} \Rightarrow n = t^2$$

$$\sigma(t) = \sigma(\sqrt{n}) = n + 1 = \sqrt{t^2 + 1} \text{ dir. O halde } (t^2)^\Delta = t + \sqrt{t^2 + 1}$$

7)  $T = \{\frac{n}{2} : n \in N_0\}$  ve  $f(t) = t^2$  olsun.

$$t = \frac{n}{2} \Rightarrow n = 2t$$

$$\sigma t = \sigma \frac{n}{2} = \frac{n+1}{2} = t + \frac{1}{2} \text{ dir. O halde } (t^2)^\Delta = 2t + \frac{1}{2}.$$

8)  $T = N_0^{\frac{1}{3}} = \{\sqrt[3]{n} : n \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}\}$  ve  $f(t) = t^2$  olsun.

$$t = \sqrt[3]{n} \Rightarrow n = t^3$$

$\sigma(t) = \sigma(\sqrt[3]{n}) = \sqrt[3]{n+1} = \sqrt[3]{t^3+1}$  dir. o halde  $(t^2)^\Delta = t + \sqrt[3]{t^3+1}$  dir.

9)  $T$  keyfi bir uzay,  $f: T \rightarrow C$  bir fonksiyon ve  $f(t) = \sqrt{t}$ ,  $\forall t \in T$  olsun.

$$\begin{aligned} f^\Delta(t) &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sqrt{\sigma(t)} - \sqrt{s}}{\sigma(t) - s} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sqrt{\sigma(t)} - \sqrt{s}}{(\sigma(t) - \sqrt{s})(\sigma(t) + \sqrt{s})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sigma(t)} + \sqrt{t}} \end{aligned}$$

$t = \text{Max}T$  Halinde  $\Delta$  Türevin Anlamı

$\Delta$  türevi  $T^k = T - \{\text{Max}T\}$  üzerinde tanımlandık. Burada şu soru sorulabilir: "Acaba  $t = \text{Max}T$  noktasında  $\Delta$  türev için ne söylenebilir?"

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - a[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s| \quad ; \forall s \in U_t$$

$t = \text{Max}T \Rightarrow U_t$   $t$ 'nin küçük komşuluğu yalnız  $t$  noktasını içerir. O halde yukarıdaki eşitsizlikte  $s$  yerine yalnızca  $t$  konabilir. Bu durumda yukarıdaki eşitsizlik

$$\Rightarrow |f(\sigma(t)) - f(t) - a[\sigma(t) - t]| \leq \epsilon |\sigma(t) - t|$$

$$\Rightarrow |f(t) - f(t) - a[t - t]| \leq \epsilon |t - t|$$

$$\Rightarrow 0 \leq 0$$

halini alır ki; bu da  $a$ 'nın her değeri için sağlanır. O halde türev tek türlü belirlenemez.

**Önerme:**  $t_0 \neq \text{Min}T$ ,  $\sigma(t_0) > t_0$  ve  $\rho(t_0) = t_0$ . Bu durumda  $\sigma(t)$  fonksiyonu  $t = t_0$  noktasında  $\Delta$  türeve sahip değildir.

**İspat:**  $a = f^\Delta(t_0) = \sigma^\Delta(t_0)$  olduğunu kabul edelim.

$$\Rightarrow |\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(s) - a[\sigma(t_0) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t_0) - s| \quad ; \forall s \in U_t$$

i)  $t_0 \in U_0$  olduğundan  $s = t_0$  seçilebilir.

$$|\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(s) - a[\sigma(t_0) - t_0]| \leq \epsilon |\sigma(t_0) - t_0| \quad ; \forall s \in U_{t_0}$$

her  $\epsilon$  değeri için geçerli olduğundan  $\epsilon \rightarrow 0$  için limit

$$\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(t_0) - a[\sigma(t_0) - t_0] = 0 \text{ olur. Yani;}$$

$$a = \frac{\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0}$$

dir.

ii)  $t_0$  sağ yayılmış ve sol yoğun olduğundan  $s \in U_{t_0}$  noktaları  $t_0$  noktasının solundan seçilebilir ve  $s$ 'ye yeterince yakın  $t_0$  lar için  $s \rightarrow t_0 \Rightarrow \sigma(s) \rightarrow t_0$ .

$$|\sigma(\sigma(t_0)) - t_0 - a[\sigma(t_0) - t_0]| \leq \epsilon |\sigma(t_0) - t_0|$$

her  $\epsilon$  değeri için geçerli olduğundan  $\epsilon \rightarrow 0$  için limit

$$\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(t_0) - a[\sigma(t_0) - t_0] = 0 \text{ olur. Yani;}$$

$$a = \frac{\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0}$$

dir.

(i) ve (ii) den  $\sigma(t_0) = t_0$ . Bu bir çelişkidir. Bu durumda kabulümüz yanlıştır. O halde  $\sigma(t)$ ,  $t_0$  noktasında  $\Delta$  türevlenemez.

**Önerme:**  $f : T \rightarrow C$  fonksiyonu  $T^k$  da  $\Delta$  türevlenebilir bir fonksiyon ve  $t \in T^k$  olsun. Bu durumda  $a = f^\Delta(t)$  tektir.

**İspat :**  $a_1 = f^\Delta(t)$  ve  $a_2 = f^\Delta(t)$  olduğunu kabul edelim.

$$\Rightarrow |f(\sigma(t)) - f(s) - a_1[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s| \quad ; \forall s \in U_t^1, \quad \forall \epsilon > 0$$

$$\Rightarrow |f(\sigma(t)) - f(s) - a_2[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon |\sigma(t) - s| \quad ; \forall s \in U_t^2, \quad \forall \epsilon > 0.$$

$U_t = U_t^1 \cap U_t^2$  olsun. Bu durumda her iki eşitsizlik de sağlanacaktır.

$$\Rightarrow \left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - a_1 \right| \leq \epsilon \quad ; \forall s \in U_t^1, \quad s \neq \sigma(t)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - a_2 \right| \leq \epsilon \quad ; \forall s \in U_t^2, \quad s \neq \sigma(t)$$

$$\Rightarrow \forall s \in U_t; |a_1 - a_2| = \left| a_1 - a_2 - \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} + \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} \right|$$

$$\Rightarrow |a_1 - a_2| \leq \left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - a_1 \right| + \left| \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} - a_2 \right|$$

$$\Rightarrow |a_1 - a_2| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

$$\Rightarrow a_1 - a_2 = 0 \quad a_1 = a_2$$

**Teorem:**  $f : T \rightarrow C$  bir fonksiyon ve  $t \in T^k$  olsun.

1)  $f$  fonksiyonu  $t \in T^k$  noktasında  $\Delta$  türevlenebilir ise  $t$  noktasında süreklidir.

2)  $f$  fonksiyonu  $t$  noktasında sürekli ve  $t$  sağ yayılmış ise  $f$  fonksiyonu  $t$ ' de  $\Delta$  türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}.$$

3) Eğer  $t$  sağ yayılmış ise  $f'$  nin  $t$ ' de  $\Delta$  türevlenebilir olması gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

değerinin sonlu olmasıdır. Bu durumda ;

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

4) Eğer  $f(t)$   $t$  noktasında  $\Delta$  türevlenebilir ise;

$$f(\sigma(t)) = f(t) + f^\Delta(t) \cdot [\sigma(t) - t].$$

**Hatırlatma:** "Z Üzerinde Süreklilik"

$E$  bir metrik uzay ve  $x_0 \in E$  olsun. Eğer verilen  $\epsilon > 0$  değeri için

$$\forall x \in U_\delta(x_0) = x \in E : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

olacak şekilde öyle  $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$  değeri bulunabiliyorsa  $f$  fonksiyonu  $x_0$  noktasında süreklidir.

$$d(t_1, t_2) = |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in T$$

$$T = Z \text{ olsun. } t_0 \in Z, \quad \forall \delta > 0, \quad U_\delta(t_0) = \{t \in Z : |t - t_0| < \delta\} = \{t_0\}$$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \epsilon$$

$\Rightarrow Z$  üzerinde tanımlanan tüm fonksiyonlar süreklidir.

**İspat:**

1)  $f'$  nin  $t$  noktasında  $\Delta$  türevi olduğundan, verilen  $\epsilon > 0$  değeri için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t) \cdot [\sigma(t) - s]| \leq \epsilon \cdot |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U_t$$

olacak şekilde  $U_t$  komşulugu vardır.

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &= |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s] - (f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]) + f^\Delta(t) \cdot (t - s)| \\ &\leq |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| + |f(\sigma(t)) - f(t) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - t]| + |f^\Delta(t)(t - s)| \\ &\leq \epsilon \cdot |\sigma(t) - s| + \epsilon \cdot |\sigma(t) - t| + |f^\Delta(t)| \cdot |t - s| \\ &\leq 2 \cdot \epsilon \cdot |\sigma(t) - t| + |f^\Delta(t)| + \epsilon = \epsilon_1, \quad \epsilon_1 > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$  fonksiyonu  $t$  noktasında süreklidir.

$$2) \quad \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t) + f(t) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - s} + \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

$$\Rightarrow f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - s}$$

3)  $(\Rightarrow)$   $f'$  nin  $t$  noktasında  $\Delta$  türevi olsun.

$$\Rightarrow |f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \epsilon \cdot |\sigma(t) - s|$$

$$\Rightarrow f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

$t$  noktası sağ yoğun olduğundan;

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f^\Delta(t)$$

( $\Leftarrow$ ) Aşıkardır.

4) Let  $\sigma(t) = t$

$$f(\sigma(t)) = f(t) + f^\Delta(t)[\sigma(t) - t] \Rightarrow f(t) = f(t)$$

Let  $\sigma(t) = t$ .

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} \Rightarrow f(\sigma(t)) = f(t) + f^\Delta(t)[\sigma(t) - t].$$

**Teorem:**  $f, g : T \rightarrow C$  fonksiyonlar ve  $t \in T^k$  olsun. Eğer  $f$  ve  $g$   $t$  noktasında  $\Delta$  türevlenebilir ise;

1)  $f+g$  fonksiyonu da  $t$  noktasında  $\Delta$  türevlenebilirdir ve;

$$(f+g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$$

2)  $k \in C$  olmak üzere  $kf$  fonksiyonu da  $t$  noktasında  $\Delta$  türevlenebilirdir ve;

$$(kf)^\Delta(t) = k \cdot f^\Delta(t)$$

3)  $f \cdot g$  de  $t$  noktasında  $\Delta$  türevlenebilirdir ve;

$$(f \cdot g)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = f(t) \cdot g^\Delta(t) + f^\Delta(t) \cdot g(\sigma(t))$$

4) Eğer  $g(t) \cdot g(\sigma(t)) \neq 0$ ) ise  $\frac{f}{g}$  fonksiyonu da  $t$  noktasında  $\Delta$  türevlenebilirdir ve;

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

1 ve 2 nolu ifadelerin ispatı reel analizdeki gibidir.

**İspat :**

3) Durum 1)  $t$  noktası sağ yayılmış olsun.

$$(fg)^\Delta(t) = \frac{(fg)(\sigma(t)) - (fg)(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(\sigma(t))g(\sigma(t)) - f(t)g(\sigma(t)) + f(t)g(\sigma(t)) - f(t)g(t)}{\sigma(t) - t}$$

$$= \frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}g(\sigma(t)) + f(t)\frac{g(\sigma(t))-g(t)}{\sigma(t)-t} = f^\Delta(t)g(\sigma(t)) + f(t)g^\Delta(t)$$

**Durum 2)** t noktası sağ yoğun olsun.

$$\begin{aligned} (fg)^\Delta(t) &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{(fg)(t)-(fg)(s)}{t-s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t)g(t)-f(t)g(s)+f(t)g(s)-f(s)g(s)}{t-s} \\ &= \lim_{s \rightarrow t} \frac{g(t)-g(s)}{t-s} f^\Delta(t) + \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} g^\Delta(t) \\ &= g^\Delta(t)f(t) + f^\Delta(t)g(t) \\ &= f^\Delta(t)g(\sigma(t)) + f(t)g^\Delta(t) \end{aligned}$$

4 nolu ifadenin ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

#### KAYNAKÇA :

- 1) Hussein Husseinov: Zaman skalasında Dinamik Sistemler ders notları, İzmir 2000
- 2) Martin Bohner, Allan Peterson: Dynamic Equations on Time Scales, Boston 2001